Содержание

1 Комбинаторика

1.1 Что-то тривиальное

1.1.1 Правило произведенеия

Если элемент $a \in A$ мы можем выбрать n способами и после каждого такого выбора элемент из $b \in B$ можем выбрать m способами, то пары ab мы можем выбрать $n \cdot m$ способами.
$|X_1 \times \ldots \times X_n| = |X_1| \times \ldots \times |X_n|$.
В n-мерном векторном про-ве над $GF(p)$ есть p^n элементов. (Двоичных векторов длины n будет 2^n штук).

1.1.2 Определение

Выборка семейстава элементовв $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ из $A = \{a_1, , ...a_n\}$ назовем выборкой объема K из n элементов.

1. **Упорядоченная выборка объема K из n элементов без повторений**.
   (n, k) - перестановка, $A(n, k)$ - число таких выборок.

   Лемма 1: $A(n, k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1) = [n]_k$.

   Док-во: очевидно :).
   $\forall x \in \mathbb{R}: \quad [x]_k = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k). \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$ т.к. мы должны иметь целое кол-во скобок, равное k.
   $[x]_0 = 1, \quad [n]_n = n!$.

   Пример: $(3, 2)$-перестановки: ab, ac, ba, bc, ca, cb.

2. **Упорядоченная выборка объема K из n элементов с повторениями**.
   $\widehat{A}(n, k)$

   Лемма 2: $\widehat{A}(n, k) = n^k$. Док-во очевидно.

   Пример: $\widehat{A}(3, 2) = 9$. В отличие от предыдущего, могут быть повторения: aa, bb, cc.

3. **Неупорядоченные выборки объема K из n элементов без повторений**.
   (n, k) - сочетания. Обозн. (n, k).
   $(3, 2)$-сочетания: ab, ac, bc. $C(3, 2) = 3$.
   $C(n, k) = \dfrac{[n]_k}{k!} = \dbinom{n}{k} = C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, \quad x$ может быть из $\mathbb{R}$.

   Док-во: $(n, k) = \dfrac{A(n, k)}{k!} = \dfrac{[n]_k}{k!}$. ч.т.д.
   $\dbinom{n}{k} = 0,$ при $k > n$

   Пример: Число двоичных векторов длины n с k единицами равно числу k-элементных подмножеств n-элементного мно-ва и равно $\binom{n}{k}$. $((x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$, $\{0, 1\}^n$ - число двоичных картежей/наборов - как больше нравится).

4. **Неупорядоченные выборки объема k из n элементов с повторениями**. Обозначим $\widehat{C}(n, k)$
   $\widehat{C}(3, 2) = 6$ (предыдущие ab, ac, bc плюс повторения aa, bb, cc).

   Лемма 4: $\widehat{C}(n, k) = \dbinom{n+k-1}{n-1}$

Док-во: Давайте построим биекцию с множеством, кол-во элементов которого мы можем посчитаь.
$r_1, \ldots, r_n$ - где r_i - число вхождений a_i в выборку.
$\sum r_i = k, \quad r_i \geq 0$
Рассмотрим двоичный картеж, у которого: $\underbrace{0\ldots0}_{r_1}1\underbrace{0\ldots0}_{r_2}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{r_n}$ - длина $n+k-1$, единиц $n-1$.

Получаем биекцию между неупорядоченными выборками по k из n элементов без повторений и двоичных картежей для $(n+k-1)$ с $(n-1)$ единицами.
Получаем $\binom{n+k-1}{n-1}$ ч.т.д.

1.2 Бином Ньютона

$\forall n \in \mathbb{N} \quad (a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
Следущие вещи верны $\forall n, k \in N, \quad k \leq n$

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. тождество Паскаля: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
3. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
4. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
5. **Лемма 6: (тождества Вандермонда):**
   $\forall n, m \mid k \leq n,\, k \leq m \quad \binom{n+m}{k} = \sum\limits_{s=0}^{n} \binom{m}{s} \cdot \binom{n}{k-s}$
6. **Лемма 7:** $\forall n \in N \binom{2n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

   Док-во: $\binom{2n}{n} = \binom{n+n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ ч.т.д.

Пример 5 ручек, 7 карандашей. Можем выбрать 1 предмет. 12 вариантов :)

1.2.1 Правило суммы

Если из A можно выбрать n способами, из B можно выбрать m способами. Из A или B можно выбрать $n+m$ способами.
$\forall$ разбиения мно-ва S на $S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_n, \quad \forall i \neq j\; S_i \cap S_j = \varnothing : \quad |S| = |S_1| + \ldots + |S_n|$.

Пример: тождество Паскаля (1.1(2)).

Док-во: разобъем мно-во всех (n,k)-сочетаний на 2 мно-ва:

1. Елемент a попал в наше сочетание $\Rightarrow$ один уже есть, из осташвихся $n-1$ выбираем нужные $k-1$.
2. Елемент a не попал в сочетание.

$(1) + (2) =$ всем сочетаниям $= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

$|S_1 \cup ... \cup S_2|, \quad S_i <= S \leftarrow$ это интересная строчка, которую я так и не понял, к какому пункту лучше отнести ...[1].

1.2.2 Лемма 8:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Доказательство. картинки хватит... ☐

1.2.3 Лемма 9:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cup C| - |A \cup B| - |B \cup C| + |A \cup B \cup C|$.

Доказательство. аналогично. ☐

1.3 Теорема 1: формула включений-исключений

Пусть A - конечное конечное мно-во, $A_1 \dots A_n \subseteq A$.

Тогда $|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k S_k$,

$S_k = \sum\limits_{\{i_1 \dots i_k\} \subseteq \{1 \dots n\}} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$

$|S \setminus (A \cup B \cup C)| = S_0(|S|) - S_1(|A| + |B| + |C|) + S_2(|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) - S_3(|A \cap B \cap C|)$.

Доказательство. Первый способ: инудкция по n - д.з. ☐

Доказательство. Второй способ: $x \in A$ - рассмотрим вклад x в левую и правую часть неравенства.

1. $x \in A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$
   слева дает 1. справа только в S_0, т.е. 1 раз.

2. $x \in (A_1 \cup \dots \cup A_n)$
   слева дает 0. Пусть x встречается ровно в t множествах $A_{i_1} \dots A_{i_t}$, в S_0 он встретися 1 раз
   в S_1 он встретится t раз
   в $S_2 : \sum\limits_{1 \le j_1 < j_2 \le n} |A_{j_1} \cap A_{j_2}| = \binom{t}{2}$ раз
   в $S_3 : \binom{t}{3}$
   $\vdots$
   в $S_t : \binom{t}{t} = 1$ раз
   Всего справа он встречатеся $1 - t + \binom{t}{2} - \binom{t}{3} \dots + (-1)^t \binom{t}{t} = \sum\limits_{j=0}^{t} (-1)^i \binom{t}{i} \overset{\text{по тождеству 4}}{=} 0$. ч.т.д.

☐

[1] наверное, всё-таки к нижнему ...

1.3.1 Задача о беспорядках

$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ - перестановка $(1, \ldots, n)$.
Нужно найти число перестановок из n эл-ов мно-ва, в котороых никакой эл-т не остался на мсте.

Доказательство. $(\forall i \quad \pi_i \neq i)$.
A - все перестановки. $\forall i \quad A_i \leftrightarrow \pi_i = i$.
$A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ - искомое мно-во.
$|A| = n! \Rightarrow S_0 = n!$
$|A_i| = (n-1)!$
$S_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i| = n \cdot (n-1)!$
$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$
$S_2 = \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} (n-2)! = \binom{n}{2}(n-2)!$
$|A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}| = (n-k)!$
$S_k = \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} (n-k)! = \binom{n}{k}(n-k)!$
$|A \setminus (A_i \cup \ldots \cup A_n)| = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k S_k = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)! = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!}(n-k)! = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ □

1.3.2 Функция Эйлера

$\varphi(m)$ - ф-ия Эйлера, $m \in \mathbb{N}$. Кол-во натуральных чисел, не превосходящих m и взаимно простых с m.

1.3.3 Теорема 2

$\forall m \geq 2 \quad m = p_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{l_n}$ - разложение на простые множители,тогда $\varphi(m) = m \prod\limits_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$

Доказательство. $A = \{1 \ldots m\}$
A_i - числа, которые дляется на p_i, $\forall i = 1 \ldots n$
$|A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)|$
$|A| = m \quad \Rightarrow \quad S_0 = m$
$|A_i| = \frac{m}{p_i} \quad (p_i, 2p_i, 3p_i, \ldots, \frac{m}{p_i} \cdot p_i)$
$S_1 = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{m}{p_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i|$
$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \frac{m}{p_{i_1} \ldots p_{i_k}}$
$S_k = \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \frac{m}{p_{i_1} \ldots p_{i_k}}$
$|A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| = m + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k S_k = m + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k S_k = m + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \frac{m}{p_{i_1} \ldots p_{i_k}} = -(someletters) ... +$
$(-1)^n \frac{m}{p_1 ... p_n} = m - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{m}{p_i} + \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m}{p_i p_j} - ... =$
$= m \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot (1 - \frac{1}{p_2}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{1}{p_n})$ □

1.3.4 Теорема 3

Число сюрьективных отображение $f : X \to Y, \quad |X| = n$, $|Y| = k$, равно $(-1)^k \sum\limits_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \cdot i^n$

Доказательство. A - все отображения $X \to Y, \quad Y = \{y_1, \dots, y_k\}$
A_i - все отображения $X \to Y \mid y_i$ - нет проообраза.
$A \setminus (A_1 \cup ... \cup A_k)$ - мно-во всех отображений, у которых 1-й элемент покрыт, ..., k-й элемент покрыт.
$|A| = k^n$
$|A_i| = (k-1)^n$
$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_t}| = (k-t)^n$

$$S_t = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_t \le k} (k-t)^n = \binom{k}{t}(k-t)^n$$

$$|A \ (A_1 \cup \ldots \cup A_k)| = \sum_{t=0}^{k} (-1)^t \binom{k}{t} (k-t)^n \overset{k-t=i}{=} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$$ □

1.4 Числа Стирлинга

Число Стирлинга II рода $S(n,k)$ - кол-во неупорядоченных разбиений n-элементного мно-ва на k непустых подмно-в.
$\{1,2,3,4\} \quad S(4,2) = \{1\}\{2,3,4\}, \{2\}\{1,2,3\}, \{3\}\{1,2,3\}, \{4\}\{1,2,3\}, \{1,2\}\{3,4\}, \{1,3\}\{2,4\}, \{1,4\}\{2,3\} = 7.$
Очевидно что $\forall n \in N, \quad S(n,1) = 1, \quad S(n,n) = 1, \quad S(n,k) = 0$ при $k > n$.
Полагаем, что $S(0,0) = 1, \quad S(n,0) = 0,\ n > 0$.

1.4.1 Теорема 4

$\forall k, n \in N, \quad 0 < k < n \quad S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$, что очень напоминает ф-лу для биномиальнго коэффициента $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Доказательство. Все разбиения разделим на 2 непересекающихся мно-ва:

1. n - одноэлементное подмно-во. Количество $\{n\}, S(n-1,k-1)$
2. все остальные. Количество? Разобьём все оставшиеся на k подмно-в: $S(n-1,k) \cdot k$ - надо засунуть n-й элемент. (где k - кол-во множеств, откуда мы можем взять этот самый элемент).

По правилу суммы: $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$. □

1.4.2 Теорема 5

$$\forall k \ge 2, n \ge k, \quad S(n,k) = \sum_{i=k-1}^{n-1} S(i,k-1)\binom{n-1}{i}.$$

Доказательство. Разобъем все разбиения на подмно-ва по параметру S. S - мощность подмно-ва, куда попал элемент n. $1 \le S \le n-k+1$, т.к. к-1 эл-н надо будет ещё куда-нить засунуть.
Способов выбрать подмно-во, куда засунем n: $\binom{n-1}{s-1}$. $S(n-s,k-1)$ - разбить остальные.
Способов разбить n на k непустых подмножеств, таких что n попал в s-элементое подмножество получилось $\binom{n-1}{s-1} \cdot S(n-s,k-1)$. Получаем $S(n,k) = \sum_{s=1}^{n-k+1} \binom{n-1}{s-1} \cdot S(n-s,k-1) \overset{n-s=i}{=} \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{n-i-1(=i)} S(i,k-1)$. □

1.4.3 Теорема 6

$$S(n,k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} i^n$$

Доказательство. Число сюрьективных отображений $X \to Y, |X| = n, |Y| = k$. Каждое такое отображение отображает:

$$x = \begin{cases} \{\} \to y_1 \\ \{\} \to y_2 \\ \ldots \\ \{\} \to y_k \end{cases}.$$

Это число - есть количество упорядоченных разбиений n-элементного множества на k непустых подмножеств. А нам нужно найти число неупорядоченных разбиений. В общем, хрень какая-то, но по теореме 3 всё доказано $\square$

1.5 Числа Белла

Обозначим B_n - кол-во неупорядоченных разбиений n-элементного мно-ва на непустые подмно-ва.

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$$

1.5.1 Теорема 7

$B_n = \sum_{0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i$

Доказательство. $B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) \overset{\text{теорема 5}}{=} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k-1}^{n-1} S(i,k-1)\binom{n-1}{i} =$
$= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{i+1} S(i,k-1)\binom{n-1}{i} \overset{k-1=t}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{i} S(i,t)\binom{n-1}{i} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i$ $\square$

1.6 Числа Стирлинга первого рода

$s(n,k)$ - число перестановок мно-ва 1,...,n, в циклическом представлении которых ровно к циклов.
$\begin{pmatrix} 1,2,3,\dots,n \\ \pi_1,\pi_2,\pi_3,\dots,\pi_n \end{pmatrix}$. $\quad 1 \to \pi_1 \to \dots$
$s(4,2) = 11([1][2,3,4],[1][2,4,3],[2][1,3,4],[2][1,3,4],[3][1,2,4],[3][1,4,2],[4][1,2,3],[4][1,3,2],[1,2][3,4],[1,3][2,4],[1,4][2,3])$.
Положим $s(0,0) = 1, \quad s(n,0) = 0,\ n > 0 \quad s(n,k) = 0, k > n$.

1.6.1 Лемма 10:

1. $s(n,1) = \frac{n!}{n} = (n-1)!$
2. $s(n,k) \geq S(n,k)$
3. $s(n,n) = S(n,n) = 1$
4. $s(n,n-1) = S(n,n-1) = \binom{n}{2}$
5. $\sum_{k=1}^{n} s(n,k) = n!$

Доказательство. 5: $n!$ – кол-во возможных перестановок. каждая перестановка – произведение циклов. любое про-ие циклов – перестановка. вроде там биекция получается... $\square$

1.6.2 Теорема 8

$\forall n,k,\ 0 < k < n \quad s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k)$

Доказательство. аналогично :'(. (Говорят, похоже на числа Стирлинга второго рода) $\square$

1.6.3 Некоторые факты (вступление к 9-й теореме)

$[x]_k = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+1)$ - как мы знаем, это "укороченный" факториал длины k.
$x^1 = [x]_1$
$x^2 = [x]_2 + [x]_1$
$x^3 = [x]_3 + 3[x]_2 = [x]_1$
$x^4 = [x]_4 + 6[x]_3 + 7[x]_2 + [x]_1$
$x^4 = S(4,4)[x]_4 + S(4,3)[x]_3 + S(4,2)[x]_2 + S(4,1)[x]_1$

1.6.4 Теорема 9

$\forall n \in N : \quad x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)[x]_k.$

Доказательство. $[x]_{k+1} = [x]_k \cdot (x-k)$
$(*) \quad x \cdot [x]_k = [x]_{k+1} + k \cdot [x]_k$
Индукция по n: $x^1 = [x]_1$ - очев.

$$x^n = x \cdot x^{n-1} \overset{\text{по индукции}}{=} x \cdot \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k)[x]_k = \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k) \cdot [x]_{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k) \cdot k \cdot [x]_k \overset{t=k+1 \text{ в первой сумме}}{=}$$

$= \sum_{t=2}^{n} S(n-1,t-1)[x]_t + \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k) \cdot k \cdot [x]_k$ Первая сумма равно 0 при t=1, вторая сумма равно 0 при k=n.
Получается:

$$\sum_{k=1}^{n} (S(n-1,k-1) + kS(n-1,k))[x]_k = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)[x]_k \qquad \square$$

1.6.5 Ещё факты (вступление к 10-й теореме)

$[x]_{\overline{k}} = x(x+1)\dots(x+k-1)$
$[x]_{\overline{1}} = x$
$[x]_{\overline{2}} = x(x+1) = x^2 + x$
$[x]_{\overline{3}} = x^3 + 3x^2 + 2x$
$[x]_{\overline{4}} = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$
$[x]_{\overline{4}} = s(4,4) \cdot x^4 + s(4,3) \cdot x^3 + s(4,2) \cdot x^2 + s(4,1) \cdot x$

1.6.6 Торема 10

$\forall n \in \mathbb{N} : \quad [x]_{\overline{n}} = \sum_{k=1}^{n} s(n,k) x^k$

Доказательство. Индукция по n
$[x]_{\overline{n+1}} = [x]_{\overline{n}}(x+n)$
Аналогично Теореме 9 (1.5.4). $\square$

1.6.7 Следствие

$[x]_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k) x^k$

1.6.8 Теорема 11: Связь между числам Стирлинга

$$\forall n, m \in N \quad \sum_{k=1}^{n} S(n,k)s(k,m)(-1)^{k-m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} .$$

Доказательство.

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)[x]_k = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) \sum_{m=1}^{k} s(k,m)(-1)^{k-m} x^m = \sum_{m=1}^{n} x^m \sum_{k=1}^{n} S(n,k)s(k,m)(-1)^{k-m} = x^n$$

Сравниваем степень при x^n: если $n = m$, то вторая сумма равна 1, иначе она должна быть равно 0. $\square$

1.7 Разбиение чисел

Разбиение числа n на натуральные слагаемые - это представление n в виде суммы $x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \quad x_i \in \mathbb{Z}_+$

1.8 Упорядоченные разбиния

Если фиксировать k : $\binom{n-1}{k-1}$

Если не фиксировать k : 2^{n-1}

1.9 Нупорядоченные разбиения

$P(n)$ - число неупорядоченных разбиений n на натуральные слагаемые, $P(n,k)$ - на k натуральных слагаемых.
Стандартные формы:
$\begin{cases} n = x_1 + \ldots + x_k \\ x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_k \geq 1 \end{cases}$
$P(5) = 7 \quad (4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1)$

1.9.1 Теорема 12:

$\forall n, k \mid 0 < k < n$

$$P(n,k) = \sum_{i=1}^{k} P(n-k, i)$$

Доказательство. $(*) \quad (n-k) = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \ldots + (x_k - 1)$
$y_i = x_i - 1$
$n - k = y_1 + y_2 + \ldots + y_k, \quad y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_k \geq 0$
Если $s : y_s > 0, y_{s+1} = y_{s+2} = \ldots = y_n = 0$, тогда (*) - это разбиение $n-k$ на s слагаемых, которых у нас $P(n-k,s)$.

$$P(n,k) = \sum_{s=1}^{k} P(n-k, s)$$ □

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} P(n,k)$$

1.9.2 Теорема 13

Кол-во разбиений n на различные слагаемые равно кол-ву разбиений n на нечётные слагаемые.

Доказательство. Q_n - мно-во разбиений n на различные слагаемые, T_n - мно-во разбиений на нечётные слагаемые. Докажем, что $|Q_n| = |T_n|$, построим для этого биекцию.
$f : Q_n \to T_n$
$n = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \quad x_1 > x_2 > \ldots > x_k$
$\forall i \quad x_i = 2^{t_i} \cdot y_i, \quad y_i$ - нечётно

$$n = \underbrace{y_1 + \ldots + y_1}_{2^{t_1}} + \underbrace{y_2 + \ldots + y_2}_{2^{t_2}} + \ldots + \underbrace{y_k + \ldots + y_k}_{2^{t_k}}.$$

$h : T_n \to Q_n$

$$n = \underbrace{y_1 + \ldots + y_1}_{d_1} + \ldots + \underbrace{y_s + \ldots + y_s}_{d_s}, \quad y_i \neq y_j, i \neq j.$$

$\forall i \quad d_i$ - однозначно раскладывается в сумму степеней двойки.
$d_i = 2^{\sigma_{i,1}} + 2^{\sigma_{i,2}} + \ldots + 2^{\sigma_{i,m_i}}, \sigma_{i,1} > \sigma i, 2 > \ldots > \sigma_{i,m_i}$
$n = 2^{\sigma_{1,1}} y_1 + 2^{\sigma_{1,2}} y_1 + \ldots + 2^{\sigma_{i,m_i}} + \ldots + 2^{\sigma_{s,1}} y_s + \ldots + 2^{\sigma_{s,m_s}} y_s.$

$h = f^{-1}$ - биекция. □

1.9.3 Пример

$30 = 10 + 7 + 6 + 4 + 3 = 2^1 \cdot 5 + 2^0 \cdot 7 + 2^1 \cdot 3 + 2^2 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1 = 5 + 5 + 7 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3.$

1.9.4 Диаграмма Ферре

Диаграмма Ферре k строчек точек. В i-й строке x_i точек, расположенных в первых x_i столбцах.
(Слева – кол-во слагаемых, сверху - нумеруем столбцы и самый правый равен наибольшему слгаемому)

1.9.5 Теорема 14

$\forall k, n, \quad 0 < k \leq n:$

1. $P(n, k)$ равно числу разбиений n на натуральные слагаемые, наибольшее из которых равно k.
2. $P(n + k, k)$ равно числу разбиений n на натуральные слагаемые, не превосходящие k.
3. Число разбиений $n - k$ ровно на $m - 1$ слагаемое, не превосходящих k равно числу разбиений $n - m$ на $k - 1$ слагаемое, не превосходящих m.

Доказательство.

1. Транспозиция даиграммы Ферре.
2. Рассмотреть диаграмму без первого столбца.
3. Рассмотрим диаграмму Ферре:

□

1.9.6 Теорема 15

$\widehat{P_o}(n)$ - число разбиений n на нечётное число различных слагаемых. (*Прим. Odd - англ. нечётный*)
$\widehat{P_e}(n)$ - число разбиений n на чётное число различных слагаемых. (*Прим. Even - англ. чётный*)
Теорема: $\widehat{P_e}(n) - \widehat{P_o}(n) = \begin{cases} (-1)^n, & n = \frac{m}{2}(3m \pm 1) \\ 0, & \text{в остальных} \end{cases}$

Доказательство. $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_k \quad, x_1 > x_2 > \ldots > x_k,$
$x = (x_1, \ldots, x_k)\, \alpha(x) = x_k, \quad \beta(x)$ - наибольшее $j, x_j = x_1 - j + 1$ *Extaple:*

Преобразуем x следующим образом:

1. $\alpha(x) \leq \beta(x)$, тогда отбрасываем x_k и в первых x_k строчках добавляем по дной точке. Получим разбиение на различные слагаемые и чётность числа слагаемых измениться.
2. $\alpha(x) > \beta(x)$, тогда отнимаем в первых $\beta(x)$ строчках по одной точке и строим новую строку длины $\beta(x)$.
   (a) $n = m + (m + 1) + ... + (2m - 1) = \frac{1}{2}m(3m - 1)$
   (b) $n = (m + 1) + (m + 2) + ... + 2m = \frac{1}{2}m(3m - 1)$

   $n \neq \frac{1}{2}m(3m \pm 1)$
   $\widehat{P_o} = \widehat{P_e}(n)$.

□

1.10 Рекуррентное соотношение

1.10.1 Примерчик 1 (“Ханойские башенки”)

8 дисков разного диаметра, есть 3 колышка. Они выложены на первом в порядке возрастания. Надо переложить с первого колышка на другой. Какого минимальное кол-во перекладываний?
Пусть у нас есть n дисков, T_n - минимальное кол-во перкладываний.
$T_0 = 0 \qquad T_1 = 1 \qquad T_2 = 3$
$T_n \leq 2T_{n-1} + 1 \quad \Rightarrow T_n = 2T_{n-1} + 1$, т.к. чтобы переложить пирамиду высотой n, надо переложить пирамиду высотой $n-1$ и потом ещё переложить n-ый диск.
А может, $T_n = 2^n - 1$? $T_{n+1} = 2T_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$. Действительно, так.

1.10.2 Небольшое обощение

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \quad a_n = f(a_{n-1}, \dots, a_{n-k}) \quad \forall n \geq k$ Но считать каждое n по порядку долго и требует $O(n)$ времени, поэтому лучше было бы найти волшебную ф-ию $a_n = h(n)$ со временем $O(1)$.

1.10.3 Примерчик 2

n пар скобок. Сколько существует правильных скобочных последовательностей определённой длины?
$C_1 = 1 \quad ()$
$C_2 = 2 \quad (()), ()()$
$C_3 = 5 \quad ()()(), (()), ()(()), (()()), ((()))$
Рассмотрим самую левую скобку: для неё существует пара. И тут должна быть красивая картинка.
$C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} \cdot C_0$.

1.11 последовательность чисел Каталана

$\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ - последовательность чисел Каталана.
Пусть $\quad '(' = +1, \quad ')' = -1 \quad b_1, b_2, \dots, b_{2n}, b_i \in \{-1, 1\}$. Получаем сво-ва:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} b_i = 0$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{j} b_i \geq 0 \quad \forall j$

1.11.1 Лемма 11

Пусть $b_1, \dots, b_{2n}$ удоволетворяет 1 и 2. Тогда $\exists!$ правильная скобочная структура с этим кодом.

Доказательство. Индукцией по n (упражнение)
C_n - число послед. $b_1, \dots, b_{2n}$ из "+1" и "-1", удовл. 1 и 2.
Удовлетворяют условию 1: $\binom{2n}{n}$
Пусть W_n - мно-во послед., удовлет. 1 и не удовлет. 2. Пусть $\alpha \in W_n$, $\alpha = \alpha_1 - \alpha_{2n}$.
Рассмотрим $\min j : \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{j} \alpha_i = -1$
$\varphi(\alpha) \to -\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{2n}. \in V_n$ - мно-во послед. из -1 и 1 длины $2n$, в которых $n+1$ единиц.
$\beta \in V_n$, $\beta = \beta_1, \dots, \beta_{2n}. \quad \exists \min j \mid \displaystyle\sum_{i=1}^{j} \beta_i = 1. \quad \xi(\beta) \to \beta_1, \beta_2, \dots \beta_{2n} \in W_n$.
$\xi(\varphi(\alpha)) = \alpha$
$\varphi(\xi(\beta)) = \beta$
$|W_n| = |V_n| = \binom{2n}{n+1}$ □

1.11.2 Теорема 16

Для последовательности чисел Катална, заданных рекуррентным соотношением
$c_n = c_0 \cdot c_{n-1} + c_1 \cdot c_{n-2} + \ldots + c_{n-1} \cdot c_0$
n-ое число Каталана: $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

1.11.3 Задачко

1 января: 1 пара кроликов. Сколько кроликов через год? f_n - число пар кроликов 1 числа n+1-ого месяца.
$f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad f_2 = 2, \quad \dots \quad f_{12} = ?$
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}. \quad \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$\begin{cases} f_0 = 1, f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

1.12 Производящие функции

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n = A(t)$ - производящая ф-ия последовательноси $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. $A(t)$ - это как бэ не ф-ия от t, мы знаем только что $A(0) = a_0$.

1.12.1 Элементарная производящая ф-ия

1. $(1+T)^{\alpha} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n$
2. $e^t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$
3. $\ln\left(\frac{1}{1-t}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$
4. $\sin(t) \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{f^{2n+1}}{(2n+1)!}$
5. $\cos(t) \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{f^{2n}}{(2n)!}$

1.12.2 Сво-ва производящих ф-ий

Пусть $A(t)$ и $B(t)$ - производящие ф-ии послед. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ соотвтественно. Тогда:

1. $\alpha A(t) = \beta B(t)$ - производящая ф-ия. $\{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n=0}^{\infty}$.
2. $A(t) \cdot B(t)$ - производ. ф-ия послед. $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}, d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$
3. $t^m A(t)$ - производящ. ф-ия. $\underbrace{0, \ldots, 0}_{m} a_0, a_1, \ldots$
4. $A(ct)$ - про-щая ф-ия послед. $\{c^n a_n\}_{n=0}^{\infty}$
5. $tA'(t)$ - $\{n \cdot a_n\}_{n=0}^{\infty}$
6. $\int_0^t \frac{A(t) - a_0}{t} dt$ - производящая ф-ия послед. $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
7. $\frac{A(t)}{1-t}$ - производящая ф-ия послед. $\left\{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\right\}_{n=0}^{\infty}$

1.12.3 Лемма 12

$A(t)$ - про-щая ф-ия послед. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, a_0 \neq 0$. Тогда $\exists!$ производящ. ф-ия $B(t)$ послед. $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. $A(t) \cdot B(t) = 1$.

Доказательство.
Определим коэффициенты $B(t)$ последовательно. $b_n = \frac{1}{a_0}$, если определены $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$.
$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$ - неизвестен только b_n, который мы можем найти. □

1.12.4 Применение производящих ф-ий

Пример $(1+t)^n = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \binom{n}{s} t^s$

$(1+t)^m = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \binom{m}{s} t^s$

$(1+t)^{n+m} = (1+t)^n (1+t)^m$

Приравнием коэффициенты при t^k:

$\binom{n+m}{k} = \sum\limits_{s=0}^{k} \binom{n}{s} \cdot \binom{m}{k-s}$

Упражнение $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \cdot \binom{m}{n-k} (-1)^k = \begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ - нечётно} \\ (-1)^{n/2} \binom{m}{n/2}, \text{ если } n \text{ - чётно} \end{cases}$

1.12.5 Лемма 13

Производящая ф-ия для $\{P(n)\}_{n=0}^{\infty}$, $\quad A(t) = \prod\limits_{i=1}^{\infty} (1-t^i)^{-1}$.

Доказательство.

$(1-t^i)^{-1} = 1 + t^i + t^{2i} + \dots$

$A(t) = \prod\limits_{i=1}^{\infty} (1-t^i)^{-1} = \prod\limits_{i=1}^{\infty} (1 + t^i + t^{2i} + \dots)$

При t^n: $\sum\limits_{j_1,\dots,j_n \geq 0 \backslash n 1 j_1 + 2j_2 + \dots + n j_n = n} 1 = P(n)$. $\square$

1.12.6 Лемма 14

Производящая ф-ия для $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ есть $C(t) = \dfrac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$

Доказательство.

$C(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (C_0 C_{n-1} + \dots + C_{n-1} C_0) t^n = 1 + t(C(t))^2$

$t \cdot (C(t))^2 - C(t) + 1 = 0$

$C(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t}$

$C(0) = 1$.

$$(1-4t)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4t)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)\dots(-2n-3/2)}{n!} (-4t)^n =$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{n!} 2^n t^n =$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} 2t^n$$

$$C(t) \frac{1}{2t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} 2t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} t^n$$

$c_n = \dfrac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ $\square$

1.12.7 Лемма 15

Производящая ф-ия для последовательности чисел Фибоначчи $\{f_n\}_n^{\infty}$ имеет вид $F(t) = \dfrac{1}{1-t-t^2}$

Доказательство.

$F(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n t^n = 1 + t + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2}) t^n = 1 + t + \sum\limits_{n=2}^{\infty} f_{n-1} t^n + \sum\limits_{n=2}^{\infty} f_{n-2} t^n =$

$= 1 + t \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{n-1} t^{n-1} + t^2 \sum\limits_{n=2}^{\infty} f_{n-2} t^{n-2} = 1 + tF(t) + t^2 F(t) \Rightarrow F(t) = \dfrac{1}{1-t-t^2}$ □

1.12.8 Теорема 17

$$\forall n \geq 0 \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

Доказательство.

$t^2 + t - 1 = 0$

$t_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$t_2 = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$

$$F(t) = \frac{-1}{(t-t_1)(t-t_2)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{t-t_2} - \frac{1}{t-t_1} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}t_1} \left(\frac{1}{1-\frac{t}{t_1}} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}t_2} \left(\frac{1}{1-\frac{t}{t_2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}t_1} \left(1 + \frac{t}{t_1} + \frac{t^2}{t_1^2} + \ldots \right) - \frac{1}{\sqrt{5}t_2} \left(1 + \frac{t}{t_2} + \frac{t^2}{t_2^2} + \ldots \right)$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{t_1^{n+1}} - \frac{1}{t_2^{n+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{t_2^{n+1} - t_1^{n+1}}{t_1^{n+1} \cdot t_2^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} (t_2^{n+1} - t_1^{n+1}) =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{(5)}} \left(\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{(5)}} \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$ □

1.12.9 Определение

Линейное однородное рекуррентное соотношение порядка k для последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ выглядит:
(4) $\quad a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + \ldots + p_k a_n = 0, \quad p_k \neq 0.$
Если последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет (4) $\forall n$ она наз-ся однородной возвратной последовательностью порядка k.
$f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0 \Rightarrow \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ - однородная возврат. послед. порядка 2.

1.12.10 Теорема 18

Если последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет (4) $\forall n$, $n \geq 0$, то производящая ф-ия $A(T)$ этой последовательности имеет вид:
$A(t) = \dfrac{C(t)}{K(t)}$, где $K(t) = 1 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots + p_k t^k$, $C(t)$ - многочлен степени, не превосходящей $k-1$.

Доказательство.

Пусть $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

$$\begin{aligned} C(t) = A(t) \cdot K(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \quad & \ldots \quad + a_k t^k + a_{k+1} t^{k+1} + \\ + \ldots + a_0 p_1 t + a_1 p_1 t^2 + \quad & \ldots \quad + a_{k-1} p_1 t^k + a_k p_1 t^{k+1} + \\ + \ldots + a_0 p_2 t^2 + \quad & \ldots \quad + a_{k-2} p_2 t^k + a_{k-1} p_2 t^{k+1} + \\ + \quad & \ldots \quad + a_0 p_k t^k + a_1 p_k t^{k+1} + \ldots \end{aligned}$$

(Все столбцы после первого многоточия будут зануляться, а до первого в сумме образуют $C(t)$.) $\square$

1.12.11 Определение

$f(t) = t^k + p_1 t^{k-1} + \ldots + p_k$ - характеристичесий многочлен для (4).
$f(t) = (t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_s)^{r_s}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, \sum r_i = k$
$K(t) = t^k f\left(\frac{1}{t}\right) = t^k \prod\limits_{i=1}^{s} \left(\frac{1}{t} - \lambda_i\right)^{r_i} = \prod\limits_{i=1}^{s} (1 - t\lambda_i)^{r_i}$
$A(t) = \dfrac{C(t)}{\prod\limits_{i=1}^{s} (1-t\lambda_i)^{r_i}} = \sum\limits_{i=1}^{s} \sum\limits_{j=1}^{r_i} \dfrac{B_{ij}}{(1-t\lambda_i)^j}$
$(1-t\lambda_i)^{-j} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{-j}{n} (-\lambda_i t)^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-j)(-j-1)\ldots(-j-n+1)}{n!} (-1)^n \lambda_i^n t^n =$
$= 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{j(j+1)\ldots(j+n-1)}{n!} \lambda_i^n t^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{j+n-1}{n} \lambda_i^n t^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{j+n-1}{j-1} \lambda_i^n t^n$
$A(t) = \sum\limits_{i=1}^{s} \sum\limits_{j=1}^{r_i} B_{ij} \left(1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{j+n-1}{j-1} \lambda_i^n t^n\right) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{i=1}^{r_i} \lambda_i^n \sum\limits_{j=1}^{s} B_{ij} \binom{j+n-1}{j-1}\right) t^n.$
При этом $\binom{j+n-1}{j-1}$ - многолчен степени, не прев. $n-j+1$.

1.12.12 Теорема 19

Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ - линейная, однородная, возвратная последовательность, удовлетворяющая (4). Тогда
$a_n = \sum\limits_{i=1}^{s} Q_i(n) \lambda_i^n$, где $\lambda_1, \ldots \lambda_s$ - корни харак. мног. кратного $r_1, \ldots, r_s$ соответственно.
$Q_i(t)$ - многолчен степени, не превосходящей $r_i - 1$, который находится из начальных условий.

1.12.13 Следствие 1

Если характер. маногочлен имеет только простые корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, то $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \ldots + c_k\lambda_k^n$.

1.12.14 Пример 0

Применим это к числам фиббоначи: $f_1: \quad \lambda^2 - \lambda - 1 \quad \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$f_n = c_1 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2 \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

1.12.15 Пример 1

Найти общее решение $a_{n+1} + 2a_{n+2} + a_n = 0$
Решение: характер. многочлен $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$
$(x^2+1)^2 = 0 \quad x_1 = -i, \quad x_2 = i$
$a_n(c_1 + c_2 n)(-i)^n + (c_3 + c_4 n)i^n$.

1.12.16 Следствие 2

Если характер. маногочлен имеет 1 корень λ кратности k, то $a_n = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + \ldots + c_k n^{k-1})\lambda^n$.

1.12.17 Определение

Линейное неоднородное рекуррентное соотношение для послед.$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$:
(5) $\quad a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + \ldots + p_k a_n = f(n)$
$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ - удовлетворяет (5) $\forall n \geq 0 \Rightarrow$ линейная неоднородная возвратная последовательности.
Общее решение неоднородного линейного рекуррентного соотношения равно общему решению однородного + частное решение неоднородного.
Напр., если какой-нить $f(n) = p(n) \cdot \lambda^n$, то пытаемся найти частное решение в виде $(c_1 + c_2 n + \ldots + c_{q+1} n^q)\lambda^n$, где q – степень $p(n)$.

1.12.18 Упражнение

$\{S(n,m)\}_{n=0}^{\infty} \Rightarrow A(t) = \dfrac{t^m}{(1-t)(1-2t)\dots(1-mt)}$
$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ - быстро растёт, $\{\frac{a_n}{n!}\}_{n=0}^{\infty}$

1.12.19 Определение

Степенной ряд $\widehat{A}(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{t^n}{n!}$ - экспоненциальная производящая ф-ия послед. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

1.12.20 Лемма 16

Пусть $\widehat{A}(t)$ - экспоненциальная производящая ф-ия послед. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, Тогда:

1. $t \cdot \widehat{A}(t)$ - эксп. производящая ф-ия $\{n \cdot a_n\}_{n=0}^{\infty}$
2. $\widehat{A'}(t)$ - эксп. производ. ф-ия послед. $\{\cdot a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$
3. $\int_0^t \widehat{A}(t)$ - экспон. производ. ф-ия послед. $0, a_0, a_1, \dots$

Доказательство. Упражнение. □

1.12.21 Лемма 17

Пусть $\widehat{A}(t), \widehat{B}(t)$ - экспоненциальная производящая ф-ия послед. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ соответ. $\widehat{A}(t)\widehat{B}(t)$ - эксп. пр. ф-ия послед. $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$
$c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$. Найдем $\widehat{A_m}(t)$ для $\{s(n,m)\}_{n=0}^{\infty}$
$\widehat{A_m}(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} s(n,m)\dfrac{t^n}{n!}$
$\sum\limits_{m=0}^{\infty} \widehat{A_m}(t) \cdot x^m = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sum\limits_{m=0}^{\infty} s(n,m) \cdot x^m)\dfrac{t^n}{n!}$
$([x]_n = \sum\limits_{m=0}^{n}(s(n,m) \cdot (-1)^{n-m} x^m)$
$x(x+1)\dots(x+n-1) = [-x]_n \cdot (-1)^n (= \sum\limits_{n=0}^{\infty} s(n,m) x^m)$
Возвращаемся к выводам двумя строками выше: $= \sum\limits_{n=0}^{\infty}[-x]_m(-1)^n \dfrac{t^n}{n!} = (1-t)^{-x} = e^{-x\log(1-t)} = e^{x\cdot\log(\frac{1}{1-t})} =$
$\sum\limits_{m=0}^{\infty}(\log(\dfrac{1}{1-t}))^m \dfrac{x^m}{m!}$
$\widehat{A_m}(t) = \dfrac{(\log\frac{1}{1-t})^m}{m!}$.

2 Теория графов

2.1 Опеределения

2.1.1 Определение

V - непустое конечное мно-во.
$V^{(2)}$ - всех двухэлементные подмно-ва мно-ва V.

(V, E), $E \subseteq V^2$ - называется граф (обыкновенный граф, простой граф, *etc*).

V - вершнины, E - рёбра.
$G = (V, E) \quad VG$ - мно-во вершни, EG - мно-во рёбер.
$|VG|$ - порядок графа.
$|G| = |VG| = n \Rightarrow G$ - n-граф
$|G| = n, \quad |EG| = m, \quad G\ -\ (n, m)$ - граф.

2.1.2 Ещё пара определений

мультграф - пара (V, E), где V - непустое конечное мно-во, E - семейство (могут повторяться элементы) элементов из $V^{(2)}$.
псевдограф - пара (V, E), где V - непустое конечное мно-во, E - семейство нупорядоченных пар элементов из V, не обязательно различных.

2.1.3 Определения

Две вершины u и v **смежные**, если $\{u, v\} \in E$ и **не смежные** в противном случае.
Если $e = \{u, v\} \in E \Rightarrow$ ребро e соединяет u и v. $e = uv = vu$.
Два **ребра смежные**, если они имеют общий конец.
Ребро e и вершина v инцедентны, если v является концом e.

2.1.4 Адекватные примеры графов

1. K_n - полный граф из n вершин.
   $|VK_n| = n, \quad K_n = (V, V^{(2)})$
   $|EK_n| = \binom{n}{2}$.
2. O_n - пустой граф на n вершинах.
   $O_n = \{V, \varnothing\}$ (нулевой, вполне несвязный граф.
3. P_n - простая цепь на n вершни
4. C_n - простой цикл на n вершин.
5. Граф Петерсена
6. Q_n - n-мерный куб.
   VQ_n - мно-во всевозможных двоичных слов длины n. $VQ_n = \{0, 1\}^n$
   EQ_n - две вершины смежные, если они различаются ровно одной позицией.

2.1.5 o_O

$G = (V, E), \quad G' = (V', E')$.
G и G' изоморфны ($G \cong G'$), если $\exists$ биекция $\varphi : V \to V' : \quad uv \in E \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E'$.
φ - изоморфизм графов G и G'. Если $G = G'$, то φ - автоморфизм графа (V и V' совпадают).

2.1.6 Определение

Степень вершины v - число рёбер, инцедентных с вершиной v. $\deg_G(v) = \deg(v)$.
Окружение вершины v - это мно-во всех вершин, смежных с v. $N_G(v) = N(v)$.
Для обыкновенного графа $\deg(v) = |N(v)|$.
Если $\deg(v) = 0$, то v - **изолировнная**.
Если $\deg(v) = 1$, то v - **висячая**. А ребро, инцедентное висячей вершине, тоже **висячее**.

2.1.7 Лемма 1 (о рукопожатиях)

Пусть G - произвольный граф, тогда $\sum\limits_{v \in VG} \deg_G(v) = 2|EG|$.

Доказательство. К. О. □

2.1.8 Следствие 1

Любой граф содержит чётное число вершин нечётной степени.

2.1.9 Определение

Если в G, $\forall v \in VG \quad \deg(v) = K \Rightarrow G$ - k-регулярный граф.
Полный граф является $(n-1)$-регулярный, граф Петерсена является 3-регулярным графом, Q_n - n-регулярным.

2.2 Подграфы, операции над графами

Граф H называется подграфом графа G, если $VH \subseteq VG$, $EG \subseteq EG$.
Если $VH = VG$, то H - оставный подграф.

2.2.1 Определения подграфов

Пусть $U \subseteq VG \quad D = \{uv \mid u, v \in U, \quad uv \in EG\ \}$.
Тогда $G(U) = (U, D)$ - подграф, порождённый мно-вом вершин U.
Пусть $D \subseteq EG, \quad U$ - мно-во концевых вершин рёбер из D.
Тогда $G(D) = (U, D)$ - подргаф, порождённый мно-вом рёбер D.

2.2.2 Определения операций

Пусть $v \in VG$, $G - v$ - граф, получающийся из G удалением вершинки v и всех рёбер, ей инцедентных. $e \in EG$, $G - e$ - удаление ребра. $V(G - e) = VG$, $E(G - e) = EG \setminus \{e\}$.
Если $uv \notin EG$, $u, v \in VG \quad G + uv = (VG, EG \cup \{uv\})$.
Граф H называется объединением графов G и F, если $VH = VG \cup VF$, $EH = EG \cup EF$, будем обозначать $H = G \cup F$.
Если $VG \cap VG \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad G \cup F$ - дизъюнктивное объедиение.
Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$.
Произведение $G = G_1 \times G_2$ называется $G = (V_1 \times V_2, E)$.
(v_1, v_2) смежные с $(u_1, u_2) \quad \Leftrightarrow \quad$ или $(v_1 = v_2, \quad u_1, u_2 \in EG_2)$ или $(u_1 = u_2, \quad v_1, v_2 \in EG_1)$.

2.2.3 Лемма 2

$Q_1 = K_2$, $\forall n \geq 2 \quad G_n = G_{n-1} \times K_2$

Доказательство. упражнение :(. быть может, картинкой?.. □

2.2.4 Следствие

$Q_n = Q_k \times Q_{(n-k)}$

2.2.5 тра-ля-ля

Дополнение к графу $G = (V, E)$ есть $\overline{Q} = (V, \overline{E})$, где $\overline{E} = \{uv \mid uv \notin E, \quad u, v \in V\}$.
Соединение графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ и $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ - граф $G_1 + G_2$ - дизъюнктное объединения G_1 и G_2 и добавлением ребёр $v_1 v_2 = v_2 \in V_1, v_2 \in V_2$.
Для графа $G = (V, E)$ рёберным графом называется $L(G), \quad VL(G) = EG$, $e_1 e_2 \in EL(G) \Leftrightarrow e_1$ и e_2 смежные в G.

через последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots v_t, e_t, v_{t+1}, \quad \forall i \in \{1, \ldots t\}, e_k = v_i v_{i+1}$ называются маршрутом, соединяющим v_1 и v_t. (v_1, v_{t+1}) - маршрут. t - длина.
Маршрут называется цепным, если все его рёбра различны.

Если в цепи все вершины разные (кроме, возможно, конечной), то такая цепь назывется простой.
Маршрут назывется называется циклическим, если $v_1 = v_t$. Тогад циклическая цепь называется циклом, а циклическая простая цепь называется простым циклом.

2.2.6 Лемма 3

При $v \neq u$ всякий (u, v) маршрут содержит простую (u, v) цепь.

2.2.7 Лемма 4

Всякий цикл содержит простой цикл.

2.2.8 asdf

v и u - связные в G, если $\exists(u, v)$ - простая цепь. G - связный, если $\forall u, v \in VG, \quad u, v$ - связные.
Отноешние связнаости в G - отношение эквивалентности.
$\forall$ кл. экваивалентности - подграф, порождённый веринами этого класса - компоненты связности.
Максимальный по включению вершин и рёбер связный подграф графа G называется компонентной связности графа G.

2.2.9 Лемма 5

Любой граф является дизъюнктным объединением своих компонент связности.

2.2.10 Лемма 6

Для любого графа либо он сам, либо его дополнение является связным.

2.2.11 Лемма 7

Пусть G - связанный граф, $e \in G$.

1. если e принадлежит некоторому циклу нашего графа, $G - e$ - связан.
2. если e не принадлежит никакому циклу, то граф $G - e$ не связан и имеет две компоненты связанности.

Доказательство.

1. $e = vu \in C$ - цикл. C состоит зи vu и (u, v)-цепи.
   $\forall x, y$ в (x, y)-цепи, содержащей ребро e заменим e на (u, v)-цепь. Получим (x, y)-маршрут, не содержащий e.
   x и y связаны в $G - e \Rightarrow G - e$ - связн.
2. $G - e$ - не связан, v и u в разных компонентах связанности: G_v, G_u.
   $\forall x \neq u \quad \exists(u, x)$-цепь в графе G.
   Если e входило в эту цепь, тогда $x \in G_v$, иначе $x \in G_u$.

□

2.2.12 Теорема 1

$\forall(n, m)$-графа с k компонентами связности верны два неравенства: $n - k \leq l \leq \dfrac{(n-k)(n-k+1)}{2}$, при чём обе оценки достижимы.

Доказательство.

верхняя) Пусть G - n-граф с k компонентами связности с максимальным число рёбер. Очевидно, что G - дизъюнктное объединение полных графов ($G = K_{n_1} \cup ... \cup K_{n_k}$). Пусть $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_k$. Покажем, что $n_2 = n_3 = ... = n_k = 1$.
Пусть не так ($n_2 > 1$). Рассмотрим $v \in K_{n_2}$. Рассмотрим граф $G' = (K_{n_1} + v) \cup (K_{n_2} - v) \cup K_{n_3} \cup ... \cup K_{n_k}$ - удалили $n_2 - 1$ рёбёр. Добавили n_1 ребёр. Получили, что в G' добавили больше, чем удалили. Противоречие к предположению в самом начале.
В G у нас $\binom{n-k+1}{2}$ рёбер.

нижняя) Индукция по числу рёбер:

$m = 0$ - всё очевидно, равенство есть.

Пусть $m > 0$ и для всех графов с меньшим число рёбер наше неравенство верно.

Рассмотрим (n,m)-граф G с k комп. связности. Возьмём некоторое $e \in EG$ и безжалостно удалим его: $G_1 = G - e$. G_1 - $(n, m-1)$-граф с k_1 компонентами связности. По лемме 7 имеет, что $k_1 \le k+1$. По индукционному предположению $n - k_1 \le m - 1 \Rightarrow m \ge n - k_1 + 1 \ge n - k + 1 - 1 = n - k$.

Пимер такого графа: $G = O_{k-1} \cup P_{n-k}$.

□

2.2.13 Следствие 2

Пусть G - (n,m)-граф. Если $m > \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$, то G - связный.

Доказательство.
Пусть у G - k компонент связности. Если $k \ge 2$, то по теореме 1 $m \le \binom{n-k+1}{2} \le \binom{n-1}{2}$ - противоречие. □

2.2.14 Определение

Пусть $G = (V, E)$ - связен. $d(v,u)$ - длина кратчейшей (v,u)-цепи, положим $d(v,v) = 0$.

1. $d(v,u) \ge 0, \quad d(v,u) = 0 \Leftrightarrow v = u$
2. $d(v,u) = d(u,v)$
3. $d(u,v) + d(v,w) \ge d(u,w)$

$d(u,v)$ - расстояине меджу u и v.
Эксцентриситет вершины v - $e(v) = \max\limits_{n \in VG} d(v,u)$.
Радиус графа G - $r(G) = \min\limits_{v \in VG} e(v)$. **Диаметр** графа G - $d(G) = \max\limits_{v \in VG} e(v)$.
Вершина $v \in VG \mid e(v) = r(G)$ называется **центральной** вершиной. Мно-во всех центральных вершин - **центр графа**.
Вершина $v \in VG \mid e(v) = d(G)$ называется **периферийной** вершиной.

2.3 Двудольные графы

2.3.1 Лемма 8

$\forall G$ - связного, $r(G) \le d(G) \le 2 \cdot r(G)$.

Доказательство. Пусть $d(u,v) = d(G) > 2r(G)$. Следовательно $\forall t \in VG: \quad d(t,u) > r(G)$ или $d(t,v) > r(G)$, значит радиус меньше, чем должен быть. □

2.3.2 Определение

Граф $G = (V, E)$ - двудольный, если $\exists V(\text{разбиение}) = A \cup B \mid \forall e \in G$ концы этого ребра лежат в разных мно-вах.
$K_{n,m}$ - полный двудольный граф $V = A \cup B$, $|A| = n$, $|B| = m$, $\quad E = \{ev \mid u \in A, v \in B\}$.

2.3.3 Теорема 2 (критерий двудольности)

G - двудольнй $\Leftrightarrow$ в G нет циклов нечётной длины.

Доказательство.

$\Rightarrow$) C - цикл в G. $C = v_1 v_2 v_3 v_4 ... v_{e,v}\, e + 1 = v_1$. $V = A \cup B, \quad v_1, v_3, v_5 ... \in A, \quad v_2, v_4, v_6 \in B$, т.е. все нечётные в A, все чётные B.

$\Leftarrow$) По лемме 5 граф - двудольный $\Leftrightarrow$ все его комп. связности - двудольные. Пусть G - связен, $n > 1$, нет циклов нечётной длины. Докажем, что он - двудольный. Рассмотрим $v \in VG$.
$V = A \cup B$: $v \in A$. $d(v, u)$ - чётно, то $u \in A$, $d(v, u)$ - нечётно, то $v \in B$.
Докажем, что в A и в B нет рёбер.
Предположим, что это не так. $e = uw \in EG$, $u, w \in$ одному мно-ву (A или B). По построение $u, w \neq v$. Рассмотрим кратчаяшие цепи: U - кратчайшая (u, v-цепь, W - кратчайшая (w, v)-цепь. Длины этих цепей имеют одинаковую чётность. Пусть v_1 - последняя, начиная с v, общая вершина цепей U, W, лежащая на U.
(v, v_1) - подцепи цепей U и W имеют одинаковую длину, поэтому (v_1, u)-подцепь цепи U и (v, w)-подцепь цепи W имеют одинаковую чётность длины. Их объединение с ребром uw даёт цикл нечётной длины. Противоречие. Следовательно, граф является двудольным.

$\square$

2.4 Ориентированный граф

2.4.1 Определения

Орграф - это пара $G = (V, D)$, где V - непустое мно-во, а $D \subseteq V \times V$. Элементы V - вершины, элементы D - дуги.
$(v, u) \in D$. vu - выходит из v и входит в u.
Мультиграф, диаграмма.
Если в мультиграфе убрать все ориентации, то получим некоторый псевдограф, который называется основанием орграфа.
Ормаршрут, орцепь, орцикл (контур).
Вершина v достижима из u, если $\exists$ ориентированная (u, v)-цепь.
Орграф G - сильносвязанный, если любая вершинка достижима из любой другой.
Пуст G - орграф, $v \in VG$. Полустепень исхода v обозначается $\deg^+ v$ - кол-во дуг графа, исходящих из вершины v. Полустепень захода v - $\mathrm{deb}^- v$ - кол-во дуг, входящих в v.

2.4.2 Лемма 9 (Орлемма о рукопожатиях)

$\forall$ орграфа $G = (V, D)$: $\displaystyle\sum_{v \in V} \deg^+ v = \sum_{v \in V} \deg^- v = |D|$.

2.5 Матрицы

Граф G - помеченный, если вершины $\{1, ..., n\}$. Помеченные графы G и H равны $\Leftrightarrow VG = VG$, $EG = EH$.
G - помеченный граф, тогда матрица смежности графа G - это $n \times n$ матрица $A = A(G) = (a_{ij})$, определяемая следующим образом:
$a_{ij} = \begin{cases} 1, & ij \in EG \\ 0 & \end{cases}$.
A - бинарная симметричная матрица с нулевой главой диагональю.
Если у нас мультиграф или псевдо граф, то a_{ij} - это кол-во рёбер, соединяющих i и j, петли отмечаются дважды.
Если G - оргаф, то $A(G)$:
$a_{ij} = \begin{cases} 1, & ij \in DC \\ 0 & \end{cases}$.
Матрицы смежности для G - подобны (о чём это?...).

2.5.1 Теорема 3

Пусть $A = (a_{ij})_{n \times n}$ - матрица смежности мультиграфа G. Рассмотрим $A^k = (\gamma_{ij})$, $k \in \mathbb{Z}_+$.
Тогда γ_{ij} - число маршрутов из (i, j)-маршрутов длины k.

Доказательство. Индукция по k:
$k = 1$ - очевидно.

Пусть $k > 1$. По индукционному предположению $^{k-1} = (\beta_{ij})_{n\times n}$, где β_{ij} - число (i,j)-маршрутов длины $k-1$.
$A^k = (\gamma_{ij}) = A^{k-1}\cdot A. \quad \gamma_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{n} \beta_{is}a_{sj}$ - число (i,j)-маршрутов длины k. □

2.5.2 Определение (Кирхгофа матрица)

Матрица Кирхгофа.
$B = B(G) = (b_{ij})_{n\times n}$
$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & ij \in EG \\ 0, & ij \notin EG, i \neq j \\ \deg(i), & i = j \end{cases}.$$

2.5.3 Лемма 10

Алгебрарические дополения всех элементов матриц Кирхгофа равны между собой.

Доказательство. Без доказательства. И хорошо. □

2.5.4 Определение

G - помеченный n-граф, $VG = \{1, ..., n\}$, $EG = \{e_1, ..., e_m\}$.
Матрица инцедентности графа G:
$$I = I(G) = (\alpha_{ij})_{n\times m}, \quad \alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{вершина } j \text{ и ребро } e_i \text{ - инцидентны} \\ 0 \end{cases}$$

Матрица инцидентности для орграфа G, $\quad VG = \{1, ..., n\}$, $DG = \{e_1, ..., e_m\}$, $\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & e_i \text{ выходит из } j \\ -1, & e_i \text{ входит в } j \\ 0 \end{cases}$

G - ориентируем $\forall$ ребра. Полученный орграф - ориентматрица графа G.

2.5.5 Лемма 11

B - матрица Крихгофа графа G, I - матрица инцидентности некоторая ориентация графа G (нумерация с единицы).
Тогда $B = II^T$.

Доказательство.
$I = (\alpha_{ij})$, $I^T = (\alpha_{ij}^T)$
$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}\cdot\alpha_{kj}^T$$
$$i = j: \quad b_{ii} = \sum_{k=1}^{m} (\alpha_{ik})^2 - \text{сумма единичек по тем рёбрам, которые инцидентны } i$$
$$i \neq j: \quad b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}\cdot\alpha_{jk} - \text{получится -1, если найдётся ребро, инцидентное } i \text{ и } j.$$
□

2.6 Деревья

2.6.1 Определение

Ациклический граф - **лес**. Ациклический связный граф - **дерево**.

2.6.2 Теорема 4 (Характеризация деревьев)

(n, m)-граф G. Следующие условия эквивалентны:

1. G - дерево.
2. G - связный, $m = n - 1$
3. G - ациклический, $m = n - 1$
4. В графе G любые 2 вершины связаны одной простой цепью.
5. G - ациклический и добавление одного нового ребра приводит к появлению ровно одного простого цикла.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2)$ Докажем, что в любом (n, m)-дереве $m = n - 1$. Индукцией по m:
$m = 0 \Rightarrow n = 1$.
Пусть G - произвольное (n, m)-дерево и для всех деревьев с меньшим числом рёбер наше равенство выполняется.
Возбмём некоторое ребро $e \in EG$. e не принадлежит никакому циклу, т.к. в нашем графе их нет $\overset{\text{по лемме 7}}{\Rightarrow}$ в $G - e$ ровно 2 компонентны связности G_1 и G_2 - деревья (n_1, m_1) и (n_2, m_2). По индукционному предположению $m_1 = n_1 - 1$, $m_2 = n_2 - 1$. Тогда для нашего графа имеем $m = m_1 + m_2 + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1$.

$2 \Rightarrow 3)$ Пусть в графе G есть цикл, рассмотрим некоторе ребро e из этого цикла $\overset{\text{по лемме 7}}{\Rightarrow}$ $G - e$ - связан. и является $(n, n - 2)$-графом, что противоречит первой теореме.

$3 \Rightarrow 4)$ Докажем, что G - связен. G - ациклический - лес. Каждая компонента связности $G_1, ..., G_k$ - дерево. Т.к. доказано, что из $1 \Rightarrow 2 (\forall i\, G_i)$ - (n, m)-граф, то $m_i = n_i - 1$. $n - 1 = m = m_1 + ... + m_k = n_1 + ... + n_k - k = n - k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$ граф связен $\Rightarrow \forall u, v \quad \exists (u, v)$ - цепь.
Пусть $\exists u, v$ - в G есть две различные (u, v)-простоые цепи L_1 и L_2. Пусть x - последняя вершина общего начала путей L_1 и L_2 начиная с u, y - следующая на цепи $L_1 \Rightarrow G - xy$ - остаётся связным $\overset{\text{по лемме 7}}{\Rightarrow}$ xy принадлежит некоторому циклу $\Rightarrow$ противоречие с ацикличностью.

$4 \Rightarrow 5)$ В любом цикле 2 вершины соединены не менее 2 различными путями $\Rightarrow$ в G нет циклов. Пусть $u, v \in VG$. $uv \notin EG$, тогда единственная (u, v)-цепь в G вместе с ребром uv даёт единственный цикл

$5 \Rightarrow 1)$ Докажем, что G - связный. От противного: пусть G - не связен. Пусть u и v в разных компонентах связности $\Rightarrow G + uv$ не имеет циклов (по лемме 7).

□

2.6.3 Следствие 3

В любом дереве порядка $n \geq 2$, то в нём имеется не менее 2 висячих вершин. (т.е. вершин степени 1).

Доказательство. G - (n, m)-дерево, $n \geq 2$. Тогда по лемме о рукопожатиях $\sum\limits_{v \in VG} \deg(v) = 2m = 2n - 2 \Rightarrow$ по принципу Дирихле $\exists$ 2 вершины степени 1. □

2.6.4 Теорема 5

Центр любого дерева состоит из одной или двух смежных вершин.

Доказательство.
$n = 1$ - очевидно.
$n = 2$ - аналогично.
Пусть T - дерево порядка $n \geq 2$. Рассмотрим дерево T', которое получается из T удалением всех висячих вершин.
$\forall v \in T' \quad \mathrm{e}_{T'}(v) = \mathrm{e}_T(v) - 1 \Rightarrow$ центра T и T' совпали.
Продолжаем, пока порядок дерева > 2. □

2.6.5 Определение

G - связный. Оставной подргграф графа G, явля-ся деревом, называется, как ни странно, оставным деревом графа G.
Оставной подграф графа G, являющийся дизъюнктным объединением оставным деревьев его компонент связности - **остов** графа G.

2.6.6 Лемма 12

Число рёбер произвольного (n, m)-графа G с k компонентами связности, которое надо удалить, чтобы получить остов нашего графа G не зависит от последовательности удаления и равно $m - n + k$.

Доказательство. через кол-во рёбер в дереве. □

2.6.7 Лемма 13

Каждый ациклический подграф графа G содержится в некотором его оставе.

Доказательство. Пусть G связен, H - ациклический подграф графа G. Если H - не остов, то рассмотрим H' - H с добавленными вершинами, не покрытми H, тогда H' - оставный, ациклический. Если H' не явялется оставным $\Rightarrow$ не связен.
Пусть H_1 - комп. связности графа H. Тогда $\exists u, v \in VG \quad u \in VH_1,\ v \notin VH_1,\ uv \in EG$.
Тогда $H' + uv$ - ациклический подграф графа G, имеющий меньшее число компонент связности, чем H'.
Повторяем до тех ор, пока не остаентся одна компонента связности $\Rightarrow$ остов G, содержащий граф H. □

2.6.8 Лемма 14

Если S и T - остовы графа G, то $\forall e_1 \in ES \quad \exists e_2 \in ET : \quad S - e_1 + e_2$ - остов графа G.

Доказательство. Пусть G - связен. Граф $S - e_1$ имеет две компоненты связности A и B. Но T - связен $\Rightarrow \exists$ ребро $e_2 \in ET$ с концами в A и B $S - e_1 + e_2$ - остов G. □

2.6.9 Теорема 6 (Кирхгоф, 1847)

Число ост. деревьев в связном графе G порядка $n \geq 2$ равно алгебрарическому дополнению каждого элемента матрицы Кирхгофа $B(G)$.

Доказательство. Доказательства есть, но нам его учить не надо *YAHOO*. □

2.6.10 Следствие 4

При $n > 1$ число остовных деревьев в полном графе K_n равно n^{n-2}.

Доказательство. тут должны быть матрицы, которые мне было лень набирать... □

2.6.11 Теорема 7 (Кэли, 1897)

Число помеченнымх деревьев подрядка $n \geq 2$ равно n^{n-2}.

2.6.12 Определение (Код Прюфера)

Пусть T - помеченное дерево $VT = \{1, ..., n\}$. Сопоставим $a = (a_1, ..., a_{n-1})$:

1. В дереве T находим висячую вершинку v с наименьшим номеров, тогда a_1 - номер вершины, смежной с v. $T_1 = T - v$.
2. $\forall i \quad 2 \leq i \leq n-1 \quad$ в T_{i-1} находим висячую вершинку v_i с наименьшим номеров $\Rightarrow a_i$ - номер её соседа, $T_i = T_{i-1} - v_i$.

Сво-ва a:

1. $a_{n-1} = n$

2. $a_i \in \{a_1, ..., a_n\} \quad \forall i : 1 \leq i \leq n-2$

2.6.13 Теорема 8 (Код Прюфера)

Если $a = (a_1, ..., a_n)$, обладает сво-ми 1 и 2, то существует и единственным помеченным деревом T, для каждого a - код Прюфера.

2.7 Связность

Число вершин. связности графа G: æ(G) – наименьшее число вершин, удаление которых приводит либо к несвязности G, либо к одновершинности.
æ$(K_n) = n - 1$ æ$(C_n) = 2$
Связный граф k-связен, если удаление любых $(k-1)$ вершины оставляет G связным и неодновершинным.
Вершинка $v \in VG$ называется точкой сочленения графа G, если $G - v$ имеет больше компонент связности, чем G.

2.7.1 Теорема 9 (характеризция точек сочленения)

G – связен, $v \in VG$. Следующие утверждения эквиваленты:

1. v – точка сочленения G.

2. существует разбиение $VG - \{v\}$ на два множества A и B: $\forall x \in A, \forall y \in B$ (x, y)-простая цепь проходит в G через v.

3. $\exists x, y \in VG : \quad x, y, v$ – различные вершины и каждая простоая (x, y)-цепь проходит через v.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2)$ $G - v$ – не связный. A – одна компонента, B – остальные. значит, для любой пары вершин из эти мно-в не существует простой цепи, следовательно в G любая цепь проходит через v.

$2 \Rightarrow 3)$ очевидно.

$3 \Rightarrow 1)$ очевидно.

$\square$

2.7.2 Определение рёберной связности

$\lambda(G)$.
Ребро графа G называется мостом, если в $G - e$ больше комп. связности, чем в G. Вершинки, инцидентные мосту, являются точками сочленения.

2.7.3 Теорема 10 (характеризция мостов)

G – свзяный, $|VG| > 1$, $e \in EG$.

1. e – мост

2. есть разбиение $VG = A \cup B : \quad \forall x \in A, \forall y \in B$ простоая (x, y)-цепь проходит через e.

3. есть пара вершин, что любая простая цепь проходит через e.

4. e не принадлежит никакому циклу.

Доказательство. 1,2,3,1 – аналогично пред. 1,4,1 - лемма 7. $\square$

2.7.4 Теорема 11 (о числах связности)

$\delta(G) = \min(\deg(v))$ по всем v.
Для любого $G \quad æ(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

Доказательство.
оценка сверху: берём нашу вершинку с минимальной степенью и удаляем все смежные ей рёбра.
оценка снизу: для несвязного и для графа с мостом (где всё равно 1) – очевидно.
$E_1 \subseteq EG, \quad |E_1| = \lambda, \quad G - E_1$ – не связен. Пусть $e \in E_1$, $E_1' = E_1 - \{e\}$. для каждого ребра из E_1' выберем один конец и удалим его. Если граф без этой вершины не связен, то число вершинной связности меньше, нежели рёбреной. Если он по прежнему связен, то e – мост. для моста случай рассмотрен выше. □

2.7.5 Определение

Граф двусвзяен $\Leftrightarrow$ граф связен и не имеет точек сочленения.

2.7.6 Лемма 15

В двусвязном графе для любых трёх вершин есть простая цепь из первой во вторую, не проходящая через третью.

2.7.7 Теорема 12 (характеризация двусвязных графов

G – связный, $n > 2$:

1. G – двусвязный
2. любые две вершины принадлежат простому циклу
3. любая вершина и любое ребро принадлежат цилку
4. любые 2 ребра принадлежат циклу
5. для любых 2 вершин и для любого ребра существует простоая цепь из одной в другую, которая проходит через это ребро
6. для любых 3 вершин есть простая цепь из одной в другую, которая проходит через третью.

2.7.8 Определение блока

Блок – максимальный по включению вершин и рёбер подграф без точек сочленения.
блок – либо ребро, либо двусвязный граф.

2.7.9 Лемма 16

Любые 2 блока имеют не более одной общей вершины.

2.7.10 Лемма 17

Если блок содержит вершины и рёбра, то он содержит $\forall(u, v)$ - цепь графа G.

2.7.11 Лемма 18

Если вершина v входит более, чем в один блок графа G, то v - точка сочленения графа G

2.7.12 парам-пам-пам

$B = \{B_1, B_2, B_3\}$ - мно-во всех блоков графа G.
$C = \{c_1, ..., c_l\}$ - мно-во точек сочленения графа G.
$bc(G) = (B \cup C, M) \quad M = \{B_iC_j \mid B_i \in B,\, S \in C,\, C_j \in C,\, C_j \in B_i\}$.

2.7.13 Лемма 19

Если G - связен, то $\mathrm{bc}(G)$ - дерево.

Доказательство. G - связен, то $\mathrm{bc}(G)$ - связен.
Пусть циклов нет, тогда в $\mathrm{bc}(G)$ есть цикл. $C_{j1}, B_{i1}, C_{j2}, B_{j2}, ..., C_{jk}, B_{ik}, C_{j1}$.
B_{j_s} содержит C_j и C_{j_s+1} по лемме 17. B_{js} содержит $(C_{js}, C_{js_1}$ - цепь.
Обощения (объединения) $\Rightarrow$ цикл в G. Этот цикл содержит по кр. мере 2 вершины из каждого блока $\overset{\text{Лемма 17}}{\Rightarrow}$ весь цикл содержит все вершины из блоков $\Rightarrow$ все блоки содержит 3 общих вершины $\overset{\text{Лемма 16}}{\Rightarrow}$ противоречие. $\square$

2.7.14 Определение

$S \subseteq VG$, S - разделяет несмежные вершины u и v, если в графе $G - S$ вершины u и v принадлежат разным компонентам связности.
Дву (u, v)-цепи не пересекаются, если нет общих вершин, кроме конечных.

2.7.15 Теорема 13 (Менгер, 1927)

Минимальное число вершин, разделяющих две несмежные вершины u и v равно максимальному числу попарно непересекающихся простых (u, v)-цепей.

Доказательство. Наибольшее число попарно непересекающихся простых (u, v)-цепей не больше минимального числа вершин, разделяющих u и v. Докажем, что если наименьшее число вершин, разделяющих u и v в графе G равно k, то существует k попарно непересекающихся простых цепей.
При $k = 1$ - очевидно.
Пусть для некоторого $k > 1$ – неверно. Пусть t – наименьшее такое k. F - граф с наименьшим числом вершин, для которого не выполненено условие (которое после слова "доказать") для t.
Бдем удалять из F рёбра до тех пор, пока не получим некоторый граф G такой, что $\forall e \in EG$ для разделения u и v в графе G надо t вершин, а в графе $G - e$ надо $t - 1$ вершину.
Т.о. имеется G и t такие, что теорема верна для

1. $\forall k < t$.
2. $\forall$ графа с числом вершин, меньшим, чем $|VG|$.
3. $\forall$ графа $G - e\, \forall e \in EG$.

(док-во ниже) $\square$

2.7.16 Утверждение 1

В гарфе G нет вершин, которые одновременно смежны с u и v.

Доказательство. Пусть w смежно с u и v. Тогда в $G - w$ для разделения u и v достаточно $t - 1$ вершины по пункту 2 в $G - w$ существует $t - 1$ попарно непересекающихся простых (u, v)-цепей. Добавляем цепь $u, w, v \Rightarrow t$ попарно непересекающихся простых (u, v) цепей в графе G. Противоречие с выбором графа G. $\square$

2.7.17 Утверждение 2

Любое мно-во вершин W, разделяющих u и v, $|W| = t$ смежно либо с u, либо с v.

Доказательство. Цепь, соединяющую u с нек...

$\square$

Доказательство. (продолжение)
Рассмотрим некоторе $e = xy \in EG$. По условию 3 в $G - e$ существует $t - 1$ вершина, разделяющая u и v.
В $(G - S_e)$ существует (u, v)-цепь и каждая точка цепи содержит ребро e.
$(**) \forall e = xy :\Rightarrow$ 1) $x, y \notin S_e$
2) если $x \neq u, x \neq v$, то $S_e \cup \{x\}$ разделяет u и v в G.
Рассмотрим кратчайшую (u, v)-цепь в графе G. $P = u, x_1, x_2, x_3, ..., x_m, v$.
Рассмотрим $e = x_1 x_2$. Из утвержджения 1 $x_2 \neq v$.

$S_e = \{y_1, ..., y_{t-1}\}$
$W_1 = S_e \cup \{x_1\}$ по (**) разделяет u и v. По утверждению 1, $x_1, v \notin EG$. По утверждению 2, W_1 смежно с u. $\{y_1, ..., yt-1\}$ смежно с u и не смежно с v.
$W_2 = S_e \cup \{x_2\}$ по (**) разделяет u и v. По утверждению 2 x_2 смежно с u. Противорчеие с выбором кратчайшей цепи $\square$

2.7.18 Теорема 14 (Уитни, 1932). Следстиве из предыдущего

Граф G является k-связным $\Leftrightarrow$ любая пара несовпадающих вершин соединены по карйней мере k непересекающимися цепями.

2.8 Независимость и покрытие

Мно-во вершин $W \subseteq VG$ называется **независимым**, если $\forall w, u \in W \quad uw \notin EG$.
Независимое мно-во **тупиковое (максимальное)**, если оно не является собственным подмножеством другого независимого мно-ва.
Независимое мно-во наибольшей мощности - **наибольшее** назависимое мно-во. Мощность такого мно-ва называется **числом нзависимости** ($\alpha_0(G)$).

2.8.1 Теорема 15 (Оценка числа независимости)

$$\forall G \quad \alpha_0(G) \geq \sum_{v \in VG} (1 + \deg(v))^{-1}$$

Доказательство. Пусть $G = K_n$. Тогда $\alpha_0(K_n) = 1$.
$\sum\limits_{v \in VG} n^{-1} = \dfrac{n}{n} = 1.$
Индукция по числу вершин для $G \neq K_n$:
$|VG| \leq 2$ - всё очевидно.
Пусть $|VG| = n \geq 3$, для любого графа с меньшим число вершин теорема верна, $G \neq K_n$.
Выбираем x - вершинка G наименьшей степени. Т.к. $G \neq K_n$, то $x \cup N(x) \neq VG$.
$G' = G - x - N(x)$. По индукционному предположению в G' : $\alpha_0(G') \geq \sum\limits_{v \in VG'} (1 + \deg(v))^{-1}$.
Пусть $M' \subseteq VG'$, M' - независимо в G', $|M'| = \alpha_0(G')$.
$x \cup M'$ - независимо в $G \quad \Rightarrow \quad \alpha_0(G) \geq |x \cup M'| = \alpha_0(G') + 1$.
$\forall v \in VG' \quad \deg_G(v) \geq \deg_{G'}(v)$
$$\sum_{v \in VG'} (1 + \deg_{G'} v)^{-1} \geq \sum_{v \in VG'} (1 + \deg_G v)^{-1}$$
$\forall v \in N(x) \quad \deg_G(v) \geq \deg_G(x)$
$$\sum_{v \in N(x)} (1 + \deg_G(v))^{-1} \leq \sum_{v \in N(x)} (\deg_G(x) + 1)^{-1} = \frac{\deg_G(x)}{\deg_G(x) + 1}$$
Берём неравенства 1 и 3 строчками выше и подставляем их куда-то в начало:
$$\alpha_0(G) \geq 1 + \sum_{v \in VG'} (1 + \deg_{G'}(v))^{-1} \geq \frac{\deg_G(x) + 1}{\deg_G(x) + 1} + \sum_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} = \frac{\deg_G(x)}{1 + \deg_G(x)} + (1 + \deg_G(x))^{-1} + \sum_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} \geq \sum_{v \in N(x)} (\deg_G(v) + 1)^{-1} + (1 + \deg_G(x))^{-1} + \sum_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} = \sum_{v \in VG} (1 + \deg_G(v))^{-1}$$ $\square$

2.8.2 Следствие 5

Пусть $d = \dfrac{1}{|VG|} \sum\limits_{v \in VG} \deg(v)$. Если $|VG| = n$, то $\alpha_0(G) \geq \frac{n}{1+d}$

Доказательство. С помощью неравенство Коши-Буняковского:
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{1/2} b_i^{1/2} \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i)^{1/2} + (\sum_{i=1}^{n} b_i)^{1/2}$$
$a_i = 1 + \deg(v_i)$
$b_i = (1 + \deg(v_i))^{-1}$

Подставляем, попутно возводя в квадрат: $n^2 \le \sum_{i=1}^{n}(1+\deg(v_i) \cdot \sum_{i=1}^{n}(1+\deg(v_i)^{-1}$

$n \le (d+1)\sum_{i=1}^{n}(1+\deg(v_i))^{-1} \Rightarrow \dfrac{n}{d+1} \le \alpha(G)$ по т. 15. □

2.8.3 Определение

Вершина покрывет вёбра, инциндентные ей. Мно-во вершин, покрывающих, все рёбра - **покрытие** (вершинное покрытие).
Покрытие W - тупиковое (минимальное), если $\forall V \subset W$, V - не покрытие. Покрытие наименьшей мощности - наименьшее покрытие и его мощность обозначается $\beta_0(G)$ - число покрытия графа G.

2.8.4 Лемма 20

Мно-во U вершин графа G является независимым $\Leftrightarrow VG \setminus U$ - покрытие.

Доказательство. От противного сначала в одну, потом в другую сторону. □

2.8.5 Теорема 16

Для любого графа G: $\alpha_0(G) + \beta_0(G) = |VG|$.

2.8.6 тра-ля-ля

Подмно-во вершин графа G называется кликой, если все вершины попарно смежные.

2.8.7 Лемма 21

Подмно-в вершин графа G - кликой $\Leftrightarrow$ оно является независимым мно-вом в $\overline{G}$ (дополнение графа).

2.8.8 Определение

Мно-во попарно несмежных рёбер называется **паросочетанием** (независимым мно-ом рёбер). Тупиковое и наибольшее паросочетнаия определяются аналогично вершинам и обозначается $\alpha_1(G)$.
$\alpha_1(G) = \alpha_0(L(G))$ (по опред. рёберного графа(?))
$\alpha_1(G) \le \frac{|VG|}{2}$

Мно-во рёбер, покрывающих все вершин - рёберное покрытие. Тупиковое и наименьшее рёберное покрытие определяются аналогично. Обозначается $\beta_1(G)$.

2.8.9 Теорема 17 (Галлан, 1959)

Для любого графа G порядка n без изолированных вершин верно $\alpha_1(G) + \beta_1(G) = n$.

Доказательство. Пусть $\alpha_1 = \alpha_1(G)$, $\beta_1 = \beta_1(G)$
Докажем: $\alpha_1 + \beta_1 \le n \quad \alpha_1 + \beta_1 \ge n$

1. Пусть M - наибольшее паросочетание в G. Пусть V' - мно-во вершин, не покрытых M.
   Либо V' - пусто, либо V' - независимое мно-во вершин. Для каждой вершины из V' выберем ребро, инциндентне ей. получаем E'. (если $V' = \varnothing \Rightarrow E' = \varnothing$).
   Поскольку V' - независимо, то $|E'| = |V'| = n - 2 \cdot \alpha_1$.
   $E' \cup M$ - рёберное покрытие $\beta_1 \le |E' \cup M| = |E'| + |M| = n - 2\alpha_1 + \alpha_1 = n - \alpha_1$.

2. Пусть P - наименьшее рёберное покрыти графа G. $G' = G(P)$. В G' нет циклов (собсна, очевидна). Нет даже цепей длины 3 (аналогична). Получаем, что G' - есть.
   Каждая компонента связности графа G' - дерево. Пусть t компонент связности и число рёбер $k_1, k_2, ..., k_t$.
   В каждой компоненте выберем по одному ребру $\Rightarrow$ получим паросочетания M. $|M| = t$.
   Имеем, $t \le \alpha_1$. Получаем, что $n = \sum_{i=1}^{t}(k_i+1) = t + \sum_{i=1}^{t} k_i = t + \beta_1 \le \alpha_1 + \beta_1$.

□

2.8.10 Определение

Совершенное паросочитание - паросочитание, являющееся рёберным покрытием.

2.8.11 Теорема 18

Мно-во рёбер полного графа K_{2n} разбивается на совершенные паросочитания (1-факторизуем).

Доказательство. $V(K_{2n}) = \{v_0, v_1, ..., v_{2n-1}\} \quad E_1 \cup E_2 \cup ... = E_{K_{2n}}$
$E_i = \{v_i v_{2n-1}\} \cup \{v_{i-j} v_{i+j} \mid j = 1, 2...n-1\}$
Упр. доказать, что E_i - паросочитание. $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$. □

2.8.12 Теорема 19

Мно-во рёбер графа Q_n разбивается на совершенные паросочитания

Доказательство. Упражнение. □

2.8.13 Лемма 21

Тупиковое рёберное покрытие является - наименьшее $\Leftrightarrow$ оно содержит наибольшее паросочитание.

2.8.14 Лемма 22

Тупиковое паросочитание является наибольшим $\Leftrightarrow$ оно содержится в наименьшем рёберном покрытии.

2.8.15 Лемма 23

Для всякого графа G: $\alpha_1(G) \leq \beta_0(G)$

2.9 Паросочетания в двудольных графах

2.9.1 Теорема 20 (Кёниг, 1916)

Для любого двудольного графа G: $\alpha_1(G) = \beta_0(G)$.

Доказательство. Пусть G-граф. Докажем, что $\alpha_1(G) \geq \beta_0(G)$.
Обозначин $\beta_0 = \beta_0(G)$
Удаляем рёбра из G пока не получим некоторый граф G' такой, что $\forall e \in EG' \quad \beta_0(G - e) = \beta_0 - 1$.

Докажем утверждение, что в G' нет смежных рёбер.
Пусть это гон и в $\exists e, g \in EG'$: e и g смежны в G', общая вершина v. В графе $G' - e$ существуют вершин. покрытие $S_e \quad |S_e| = \beta_0 - 1$ и концы ребра e не лежат в S_e.
В графе $G' - g$ существует вершинное покрытие S_g и концы ребра g не принадлежат S_g.
Рассмотрим порождённый подграф графа G': $G'' = G'(\{v\} \cup (S_e \setminus S_g) \cup (S_g \setminus S_e))$
$|S_e \cap S_g| = t \quad |VG''| = 1 + 2(\beta_0 - 1) - 2t$
G'' подграф графа $G \quad \Rightarrow \quad G''$ - двудольный.
Пусть A - меньшая доля графа G. $|A| \leq \frac{1}{2}|VG''| = \beta_0 - 1 - t$. A - верш. покрытия графа G''.
Покажем, что $A' = A \cup (S_e \cap S_g)$ - вершинное покрытие графа G'.
Возьмём произвольное ребро. Пусть $h \in EG'$.

1. $h \in \{e, g\}$
   $e, g \in EG'' \Rightarrow e, g$ покрыты мно-ом A, а значит и A'.
2. $h \notin \{e, g\}$
   Тогда h покрывается как S_e, так и S_g.
   (a) $x \in S_g \quad x \in S_e \Rightarrow x \in S_g \cap S_e \Rightarrow$ покр. A'.
   (b) один конец приндалежит $S_e \setminus S_g$, а другой: $S_g \setminus S_e \Rightarrow h \in EG'' \Rightarrow h$ покрывается A.

Следовательно $\beta_0(G') \le |A'| \le |A| + |S_e \cap S_g| \le \beta_0 - 1 - t + t = \beta_0 - 1$ - противоречие с выбором графа G' (противоречие с тем, что существуют 2 смежных ребра).

Граф G' состоит из независимых рёбер. $\beta_0(G') = \alpha_1(G') \quad \beta_0(G) = \beta_0(G') = \alpha_1(G') \le \alpha_1(G)$.
Из леммы 23 следует, что $\beta_0(G) = \alpha_1(G)$. □

2.9.2 Теорема 21 (Кёниг о (0, 1)-матрицах)

Для любой (0, 1)-матриц максимальное число единиц, никакие 2 из которых не стоят в одном столбце и в одной строке, равно минимальному числу строк и столбцов, содержащих все единицы.

Доказательство. Пусть G - двудольный граф, с долями $\{v_1, v_2...v_n\}$, $\{u_1...u_m\}$. Матрица смежности двудольного графа G:
$A(G) = (a_{ij}) \mid a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i u_j \in EG \\ 0, & else \end{cases}$. $\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & A \\ \hline A^T & 0 \\ \hline \end{array}$
Биекция между двудольным графом с долями мощности n и m и мно-ом (0, 1)-матрица размера $n \times m$.
Максимальное число единиц, никакие две из котрых не стоят в одной строке или столбце равно $\alpha_1(G)$ для соотв. графа G.
Миниальнео число строк и столбцов, содержащих единицы рафно $\beta_0(G)$ соотв. графа G. □

2.9.3 Теорема 22 (Холл, 1935)

Пусть $G = (A, B, E)$ - двудольный граф. В G существует паросочетание, покр. $A \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \subseteq A \quad |N(X)) \ge |X|$

Доказательство.

$\Rightarrow$) Если существет $X \subseteq A: \quad |N(X)| < |X|$, тогда паросоч., покр. X не существует, а знчит нет паросч., поркывающего A.

$\Leftarrow$) Док-во индукцией по числу вершин в доле A:
Если $|A| = 1$ - очевидно верно
Пусть $|A| \ge 2$. Рассмотрим 2 случая:

1. $\forall X \subset A \quad |X| < |N(X)|$
   Выберем ребро $uv \in E \quad v \in A, u \in B$.
   Рассмотрим новый граф $G' = G - v - u$. Обозначим $A' = A \setminus \{v\}$.
   Пусть $X \subseteq A'$. $|X| < |N_G(X)|$, $|N_{G'}(X)| \ge |N_G(X)| - 1$
   $|X| < |N_{G'}(X)| + 1 \Rightarrow |X| \le |N_{G'}| + 1$. По индукционному предположению в графу G' существуют паросчитания, покарывающие $A' \quad \Rightarrow \quad$ объединениям его с ребром $vu \quad \Rightarrow \quad$ получаем паросчитание в G подграфа A.
2. $\exists A' \subset A \quad |A'| = |N(A')|$
   Рассмотрим 2 порождённых подграфа:
   $G_1 = G(A' \cup N(A')) \quad G_2 = G(VG \setminus (A' \cup N(A')))$ - всё оставшееся
   Покажем, что G_1 и G_2 удовлетворяют условиям теоремы.
   В G_1: $\forall X \subseteq A' \quad N_G(A) = N_{G'}(X)$
   $|X| \le |N_G(X)| = |N_{G'}(X)| \quad \Rightarrow \quad G_1$ удовлетворяет условию теоремы.
   Пусть $X \subseteq A \setminus A'$. Рассмотрим $X \cup A'$ в G.
   $|X \cup A'| \le |N_G(X \cup A')| \le |N_{G_2}(X)| + |N_G(A')|$
   Вспоминаем, что $|A' \cup X| = |X| + |A'|$
   $|A'| = |N_G(A')| \quad \Rightarrow \quad |X| \le |N_{G_2}(X)|$
   По индукционному предположению в G_1 существует паросоч., покрывающ. A', в G_2 существует паросоч., покрывающ. $A \setminus A'$. Следовательно, их объединение - искомое паросо., покр. A.

□

2.9.4 Теорема 23 (Фребениус, 1917), теорема о свадьбах

Двудольный граф $G = (A, B, E)$ имеет совершенное паросочетание $\quad \Leftrightarrow \quad |A| = |B|$ и для любого $X \subseteq A \quad |N(X)| \ge |X|$.

2.9.5 Упражнение

1. Вывести теоремы 20 и 22 из теоремы 23.
2. Вывести теорему 20 из 22 и теорему 22 из 20.

2.9.6 Теорема 24 (следствие из теоремы 22)

В любом непустом регулярном двудольном графе существую совершенные паросоч.

2.9.7 Следствие 7

Мно-во рёбер k-регулярного двудольного графа разбивается на k совершенных паросоч.

2.9.8 Следствие 8 (из теоремы 21)

Пусть $G = (A, B, E)$ - двудольный граф, $t \in Z^+$, $t \le |A|$.
Тогда в графе G существует паросоч. мощности $t \quad \Leftrightarrow \quad \forall X \subseteq A$ верно $|N(X)| \ge |X| + t - |A|$.

Доказательство. (смысл: рядом с B накидать t вершин, смежных с A)
$G' = (A, B', E')$, который получается следующим макаром:
$B' = B \cup T \quad |T| = |A| - t$
$E' = E \cup \{uv \mid u \in T,\ v \in A\}$
В G существует паросоч. мощности $t \quad \Leftrightarrow \quad$ в G' существует паросоч., покр. A по т. 21 $\quad \Leftrightarrow \quad \forall X \subseteq A$
$|X| \le |N_{G'}(X)| = |N_G(X)| + |A| - t$ □

2.9.9 парам-пам-пам

A - некоторое непустое конечное мно-во. $S = (S_1 ... S_n)$ - семейство подмно-в мно-ва A.
Тогда $\{x_1 ... x_n\} \subseteq A$ - система различных представителей для S (с.р.п., трансверсаль), если $x_i \in S_i \, \forall i \, x_i \ne x_j \; i \ne j$
Если $A = \{1, 2...6\}$, то 1,2,3, 2,4,5, 1,2, 1,6, 2,3, 1,3 не будет тем, чем надо, а если в последнем 3 заменить на 4, то будет.

2.9.10 Теорема 25 (Холла)

Семейство мно-в $S = (S_1 ... S_N)$ имеет СРП $\quad \Leftrightarrow \quad \forall k, \forall (i_1 ... i_k) \subseteq \{1 ... n\} \quad |S_{i_1} \cup ... \cup S_{i_k}| \ge k$

Доказательство.

⇒) очевидно.

⇐) $A = S_1 \cup ... \cup S_n = \{a_1 ... a_m\}$
Рассмотрим $B = \{S_1, ..., S_n\} \quad G = (A, B, E)$
$a_i S_j \in E \Leftrightarrow a_i \in S_j$
возьмём произвольное $x \subseteq B \quad x = \{S_{i_1} ... S_{i_k}\}$
$N(x) = S_{i_1} \cup ... \cup S_{i_k}$. по условию теоремы $|N(x)| = |S_{i_1} \cup ... \cup S_{i_k}| \ge |x|$.
По теореме 22 существует совершенное паросочетание, покрывающее B.

□

2.9.11 Упражнение

Вывести т. 21 из т. 25 и наоборот.

2.10 Чередующиеся цепи

2.10.1 Определение

Пусть G – граф и M – паросочетание. Тогда простая цепь $p = v_1 ... v_n$ называется **чередующейся** относительно M, если $v_i v_{i+1} \in M \Leftrightarrow v_{i+1} v_{i+2} \notin M$.
Вершина v – **ненасыщенная**, если она не покрыта M.
Чередующаяся цепь, соединяющая две ненасыщенные вершины, называется M**-увеличивающейся** цепью.

2.10.2 Теорема 26 (об увелчивающей цепи)

M – паросочетание в графе G, тогда M – наибольшее паросочетание $\Leftrightarrow$ в G не существует M-увеличивающейся цепи.

Доказательство. $\Rightarrow$) Пусть в G существует M-увелич. цепь $M' = (M \setminus EP) \cup (EP \setminus M)$ – паросочетание (очевидно).
$|M'| = |M| + 1$ – противоречие с тем, что M – наибольшее.

$\Leftarrow$) Рассмотрим M' – пусть это наибольшее паросочетание в G.
$G' = G((M \setminus M') \cup (M' \setminus M))$ $\forall v \in G' \Rightarrow \deg_{G'}(v) \leq 2$ $\Rightarrow$ каждая компонента связности графа G' – цикл или цепь.
По услвоию нет M-увелич. цепей и по доказанному нет M'-увелич. цепей $\Rightarrow$ в каждой компоненте связности одинакого число рёбер из M и из M' $\Rightarrow$ $|M| = |M'|$ $\Rightarrow$ M – наибольшее.

□

2.10.3 Алгоритм построения наибольшего паросочетания в двудольном графе (Венгерский метод)

$G = (A, B, E)$ - двудольный граф, M - паросочетание. Пусть $A_1 \subseteq A$ и $B_1 \subseteq B$ – мно-во ненасыщенных вершин. Выберем максимальный по включению вершин лес F со следующими сво-ами:

1. $\forall b \in B$, $b \in VF$ имеет степень 2 в F и одно из рёбер леса, инцидентное b, лежит в M.
2. Каждя компонента связности леса F содержит ровно одну вершину из A_1.
   Добавим все оставшиеся вершины из A_1 в качестве одновершинных компонент связности играфа F.
   – big image –
   Лемма 24 M - наибольшего в G $\Leftrightarrow$ ни одна ивершина из B_1 не смежна ни с какой вершиной из F.
   Док-во:
   - $\Rightarrow$) От противного. Пусть $\exists v \in VF$, $b \in B_1$, $vb \in EG \Rightarrow v \in A$
     Если $v \in A_1 \Rightarrow vb \cup M$ – паросочетание. противоречие.
     Если $v \notin A_1 \Rightarrow$ существует черед. цепь P из v в $a \in A_1$. Следовательно, $P \cup vb$ - увелич. цепь $\Rightarrow$ M – не наибольшая паросочетание.
   - $\Leftarrow$) Пусть нет рёбер из B_1 в F. Рассмотрим мно-ва $X = A \setminus VF$ $\quad Y = VF \cap B$
     – image –
     (a) Покажем, что $|X \cup Y| = |M|$ (1).
     По построению M покрывает $X \cup Y$. $\forall e \in M$ не можем покрывать две вершины из $X \cup Y$, т.к. если она покрывает $y \in Y = VF \cap B$, то по построению F второй конец e лежит в VF $\Rightarrow$ не принадлежит X $\Rightarrow$ $|X \cup Y| = |M|$ $\Rightarrow$ каждое ребро из M покрывает ровно по одной вершине из $X \cup Y$.
     Покажем, что $X \cup Y$ - вершинное покрытие графа G.
     (b) Предположим, что нет. Тогда существует ребро ab, $a \in A$, $b \in B$ и ab не покрыто мно-вом $X \cup Y$. $a \in VF$, $b \notin VF$, а по условию леммы $b \notin B_1$ $\Rightarrow$ b покрыто ребром из M $a'b$.
     $a' \neq a$, т.к. если a покрыто ребром из M, то его второй конец лежит в VF $\Rightarrow$ $\in Y$
     Тогда лес F', получающийся добавлением цепи aba' удовлетворяет условиями $\Rightarrow$ противоречие с максимальностью F. Т.о. $X \cup Y$ – вершинное покрытие графа G.

   $\alpha_1(G) \overset{th20}{=} \beta_0(G) \leq |X \cup Y| \overset{(1)}{=} |M|$ $\Rightarrow$ $\alpha_1(G) = |M|$, т.е. M – наибольшее паросочетание.
   $X \cup Y$ – наименьшее вершинное покрытие.

2.10.4 Алгоритм 1. Сам алгоритм. Вот так вот.

1. Берём произвольное паросочетание M.
2. Строим максимальный лес, удовлетворяющий сво-ам (1) и (2).

3. Если существует ребро, соединяющее вершину из $VF \cap A$ с вершиной из B_1, то получем, что по лемме 24 увеличивает цепь, тогда по теореме 25 строим новое паросочетание большей мощности. И переходим к шагу 2. А если не нашлось, то идём к шагу 4.

4. По лемме 24 M – наибольшее, а $(A \setminus VF) \cup (VF \cap B)$ – наименьшее вершинное покрытие.

2.11 Эйлер, превед!

2.11.1 наверное, определение

Цикл графа G, содержащий все рёбра графа G – **Эйлеров цикл**.
Мультиграф, в котором существует Эйлеров цикл, называется **Эйлеровым**.

2.11.2 Теорема 27 (Эйлер, 1731)

Для непустого связного мультиграфа G следующие условия эквивалентны:

1. G – Эйлеров.

2. Любая вершина в графе G имеет чётную степень.

3. Мно-во рёбер графа G можно разбить на циклы.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2)$ Эйлеров цикл проходит через вершину v k раз и содержит все рёбра $\quad\Rightarrow\quad \deg_G(v_i)2k$

$2 \Rightarrow 3)$ Нет вершин степени 1 $\quad\overset{\text{след. 3}}{\Rightarrow}\quad G$ – не дерево $\quad\Rightarrow\quad$ в нём есть циклы.
Пусть G_1 – максимальный подграф графа G, удовлетворяющий условию 1. Очевидно, что все вершины имеют чётную степень.
$G_2 = G - EG_1 \quad\Rightarrow\quad$ в G_2 все вершины имеют чётную степень. Если G_2 пуст, то всё доказали, иначе в нём есть рёбра. Очевидно, что оно не дерево, а значит в нём есть цикл. Однако противоречие с максимальностью G_1.

$3 \Rightarrow 1)$ Рассмотрим разбиение рёбер графа G на наименьшее число циклов: $c_1 ... c_s$. Покажем, что $s = 1$:
Пусть не так $(s > 1)$. *– image –*. $\exists i > 1 \mid c_1$ и c_i имеют общую вершину, но не имеют общих рёбер. По картинке очевидно, что их можно объёдинить в один цикл и получить разбиение на единичное число циклов. Противоречие с выбором наименьшего числа циклов $\quad\Rightarrow\quad s = 1$. Это и есть Эйлеров цикл.

□

2.11.3 Следствие 8

Пусть G – произвольный мультиграф, содержащий ровно $2l$ вершин нечётной степени, $l \geq 1$. Тогда мно-во ребёр графа G можно разбить на l цепей, каждая из которых соединяет 2 вершины нечётной степени.

Доказательство. Пусть $v_1 ... v_{2l}$ – вершины нечётной степени. $G_1 = G + v_1v_2 + ... + v_{2l-1}v_{2l}$. Тогда в G_1 все вершины имеют чётную степеь $\quad\overset{th.27}{\Rightarrow}\quad$ в графе G есть Эйлеров цикл. Тогда $C - v_1v_2 ... - v_{2l-1}v_{2l}$ – исходное разбиение. □

2.11.4 Определение

Цепь в мультиграфе G называется **эйлеровой**, если она содержит все рёбра графа.
Если в G есть эйлерова цепь, то G – **полуэйлеров**
– image example –.

2.11.5 Лемма 25

Связный мультиграф G – полуэйлеров $\quad\Leftrightarrow\quad$ в G не более двух вершин нечётное степени.
(Следует из теоремы 27 и следствия 8).

2.11.6 Следствие 9

Пусть связный мультиграф G содержит ровно 2 вершины v и u нечётной степени. Тогда в G существует Эйлерова (u, v)-цепь.

2.11.7 Алгоритм 2 (Флёри построения Эйлерова цикла)

1. Берём произвольную вершину v, рассматриваем произвольное ребро vu и присваеваем ему номер 1, переходим в u и удаляем ребро из графа.
2. Пусть после k шагов мы оказались в вершине w. Если нет ребёр, инцидентных w, то конец. Иначе выбираем то, которе не является мостом в полуечнном к тому времени графе, если это возможно. Если невозможно, то берём любое. Переходим по выбранному ребру в следующую вершинку, присваеваем тому ребру номер $k + 1$ и удаляем его из графа.

2.11.8 Лемма 26

Применение алгоритма Флёри к произвольному Эйлерову мультиграфу всегда приводит к построению Эйлерова цикла.

Доказательство. G – Эйлерова $\overset{th27}{\Rightarrow}$ G – связен и все вершины чётное степени $\Rightarrow$ наш алгоритм остановится в начальной вершине $\Rightarrow$ построит цикл C. Покажем, что C – Эйлеров от противного:
Пусть нет, рассмотрим $G_1 = G - EC \Rightarrow G_1$ – не пуст. Пусть H_1 – непустая компонента связности графа G_1. Пусть t – наибольший номер ребра цикла C, инцидентноно вершине H_1. На шаге t ребро с номером t было мостом, соединяющем с остатом C и H_1. Но x (которая где-то там была связна с v и было ребро vx) принадлежит $H_1 \Rightarrow$ принадлежит циклу в $H_1 \Rightarrow$ есть рёбра, инцидентные x, не являющихся мостами $\Rightarrow$ противоречие с алгоритмом. □

2.12 Гамильтон, превед!

2.12.1 Определение

Простой цикл, содержащий все врешины графа, называется **Гамильтоновым циклом**.
Граф, содержащий Гамильтонов цикл, называется **Гамильтонов**.

2.12.2 Теорема (Оре, 1960)

Если для любых двух несмежных вершин v, u верно $\deg(v) + \deg(u) \geq n = |VG|$, то G – гамильтонов.

2.12.3 Утверждение

Если в связном графе длина максимальной простой цепи равна k и в нём существует простой цикл длины $k+1$, то этот простой цикл является гамильтоновым.

Доказательство. Рассмотрим наш цикл C_{k+1}. Если C – не гамильтонов, G – связный $\Rightarrow \exists u, v : u \in C, v \notin C$, $uv \in EG$. Пусть $e \in C$, e инцидентноно u. $C - e + uv$ – простая цепь длины $k + 1$ – противоречие с максимальной длиной цепи. □

Доказательство. Пусть G – связный (иначе любые 2 вершины из разных компонент связности не удовлетворяют условию теоремы). Пусть $v_0v_1...v_k$ – простая цепь максимальной длины в G. Если $v_0v_k \in EG \Rightarrow$ по утверждению всё доказано. Пусть эти 2 вершинки несмежны.
По условию $\deg(v_0) + \deg(v_k) \geq n$. Надо доказать ситуацию на – *image* –.
Покажем, что (*) $\exists i \mid 1 \leq i \leq k - 2 \quad v_0v_{i+1} and v_kv_i \in EG$.
Поскольку наша цепь длиннейшая, то все вершины, смежные с v_0 и с v_k лежат на этой цепи. Сред $v_1...v_{k-1}$ ровно $\deg(v_k) - 1$ вершин смежно с v_k. Если (*) неверно, то $\deg(v_0) \leq k - 1 - (\deg(v_k) - 1) = k - \deg(v_k) \Rightarrow$ $\deg(v_0) + \deg(v_k) \leq k < n$ – противоречие с условием.
$\Rightarrow \exists i\,(*) \Rightarrow$ существует простой цикл длины $k + 1$ (надо убрать то ребро, которое между соседними вершинами) $\Rightarrow$ по утверждению G – гамильтонов. □

2.12.4 Теорема 29 (Дирака, 1952)

Любой граф G порядка $n = |VG| \geq 3$ с минимальной степенью $\delta(G) \geq^n /_2$, то граф является гамильтоновым. Очевидное следствие теоремы 28.

2.12.5 Теорема $29\frac{1}{2}$

Для $\forall n \geq 2 \quad Q_n$ – гамильтонов.

Доказательство. Индукцией по n:
если $n = 2$, то очевидно XD.
шаг $n+1$: $Q_{n+1} = Q_1 \times Q_n$. По индукционному предположению Q_n – гамильтонов. Рассмотрим в нём гамильтонов цикл $C = v_1 ... v_{2^n}$.
Построим (?) $0v_1, 0v_2, ..., 0v_{2^n}, 1v_{2^n}, 1v_{2^n-1} ...$ – гамильтонов цикл в Q_{n+1}. □

2.12.6 Код Гремя (двоично-отражённый)

Когда соседние элементы отличаются ровно в одной позиции.

2.13 Планарность

L – пров-о, в котором определено понятие жордановой кривой.
Граф G **укладывается** в про-во L, если он изоморфен некоторому граф H, у которого вершинами явлюются точки этого про-во, а рёбра - жордановы кривые, соединяющие соответствующие вершинки, при чём выполнены 2 условия:

1. Кривая, явлющаяся кривой не проходит через другие вершины кроме тех, которым она инциндента.
2. Две кривые, явлющаяся кривыми, пересекаются лишь в вершинах с инцидентными этим вершинам рёбрам.

Полученней граф H – **укладка** G в про-во L.

2.13.1 Теорема 30

Любой граф укладыватся в трёхменое Евклидово про-во.

Доказательство. Рассмотрим произвольный граф G. Проведём в нашем E^3 некоторую пряму l. Через l проведём $|E|$ различных плоскостей. На l отметим столько различных точек, сколько у нас вершин в графе. Для каждого ребра $v \in E$ выделяем свою плоскость и проводим в ней полуокружность, соединяющую вершины, инцидентные этому ребру.
получили укладку G в трёхмерном Евклидовом про-ве. □

2.13.2 Определение

Граф называется **планарным**, если он укладывается на плоскости.
Любая его укладка на плоскости называется **плоским графом**.

2.13.3 Теорема 31

Граф укладывается на сферу $\quad \Leftrightarrow \quad$ он планарный.

3 Графы (второй семестр)

3.1 Двойственность

Каждому ребру l графа G сопоставим жорданову кривую $l*$, которая пересекает **одно** ребро графа G – ребро l и соединяющая вершины $v*$, лежащие в гранях.

3.1.1 Лемма 31

Для любого плоского псевдографа G граф G^* – связен.

Доказательство. Упражнение. $\square$

3.1.2 Лемма 32

G – плоский связный (n, m)-граф с f гранями, то G^* – (n^*, m^*)-граф с f^* гранями, где $n^* = f$, $m^* = m$, $f^* = n$.

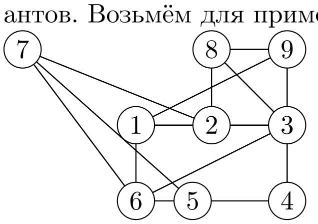
Доказательство. Упражнение. $\square$

3.1.3 Теорема 36

Если G – плоский связный псевдограф, то граф G^{**} изоморфен графу G.

3.1.4 Алгоритм укладки графа на плоскость

На каждом шаге укладка цепи и образование новой грани. Работает только для двусвязных графов, без вариантов. Возьмём для примера граф:



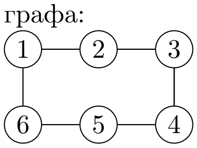
Сегмент S относительно графа $\tilde{G}$ – подграф графа G одного из видов:

1. ребро $e = uv \in EG: \quad e \notin \tilde{G}, \quad u, v \in V\tilde{G}$
2. каждая компонента связности графа $G - \tilde{G}$, дополненная всеми рёбрами, связывающими $\tilde{G}$ с этой компонентой.

Если G – планарен, следовательно каждый сегмент планарен.
Вершины сегмента S относительно $\tilde{G}$, принадлежащие $\tilde{G}$ – **контактные** вершины.
G – двусвязный, следовательно каждый сегмент имеет не менее двух контактных вершин.
У $\tilde{G}$ есть грани. Допустимой гранью для сегмента S относительно $\tilde{G}$ называется грань $\varGamma$ графа $\tilde{G}$, содержащая все контактные вершины графа S. Мно-во всех допустимых граней для S: $\varGamma(S)$.
Простую цепь сегмента S, соединяющую две различные контактные вершины и не содержащую других контактных вершин называют **α-цепь**.

3.1.5 Собственно, сам алгоритм

шаг 0. В G выбираем простой цикл C и укладываем на плоскость $\tilde{G} = C$. Напр., для приведённого выше графа:



шаг 1. Берём все грани и сегменты относительно $\tilde{G}$. Если мно-во сегментов пусто, переходим к 7.

шаг 2. Для каждого сегмента S определим $\varGamma(S)$:

3 Если $\exists S: \quad \varGamma(S) = \varnothing \Rightarrow G$ – не планарный. Идём к шагу 4.

4 Если $\exists S: \quad |\varGamma(S)| = 1 \Rightarrow$ шаг 6. Иначе 5.

5 Для некоторого сегмента S выбираем произвольную допустимую грань $\varGamma$.

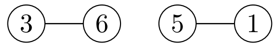
6 Помещаем α-цепь $L \in S$ в грань $\varGamma\tilde{G}$ на $\tilde{G} \cup L$. К шагу 1.

7 Построена укладка $\tilde{G}$ – укладка G.

3.1.6 Ообоснование?

Два сегмента S_1 и S_2 называются **конфликтующими**, если:

1. $\Theta = \mathit{\Gamma}(S_1) \cap \mathit{\Gamma}(S_2) \neq \varnothing$.
2. Существуют 2 α-цепи $L_1 \in S_1$ и $L_2 \in S_2$. Нельзя одновременно уложить ни в какую грань $\mathit{\Gamma} \in \Theta$.

Пример конфликтующих сегментов: 

3.1.7 Лемма 33

Если S_1 и S_2 конфликтуют, $|\mathit{\Gamma}(S_1)| \geq 2$, $|\mathit{\Gamma}(S_2)| \geq 2$, тогда $\mathit{\Gamma}(S_1) = \mathit{\Gamma}(S_2)$ и $|\mathit{\Gamma}(S_1)| = 2$.

Доказательство.
Докажем, что $\mathit{\Gamma}(S_1) = \mathit{\Gamma}(S_2)$.
Пусть нет, тогда существует 3 различных грани: $\mathit{\Gamma}_1 \in \mathit{\Gamma}(S_1)$, $\mathit{\Gamma}_2 \in \mathit{\Gamma}(S_2)$, $\mathit{\Gamma}_3 \in (\mathit{\Gamma}(S_1) \cap \mathit{\Gamma}(S_2))$.
Каждую α-цепь L_1 сегмента S_1 можно уложить в $\mathit{\Gamma}_1$. Каждую α-цепь L_2 сегмента S_2 можно уложить в $\mathit{\Gamma}_2$. Следовательно каждую пару цепей $L_1 \in S_1$ и $L_2 \in S_2$ можно одновременно уложить вне грани $\mathit{\Gamma}_3 \Rightarrow$ внутри грани $\mathit{\Gamma}_3$ противоречие с конфликтностью.

□

Построим граф сегментов $S(\tilde{G})$: $VS(\tilde{G})$ и две вершинки смежны, если сегменты конфликтуют.
Частичной укладкой планарного графа G называется такой граф, который можно получить из укладки графа G на плоскость удалением некоторых вершин.

3.1.8 Лемма 34

Если после очередного шага алгоритма получили частичную укладку $\tilde{G}$ планарного графа G такую, что
$\forall S \quad |\mathit{\Gamma}(S)| \geq 2$, то $S(\tilde{G})$ – двудольный.

Доказательство.
От противного. По критерию двудольности в $S(\tilde{G})$ есть цикл нечётной длины $S_1, \ldots, S_r, S_1$.
По лемме 33: $\forall i = 1, \ldots, r \quad \mathit{\Gamma}(S_i) = \{\mathit{\Gamma}_1, \mathit{\Gamma}_2\}$.
$\tilde{G}$ – частичная укладка $\Rightarrow$ все сегменты могут быть уложеные в $\mathit{\Gamma}_1$ или в $\mathit{\Gamma}_2$.
S_1 и S_r укладываются в $\mathit{\Gamma}_1$ и $\mathit{\Gamma}_2$ по очереди $\Rightarrow$ противоречие с нечётной длиной цикла. □

3.1.9 Теорема 37

Если G – планарный, то результатом каждого шага алгоритма является частичная укладка $\tilde{G}$ графа G.

Доказательство.

□

3.1.10 Следствие 15

Если G – планарный, то алгоритм строит его плоскую укладку.

3.1.11 Следствие 16

Если в процессе выполнения алгоритма получаем $S : \mathit{\Gamma}(S) = \varnothing$, то граф G – не планарный.

3.2 Раскраски

3.2.1 Определение

$G = (V, E)$. $\{c_1, ..., c_t\}$ – краски.
$\varphi : VG \to \{c_1, ..., c_t\}$ – **раскраска**.
t – раскраска. $V = V_1 \cup ... \cup V_t$ – разбиения.
t-раскраска φ – **правильная**, если $vu \in EG \Rightarrow \varphi(v) \neq \varphi(u)$.
φ – правильная t-раскраска.
G – t-**раскрашиваем**, если он обладает правильной t-раскраской.
G – t-**хроматический**, если G t-раскр. и не является $(t-1)$ - раскр. $X(G)$ – **хроматическое число** графа G.

3.2.2 Лемма 35

Если граф t-раскр., то он $(t+1)$-раскрашиваем.

3.2.3 Лемма 36

Если граф t-раскр., то каждый его подграф t-раскр.

3.2.4 Лемма 37

Для каждого подграфа G' графа G : $\quad X(G') \leq X(G)$.

3.2.5 Лемма 38

Если в графе G есть клика (полный подграф) на n вершинах, то $X(G) \geq n$.

3.2.6 Лемма 39

$X(G) = 1 \Leftrightarrow G$ – пустой.

3.2.7 Лемма 40

$X(G) = 2 \Leftrightarrow G$ – двудольный непустой.

3.2.8 Лемма 41

Пусть G состоит из блоков $B_1, ..., B_s$, тогда G – t-раскрашиваем $\Leftrightarrow$ B_i – t-раскр.

Доказательство.

$\Rightarrow$) Лемма 36

$\Leftarrow$) Индукция по числу блоков. База: $S = 1$ – очевидно. Рассмотрим висячий блок B. Пусть G' – подграф, порождённый остальными блоками. По индукционному предположению B и G' являются t-раскр.
$B \cap G' = \{v\}$. Раскр. B и G' в t цветов, чтобы v – один цвет.

□

3.2.9 Лемма 42

$X(G) \leq \triangle(G) + 1$ ($\triangle(G)$ – максимальная степень графа G).

Доказательство.
Индукция по кол-ву вершин графа G:
G – граф порядка $n \geq 2$, $\quad v \in VG$.
$G' = G - v$. По индукционному предположению $X(G') \leq \triangle(G) + 1$.
$\deg(v) \leq \triangle(G) \quad \Rightarrow \quad$ в окр. v не использовали какой-то цвет, окрасим её в этот цвет $\quad \Rightarrow \quad X(G) \leq \triangle(G) + 1$.

□

$\triangle(K_n) = n - 1 \quad X(K_n) = n$
$\triangle(C_{2k+1}) = 2 \quad X(C_{2k+1}) = 3$

3.2.10 Теорема 38 (Брукс, 1941)

Пусть G – связный граф, не являющийся ни полным, ни циклом нечётной длины.
Тогда $X(G) \le \triangle(G)$.

3.2.11 Алгоритм последовательной раскраски

1. Упорядочим $v_1, ..., v_n$ – все вершины графа G.
2. $\varphi(v_1) = c_1$
3. $r = 2, \dots, n: \quad v_1...v_r$ – раскрашены. Берём $\varphi(v_{r+1}) = c_m$, где m – минимальный индекс цвета, которого нету в окружении вершинки v_{r+1}.

3.2.12 Лемма 43

Пусть G – двусвязный, не является ни полным, ни циклом. Тогда существует 2 вершины $u, v \in VG, \quad d(v, u) = 2$, $G - u - v$ - связный.

Доказательство.
a – доминирующая вершина, если $\deg(a) = |V| - 1$.
D – мно-во всех доминирующих вершин графа G.

1. $D \neq \varnothing$. G – не полный $\Rightarrow \quad VG \setminus D \neq \varnothing$.
   Пусть $u, v \in VG: \quad uv \notin EG \quad \Rightarrow \quad d(u, v) = 2 \Rightarrow G - u - v$ – связен.
2. $D = \varnothing$. По условию G – не цикл $\quad \Rightarrow \quad$ в $G\, \exists z : \deg(z) \ge 3$.
   Рассмотрим граф $G - z = G'$.
   (a) G' – двусвязный. Т.к. $D = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \exists v : d(v, z) = 2$. Полагаем $u = z$. v, u – искомые.
   (b) G' имеет точки сочленения. $\quad \Rightarrow \quad$ существует два висячих блока B_1 и B_2.
   $\exists u \in B_1$: не точка сочленения и смежная с z в G, иначе т. сочленения блока B_1 явл. т. сочленения, но G – двусвязен.
   Аналогично $\exists v \in B_2$ – не точка сочленения и смежная с z в G.
   $G' - u - v$ – связен $\quad \Rightarrow \quad G - u - v$ – связен?.

□

3.2.13 Лемма 44

Пусть G – связный, n-вершинный граф. $w \in VG$.
Тогда вершины графа G можно упорядочить так, чтобы $w_1, w, w_2, ..., w_n$, что любая вершинка w_i, $i \ge 2$ смежна по крайней мере с одной вершиной с меньшим номером.

Доказательство т. Брусса.

1. G - двусвязный, без циклов, $|V| = n$. По л. 43 $\exists u, v : \quad d(u, v) = 2 \quad G - u - v$ – связный.
   По лемме 44 вершины графа $G - u - v$ можно упорядочить так, что $w, ..w_{n-1}$
   $\forall i, 2 \le i \le n - 2, \quad w_i$ смежна с вершиной с меньшим номером.
   Упорядочим вершины графа G: $u, v, w_{n-2}, ..., w_1 = w$ и применим алгоритм последовательной раскраски.
   $\varphi(u) = \varphi(v) = c_1$.
   Пусть уже покрашены $u, v, w_{n-2}...w_{s+1}$ в $\triangle(G)$ цветов.
   w_s смежна с вершиной с меньшим номером - не покрашеные вершины $\quad \Rightarrow \quad$ в окружении w_s используется не более $\Delta(G) - 1$ цветов $\quad \Rightarrow \quad$ покрасим её в один из $\Delta(G)$ цветов.
   $w_1 = w$ – смежна с v и u: $\quad \varphi(v) = \varphi(u)$.
2. Пусть $\Delta = \Delta(G)$, G – не связен. Покажем, что любой блок графа G является Δ-раскрашиваем.
   (a) Блок является $K_m \quad \Rightarrow \quad$ точка сочленеия этого блока имеет степень не меньше $m \le \Delta$. Но K_m – m-раскрашиваем $\quad \Rightarrow \quad$ он является Δ-раскрашиваем.

(b) Блок является циклом. Точка сочленеия этого блока имеет степень не меньше 3. Цикл 3-раскрашиваем $\Rightarrow$ Δ-раскрашиваем.

(c) Блок не полный и не цикл $\Rightarrow$ по доказанному.

□

3.2.14 Теорема 39 (Зыкова, 1949)

Существуют графы без треугольников с произвольно большим хроматическим числом.

3.2.15 Лемма 45

Любой минимальной, правильной раскраске графа G для любого цвета c_i существуют вершины этого цвета, смежные с вершинами всех остальных цветов.

Доказательство т. Зыкова.
Построим последовательность графов $G_2 ... G_i ...$, так, что:

1. G_i без треугольников.
2. $X(G_i) = i$

$G_2 = K_2$
Пусть G_i построено, $VG_i = \{v_1 ... v_n\}$. Построим G_{i+1}:
$VG_{i+1} = VG_i \cup V' \cup \{v\}$, где $V' = \{v'_1, ..., v'_n\}$, $\quad VG_i \cap V' = \varnothing$.
$v \notin VG_i \cup V'$.
Определяем мно-во рёбер: на вершинках VG_i строим граф G_i.
Любую вершинку $v'_i \in V'$ соединяем со всеми вершинами из VG_i, смежными с v_i. v смежна со всеми вершинами из V'. Имеем: G_i – без тре-ов и $X(G_i) = i$. Докажем, что G_{i+1} без треугольников.
Пусть в G_{i+1} есть треугольник. Тогда $a, b, c :\ a, b \in VG_i, c \in V'$ (единственный вариант, который остался). Но $c = v'_j \quad \Rightarrow \quad a, b, v_j$ – треугольник. Противоречие.
Рассмотрим теперь хроматическое число.
G_{i+1} в $i + 1$. $G_i - i$ - раскр. φ, φ' графа G_{i+1} : $\quad \forall$ верш. из $V'G$.
Почему нельзя меньше? Пусть G_{i+1} правильно раскрашен в i цветов. Но $X(G_i) = i \quad \Rightarrow \quad$ эта раскраска порождает правильную минимальную раскраску графа G_i. Тогда по лемме 45 есть вершина, смежная с вершинами всех остальных цветов, тогда её дупликат расрашен в тот же цвет, следовательно в V' существуют вершины всех цветов, а значит для вершины v? нет цвета.
Следовательно, $X(G_{i+1}) = i + 1$. □

3.3 раскраска планарных графов

Карта – связный плоский мультиграф без мостов.
Грани карты имеющие общее ребро - смежны.
t – раскраска карты, φ – мно-во граней в $\{c_1, ..., c_t\}$, $\forall$ две сменжные грани имеют разный цвет.

3.3.1 Гипотеза (о чётырех красках КЭли, 1879)

Всякая карта 4-раскрашиваема.

3.3.2 Теорема 40

Карта G – t-раскрашиваема $\Leftrightarrow$ геом. двойственный граф $G*$ t-раскр.

Доказательство. через определение двойственного графа. □

3.3.3 Теорема 41

Плоский двусвязный граф имеет хроматическое число 2 (бихромотический) $\Leftrightarrow$ границы каждой его граней имеет чётное число рёбер.

Доказательство.

$\Rightarrow$ очевидно.

$\Leftarrow$ Рассмотрим произвольный простой цикл C. Внутри цикла грани $T_1, ..., T_s$, на границе T_i лежит l_i рёбер $\forall i$. Все l_i – чётные, значит $\sum\limits_{i=1}^{s} l_i$ – чётное число. Все рёбра, не принадлжащие C в этой сумме подсчитаны дважды, следовательно C - чётной длины. $\Rightarrow$ любой цикл имеет чётную длину $\Rightarrow$ G – двудольный по теореме 2 $\Rightarrow$ по лемме 40 – бихромотический.

□

3.3.4 Теорема 42

Карта G – 2-раскрашиваемый $\Leftrightarrow$ G – Эйлеров.

3.3.5 Лемма 46

Пусть вершины графа G правильно раскрашены цветами $c_1 ... c_t$. Обозначим через G_{ij} подрграф графа G, порождённый всеми вершинами цветов c_i и c_j, $i \neq j$, $i, j \in \{1..t\}$. Пусть G'_{ij} – некоторая компонента связности графа G_{ij}.

Вершины графа G'_{ij} перекрасим $c_i \leftrightarrow c_j$. Полученная раскраска – правильная раскраска G в цвета $c_1 .... c_t$.

Доказательство.
Пусть $u, f \in \{c_i, c_j\}$, Пусть u и v – раскраска в c_i.

1. $u, v \in VG'_{ij}$, $\Rightarrow$ в старой раскраске u, v имеют цвет c_j $\Rightarrow$ не смежны.
2. $u, v \notin VG'_{ij}$, $\Rightarrow$ в старой раскраске u, v имеют цвет c_i $\Rightarrow$ не смежны.
3. $u \in VG'_{ij}$, $v \notin VG'_{ij}$ $\Rightarrow$ u, v в разных компонентах связности графа G_{ij} $\Rightarrow$ не смежны.
4. $u \in VG'_{ij}$, $v \notin VG'_{ij}$ $\Rightarrow$ u, v в разных компонентах связности графа G_{ij} $\Rightarrow$ не смежны.

□

3.3.6 Теорема 43 (Хивуд, 1890)

Любой планарный граф 5-раскрашиваем.

Доказательство.
Индукция по числу вершин. $n = |VG|$.
$n \leq 5$ – база индукции, ибо всё очевидно.
Рассмотрим произвольный граф, $n \geq 6$.
По следствию 14 в графе G $\exists v:$ $\deg(v) \leq 5$. Рассмотрим $G' = G - v$. По индукционому предположению существует правильаня 5-раскраска φ графа G'. Если $\deg(v) \leq 4$, то в окружениее v не использован цвет, следовательно красим v в этот цвет, следовательно граф 5-раскр.
Пусть $\deg(v) = 5$. Если в окружении v используется не более 4 цветов, то всё пучком.
Остался случай, когда в окружении v испльзованы все 5 цветов. □

3.3.7 Теорема 47

Любой планарный граф 4-раскрашиваем.

Доказательство. ололо. пыщ пыщ пыщ. □

3.4 Рёберная раскраска

$X'(G)$ – хроматический индекс.
Справедливы аналоги лемм 35-37.

3.4.1 Лемма 47

Для любого графа G: $X'(G) \le \Delta(G)$.
Зафиксируем правильную рёберную t-раскраску φ графа G. $\varphi(e) = \alpha \quad \Rightarrow \quad e$ – α-ребро.
α,$\beta \in \{1...t\}$, $\alpha \ne \beta$
Рассмотрим подграф $\tilde{G}_{\alpha\beta}$ графа G порождённый мно-ом всех рёбер цвета α и β.
Степень каждой вершины 1 или 2, следовательно, каждая компонента связности – либо простой цикл, либо простая цепь не нулевой длины.
Эту цепь назовём α/β-цепь. Если в этой цепи перекрасить $\alpha \leftrightarrow \beta$, то получи правильную рёберную раскраску (аналогично лемме 46).

3.4.2 Теорема 48 (о хроматическом индексе двудольных графов)

Для любого двудольного графа G: $X'(G) = \Delta(G)$.

Доказательство. Индукция по числу рёбер.
Если граф – пустой, то очевидно (база).
Пусть $|EG| = m \ge 1$ и для всех графов с меньшим кол-ом рёбер теорема верна.
Рассмотрим $G' = G - xy$, $xy \in EG$.
По индукционому предположению есть раскраска φ в Δ цветов. Зафиксируем её.
Если есть такой цвет, который не входит ни в x, ни в y, то тупо красим ребро в этот цвет.
Иначе. Степень x и y не больше, чем $\Delta - 1$. Значит есть цвет α, который есть в x, но нет в y и есть цвет β, который есть в y, но нету в x. Следовательно, x и y – концы некоторых α/β-цепей (но не одной, иначе там будте более-менее очевидное противоречие с двудольностью). Следовательно, в граф $\tilde{(G)}$ они лежат в разных компонентах связности. Перекрашиваем компоненту с x и теперь новое ребро можно окрасить в цвет α. □

3.4.3 Теорема 49 (Визинга)

$\forall G \bigtriangleup(G) \le X'(G) \le \bigtriangleup(G) + 1$.
Правильная рёберна $\bigtriangleup(G) + 1$-раскраска отныне будет называться просто “раскраска”.

Доказательство.
От противного. Пусть G – граф с минимальным числом рёбер, не удовлетворяющих верхне оценке.
K_2 – удовлетворяет. И что?
$\forall e \in EG \quad G - e$-раскрашиваем. С другой стороны, G – не раскрашиваем.
$\forall xy \in EG \quad \forall$ раскраски графа $G - xy$, если α нет в x, β нет в y, то $\alpha \ne \beta$ (иначе можно было бы раскарить x и y в один(?) цвет) и $\alpha \setminus \beta$ цепь из x заканчивается в y. Это наше сво-во (*).
$x \in VG \quad xy_0 \in EG$, тогда $G - xy_0$ имеет φ_0-раскраску.
Пусть в x нет α, в y_0 нет $\beta_0 \quad \Rightarrow \quad$ в x есть $\beta_0 \quad \Rightarrow \quad \exists xy_1 \in EG: \quad \varphi_0(xy_1) = \beta_0$.
В y_1 нет β_1, если /*в x есть β_1*/ ребро $xy_2: \quad \varphi_0(xy) = \beta$ и т.д. до y_k.
Строим серию раскрасок.
$\forall G_i = G - xy_i$ строим раскраску из $\varphi_i : \varphi_i(e) = \varphi_0(xy_{j+1})$, $e = xy_j$, $j \in \{0, ..., i-1\}$.
кратиииинки
В φ_0 цвет β_k есть в $x \quad \Rightarrow \quad \beta_k \in \{\beta_0, ..., \beta_{k-1}\}$. $\exists i\, \beta_k = \beta_i\, i \in \{0, ..., k-1\}$.

□

3.4.4 Теорема 50

Справедливо $X'(K_{2n+1}) = 2n + 1$, $X'(K_{2n}) = 2n - 1$.

Доказательство. Упражнение. □

3.4.5 Определения

Граф называется ???, если все рёбра раскрашены в один цвет. Для любых 6 человек существует 3, которые попарно знакомы между собой, лио 3, которые попарно не знакомы.

Доказательство. Возьмём K_6 и раскрасим рёбра в 2 цвета: $\varphi(xy) = c_1$, если знакомы и c_2, если не знакомы. Доказать, что есть одноцветный тре-к. □

3.4.6 Теорема 51 (Рамсея для графов)

$\forall p, q \quad p \geq 2,\, q \geq 2 \quad \exists$ минимальное число $N(p, q)$: $\quad \forall n \geq N(p, q)$, $\forall$ раскраси ребёр графа K_n в два цвета c_1 и c_2 выполнено хотя бы одно из двух условий:

1. $\exists$ монохроматический порождённый подграф цвета c_1 на p вершинах.
2. $\exists$ монохроматический порождённый подграф цвета c_2 на q вершинах.

$N(p, q)$ – **число Рамсея** для графов.

3.4.7 Лемма 48

$\forall p, q \geq 2$ верны:

1. $N(2, q) = q$
2. $N(p, 2) = p$
3. $N(3, 3) = 6$.

Доказательство.
1, 2 – упражнение.
3. Докажем (1) $N(3, 3) > 5$ и (2) $N(3, 3) \leq 6$.

1. привести пример раскраси ребёр K_5, где нет монохроматических тре-ков.
2. рассмотрим произвольную раскраску ребёр графа K_6, $x \in VK_6$.
   Есть 3 ребра, инцидентных x и раскрашенных в один цвет.

□

Доказательство (Теорема Рамсея).
Индукция по $m = p + q$. Докажем неравенство $N(p, q) \leq N(p-1, q) + N(p, q-1)$, $\quad \forall p > 2,\, q > 2$. Сама индукция доказывает граничность числа $N(p, q)$.
База индукции: $N(p, 2) = p$, $\quad N(2, q) = q$ (лемма 48).
$n = N(p-1, q) + N(p, q-1)$. Надо доказать, что для K_n выполнено условие теореым.
Пусть φ – произвольная раскраса рёбра графа K_n в два цвета c_1 и c_2.
$x \in VK_n$. $V_1 = \{y \in VK_n | \varphi(xy) = c_1\}$, $\quad V_2 = \{y \in VK_n | \varphi(xy) = c_2\}$. $|V_1| = n_1$, $\quad |V_2| = n_2$.
$n_1 + n_2 + 1 = n = N(p-1, q) + N(p, q-1)$ (возможно, числа чётные?) $\quad\Rightarrow\quad$ выполнено одно из условий:

1. $n_1 \geq N(p-1, q)$
2. $n_2 \geq N(p, q-1)$

Пусть (1). Рёбра графа $G(V_1)$ раскрашены раскраской φ. По индукционному предположению выполнено хотя бы одно из условий:

1. $\exists$ монохроматический порождённый подграф цвета c_1 на $p-1$ вершине.
2. $\exists$ монохроматический порождённый подграф цвета c_2 на q вершинах.

Если выполняется второе, то всё доказано. А если первое???
Если первое, то добавим вершину x и получим монохроматический порождённый подграф цвета c_1 на p вершинах. Иными словами, док-во чем-то похоже на док-во предыдущей леммы.
Случай (2) рассматривается аналогично. □

3.4.8 Теорема 52

Если для $p, q\,(p > 2, q > 2) \quad N(p-1, q)$ и $N(p, q-1)$ – чётные, то $N(p, q) < N(p-1, q) + N(p, q)$.

4 Булевы ф-ии

4.0.9 Определение

$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ – **булева функция**. P_2 – мно-во всех таких ф-ий.
Таблица значений – один из способов заданий таких ф-ий.

x_1	$\dots$	x_n	$f(x_1 \dots x_n)$
0	$\dots$	0	$f(0,0,\dots,0)$
0	$\dots$	1	$f(0,0,\dots,1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	$\dots$	1	$f(1,1,\dots,1)$

4.0.10 Лемма 1

Булевых ф-ий от n переменных 2^{2^n}.

4.1 Элементарные булевы ф-ии

x	0	x	$\overline{x}$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Наши ф-ии:

x	y	$x\&y$	$x \vee y$	$x \sim y$	$x \to y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Наша ф-ия от 3 переменных:

x	y	z	$m(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Перем. x_i ф-ии $f(x_1 \dots x_n)$ **- существенная**, если $\exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad f(\alpha_1 \dots \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n) \neq f(\alpha_1 \dots \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n)$.
f **существенно зависит** от x_i. Если x_i – не существенно $\to$ x_i – фиктивная, f не зависит от x_i.

4.1.1 Теорема 1

Число булевых ф-ий $f(x_1 \dots x_n)$, существенно зависящих от $x_1 \dots x_n$ равно $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}$

Доказательство.

Формула включений-исключений: $|A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot S_k, \quad S_k = \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}|$.
A_i – формулы, существенно не зависящие от переменной x_i.
$|A| = 2^{2^n}$, $|S_0| = |A| = 2^{2^n}$.
$|A_i| = 2^{2^{n-1}}$, $|S_1| = n \cdot 2^{2^{n-1}}$.
$|A_i \cap A_j| = 2^{2^{n-2}}$, $|S_2| = \binom{n}{2} \cdot 2^{2^{n-2}}$.

$\vdots$
$|S_k| = \binom{n}{k} \cdot 2^{2^{n-k}}$.
$\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}$. □

4.1.2 Определене

$f(x_1 \dots x_n)$, x_i – фиктивная. Вычеркнем из таблицы значений строки вида $\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1} \dots \sigma_n$ и столбец i. Получим ф-ию от $n-1$ переменной $g(x_1 \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_n)$.
g полученна из f удалением фиктивной переменной, а f получена из g путём добавления фиктивной переменной. Ф-ии равный, если одну из другой можно получить путём добавления или удаления фиктивных перменных.

x_1	x_2	$h(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

равна ф-ии

x_2	$g(x_2)$
0	0
1	1

4.1.3 Определение

Пусть дано счётное мно-во булевых ф-ий $\Omega = \{f_1(x_1 \dots x_{n_1}), \dots, f_s(x_1 \dots x_{n_s}), \dots\}$. Формула над Ω:

1. $\forall i \quad f_i(x_1 \dots x_{n_i})$ – формула.
2. Если $A_1 \dots A_{n_i}$ – формулы на Ω или перменные, то $f_i(A_1, \dots, A_{n_i})$ – формула над Ω.

4.1.4 Примеры

1. $\Omega = \{\varphi(x_1, x_2)\}$.
   Формулами будут: $\varphi(x_1, x_2), \quad \varphi(x_1, x_1), \quad \varphi(x_2, \varphi(x_3, x_4))$
2. $\Omega = \{x_1 \& x_2, \quad x_1 \vee x_2, \quad x_1 \oplus x_2\}$
   Формулой будет: $(x_1 \vee ((x_1 \& x_2) \oplus x_3)$

4.1.5 Определение

$\Phi(x_1 \dots x_n) \to f(x_1 \dots x_n)$

1. Если $\Phi(x_1 \dots x_n)$ совпадает с некоторой $f_i(x_1 \dots x_{n_i})$, $f_i \in \Omega \quad f(x_1 \dots x_n) = f_i(x_1 \dots x_{n_i})$
2. Если $\Phi(x_1 \dots x_n)$ совпадает с $f_i(A_1 \dots A_n)$, где $f_i \in \Omega$, $A_1 \dots A_{n_i}$ – формулы или переменные, то если A_j – переменная x_{j_i}, то сопоставим $A_j \to f_{j_i} = x_{j_i}$. Если A_j – формула, то ей уже сопоставлена некоторая ф-ия f_{j_i}.
   Сопоставим $\Phi(x_1 \dots x_n) \to f_j(f_{1_i} \dots f_{n_i})$.
   Φ **реализует** ф-ию f. Φ_1 и Φ_2 **эквивалентны**, если они реализуют равные ф-ии.

4.1.6 Основные эквивалентности формулы

$\Omega = \{x_1 \& x_2,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 \oplus x_2,\ \overline{x},\ x,\ 0,\ 1\}$.
$\circ \in \{\&, \vee, \oplus\}$.

1. Коммутативность $\&, \vee, \oplus$: $(x_1 \circ x_2) = (x_2 \circ x_1)$.
2. Ассоциативность $\&, \vee, \oplus$: $(x_1 o (x_2 o x_3)) = ((x_1 o x_2) o x_3)$.
3. Дистрибутивность $\&, \vee, \oplus$: $(x_1 \vee (x_2 \& x_3)) = ((x_1 \& x_2) \vee (x_1 \& x_3))$
   $(x_1 \& (x_2 \vee x_3)) = ((x_1 \vee x_2) \& (x_1 \vee x_3))$ $(x_1 \oplus (x_2 \& x_3)) = ((x_1 \& x_2) \oplus (x_1 \& x_3))$

4. $\overline{\overline{x}} = x$

5. $\overline{x_1 \& x_2} = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$
$\overline{x_1 \vee x_2} = (\overline{x_1} \& \overline{x_2})$

6. $(x_1 \& (x_1 \vee x_2)) = x_1$
$(x_1 \vee (x_1 \& x_2)) = x_1$

7. $(x \& x) = x \quad (x \vee x) = x.$

8. $(x \& \overline{x}) = 0$

9. $(x \vee \overline{x}) = 1$

10. $(x \& 0) = 0 \quad (x \& 1) = x \quad (x \vee 1) = 1 \quad (x \vee 0) = x.$

11. $(x \oplus \overline{x}) = 1 \quad (x \oplus 1) = \overline{x} \quad (x \oplus x) = 0 \quad (x \oplus 0) = x$

4.1.7 Соглашения

1. Опускаем внешние скобки.

2. $A_1 \circ \ldots \circ A_n$ опускаем скобки.

3. $\&_{i=1}^{n} A_i = A_1 \& \ldots \& A_n$
$V_{i=1}^{n} A_n = A_1 \vee \ldots A_n.$
аналогично для прямой суммы: $\bigoplus$

4. $x_1 \& x_2 = x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2$

5. & имеет приоритет перед $\vee$, $\oplus$, $\sim$, $\rightarrow$.

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1 \\ \overline{x}, & \sigma = 0 \end{cases}$$

$x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n} = 1 \Leftrightarrow (x_1 \ldots x_n) = (\sigma_1 \ldots \sigma_n).$

4.1.8 Теорема 2 (о разложении булевой ф-ии по перменным

Пусть $f(x_1 \ldots x_n) \in P_2, \quad k,\, 1 \leq k \leq n.$
Тогда $f(x_1 \ldots x_n) = \bigvee_{\sigma_1 \ldots \sigma_k \in \{0,1\}^k} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n} = f(\sigma_1, \ldots \sigma_k, x_{n-k+1}, \ldots, x_n).$

Доказательство.
$f(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ – слева. А справа:
$\bigvee_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} \alpha_1^{\sigma_1} \ldots \alpha_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \ldots \sigma_k, x_{n-k+1}, \ldots, x_n) = f(\alpha_1 \ldots \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$. Рассмотрим пару крайних случаев:

$k = 1 \;\; f(x_1 \ldots x_n) = x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n) \vee \overline{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n)$

$k = n \;\; f(x_1 \ldots x_n) = \bigvee_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1 \ldots \sigma_n) = \bigvee_{\sigma_1 \ldots \sigma_n f(\sigma_1 \ldots \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}.$ (*)
Разложение в виде (*) любой отличной от 0 ф-ии называется СДНФ (совершенная дизъюнктивная нормальная форма).

□

4.1.9 Определение

$f^*(x_1 \ldots x_n) = \overline{f(\overline{x_1} \ldots \overline{x_n})}$ – двойственная к f. $(f^*)^* = f$.

4.1.10 Теорема 3 (принцип двойственности)

Пусть $F(x_1 \ldots x_n) = f(f_1(x_1 \ldots x_n), \ldots, f_s(x_1 \ldots x_n)).$
Тогда $F^*(x_1 \ldots x_n) = f^*(f_1^*(x_1 \ldots x_n), \ldots, f_s^*(x_1 \ldots x_n))$

Доказательство.
$F*(x_1 \ldots x_n) = \overline{F(\overline{x_1} \ldots \overline{x_n})} = \overline{f(f_1(\overline{x_1} \ldots \overline{x_n}), \ldots f_s(\overline{x_1} \ldots \overline{x_n}))} = \overline{f}(\overline{f_1}*(x_1 \ldots x_n) \ldots$ □

4.1.11 Принцип двойственности для формул

Пусть f выражается формулой A над Ω. Тогда f^* выражается формулой A^* над Ω^*, где A^* получается из A заменой всех ф-ий из Ω двойственными ф-ями Ω^*.

4.1.12 Пример

$f = x_1x_2 \oplus (\overline{x_1} \vee x_3)$
$f* = (x_1 \vee x_2) \sim \overline{x_1}x_3$

4.1.13 СКНФ

$\&_{\sigma_1 \dots \sigma_n \, f(\overline{\sigma_1} \dots \overline{\sigma_n})=0} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n} = f(\overline{\sigma_1} \dots \overline{\sigma_n}) = 0 \ \&_{\sigma_1 \dots \sigma_n \, f(\sigma_1 \dots \sigma_n)=0} x_1^{\overline{\sigma_1}} \dots x_n^{\overline{\sigma_n}}$ – СКНФ

4.1.14 Определения

Формула вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \dots x_{i_k}^{\sigma_k}$ называется элементарнй конъюнкцией ($x_{i_j} \neq x_{i_l}$, $j \neq l$).
$K_1 \vee K_2 \dots \vee K_s$, где K_i – элементарная конъюнкция - ДНФ. аналогично для КНФ.

4.2 Замкнутость и полноста систем булевых функций

4.2.1 Определения

Ω – система БФ.
$[\Omega]$ – все БФ, выраженные ф-лами над Ω.
Примеры:
$[\{\overline{x}, 0\}] = \{\overline{x}, 0, x, 1\}$
$[\{x\&y,\ x \vee y,\ \overline{x}\}] = P_2$.
Сво-ва:

1. $\Omega \subseteq [\Omega]$
2. $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \quad \to \quad [\Omega_1] \subseteq [\Omega_2]$
3. $[\Omega_1 \cup \Omega_2] \supseteq [\Omega_1] \cup [\Omega_2]$
4. $[[\Omega]] = [\Omega]$

Ω – **замкнутое**, если $\Omega = [\Omega]$.
Система БФ Ω называется **полной**, если $[\Omega] = P_2$.

4.2.2 Лемма 2

$\{x\&y,\ x \vee y,\ \overline{x}\}$ – полна.

Доказательство.
$f(x_1 \dots x_n) \in P_2$
$\Rightarrow$ если $f \equiv 0$, то $f = x, \& \overline{x}$.
$\Rightarrow$ если $f \not\equiv 0$, то f представима в виде СДНФ. $\square$

4.2.3 Теорема 4 (О полноте 2-х систем)

Ω_1, Ω_2 – системы БФ, Ω_1 – полна, каждая БФ в Ω_1 выражается формулой над Ω_2 (*) $\quad \Rightarrow \quad \Omega_2$ – полна.

Доказательство.
Ω_1 – полно $\quad \Rightarrow \quad [\Omega_1] = P_2$.
(*) $\to \Omega_1 \subseteq [\Omega_2]$.
$P_2 = [\Omega_1] \subseteq [[\Omega_2]] = [\Omega_2] \subseteq P_2 \quad \Rightarrow \quad [\Omega_2] = P_2$. $\square$

4.2.4 Теорема 5

Из любой полной системы БФ можно выделить конечную полную подсистему.

Доказательство.
Ω – полна. $\exists \Phi_{\&}$, $\Phi_{\vee}$, Φ_{-} – ф-лы над Ω выражающие $\&$, $\vee$, $-$.
В любой из них конечное число ф-ий из Ω.
Рассмотрим мно-во ф-ий, использующих $\Phi_{\&}$, $\Phi_{\vee}$, Φ_{-} – Ω' – конечно. По лемме 2,4 Ω' – полна. $\square$

4.2.5 Лемма 3 (Прмеры полных систем)

Следующие системы полны: $\{\&, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$, $\{\&, \oplus, 1\}$, $\{x \mid y\}$, $\{x \downarrow y\}$.

4.3 Жегалкин

4.3.1 Определения

Ф-ла вида $x_{i_1}\& \ldots \& x_{i_k}$, где $x_{ji} \neq x_{jl}$, $i \neq l$ называется **монотонной элементарной конъюнкцией**, k – ранг.
$k = 0$ – 1-вырожденная МЭК, ранг(1)=0.

Ф-ла вида $k_1 \oplus \ldots \oplus k_l$, где k_i – МЭК, $k_m \neq k_n$, $m \neq n$, называется **полиномом Жегалкина**.
l – длина полинома. 0 – полином длины $l = 0$ выражающий ф-ию $\equiv 0$.

4.3.2 Теорема 6 (Жегалкина)

Для любой БФ $f \in P_2$ $\exists!$ полином Жегалкина, реализующий эту ф-ию.

Доказательство.

существование) По Лемме 3 $\{\&, \oplus, 1\}$ – полная. $\Rightarrow$ $f(x_1 \ldots x_n) \in P_2$, то f выражается ф-лой над $\{\&, \oplus, 1\}$.
Преобразуем её:

1. Раскроим скобки по законам дистрибутивности $\oplus$ относительно $\&$. Получаем ф-лу $A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$, где A_i – ф-ла над $\{\&, 1\}$.
2. По законам $x\&x = x$, $x\&1 = x$ преобразуем все A_i в ЭМК.
3. По закону $A \oplus A = 0$ получаем полином Ж, который эквивалентен исходной ф-ле.

единственность) Кол-во БФ от n переменных $= 2^{2^n}$.
Кол-во МЭК от n переменных $x_1 \ldots x_n = 2^n$.
$\Rightarrow$ ПЖ от n переменных $= 2^{2^n}$.
Каждый полином реализует единственную ф-ию $\Rightarrow$ для каждой ф-ии ПЖ – единственный.

$\square$

4.3.3 3 способа построения ПЖ для ф-ии f

Введём нумерацию МЭК над мно-ом переменных $\{x_1 \ldots x_n\}$.
$K \leftrightarrow$ набор $(\sigma_1 \ldots \sigma_n) \mid \sigma_i = 1 \Leftrightarrow x_i$ входит в K.

Номер $K = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot 2^{n-1}$. Константа 1 имеет номер 0.

K	v	x_1	x_2
1	0	0	0
x_2	1	0	1
x_1	2	1	0
x_1x_2	3	1	1

4.3.4 Способ первый (обыкновенный, ничем не примечательный)

$f(x_1 \ldots x_n)$ представим в виде СДНФ или СКНФ. По законму Де Моргана изб-ся от $\vee$, все отрицания заменим на $\oplus 1$. Получим ф-лу над $\{\&, \oplus, 1\}$. Далее по алгоритму из док-ва.

Пример $f(xy) = x \to y = \overline{x} \vee y = \overline{x \& \overline{y}} = x\&(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus 1$.

4.3.5 Способ второй (метод неопределённых коэффициентов)

$P(x_1 \dots x_n)$ – ПЖ для $f(x_1 \dots x_n)$.
$P(x_1 \dots x_n) = C_0 \oplus C_1K_1 \oplus C_2K_2 \oplus \dots \oplus C_{2^n-1}K_{2^n-1}$, где K_i – ЭМК с номером i, $C_i \in \{0, 1\}$.
$(C_0 \dots C_{2^n-1}$ – набор коэффициентов в ПЖ.
$\forall \widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n$ сопоставим ур-ие $P(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$. Это система из 2^n ур-ий и 2^n неизвестных. По т. Жегалкина она имеет единственно решение.

Пример $x \to y = C_0 \oplus C_1y \oplus C_2x \oplus C_3xy$.

$$\begin{cases} f(0,0) = 1 = C_0 \\ f(0,1) = 1 = C_0 \oplus C_1 \\ f(1,0) = 0 = C_0 \oplus C_2 \\ f(1,1) = 1 = C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = 1 \\ C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x \to y = 1 \oplus x \oplus xy$$

4.3.6 Способ третий (преобразование кортежа значений ф-ии)

$\widetilde{\alpha_f} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1}) \quad \Rightarrow \quad (C_0, C_1, \dots, C_{2^n-1}) = \widetilde{C_f}$.
Если $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1 \dots \beta_n)$, то $\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} = (\alpha_1 \oplus \beta_1, \dots, \alpha_n \oplus \beta_n)$.
$\widetilde{\alpha_f} = (\alpha_0 ... \alpha_{2^n-1})$ – кортеж значений ф-ии $f(x_1 ... x_n)$.
$\alpha_i = f(\sigma_1 ... \sigma_n)$, где $(\sigma_1 ... \sigma_n) \mid i = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k \cdot 2^{n-k}$.
Преобразованиями в $\widetilde{C_f}$ иднукцией по n:
$n = 1$. $\widetilde{\alpha_f} = (\alpha_0\alpha_1) \Rightarrow \widetilde{C_f} = (\alpha_0, \alpha_0 + \alpha_1)$
$n \to n+1 \quad f(y, x_1, ..., x_n)$:
$f_0(x_1 ... x_n) := f(0, x_1 ... x_n)$
$f_1(x_1 ... x_n) := f(1, x_1 ... x_n)$
$\widetilde{C_{f_0}}$ и $\widetilde{C_{f_1}}$ – известны по предположению индукции, тогда $\widetilde{C_f} = (\widetilde{C_{f_0}} \mid \widetilde{C_{f_0}} \oplus \widetilde{C_{f_1}})$.

4.3.7 Теорема 7

$\widetilde{C_f}$ – набор коэффициентов в ПЖ для f.

Доказательство. Индукция по n:
$n = 1 \quad f(x) = C_0 + C_1x$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \alpha_0 = C_0 \\ f(1) = \alpha_1 = C_0 + C_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = \alpha_0 \\ C_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \end{cases}$$

$n \to n+1$:
$\widetilde{C_{f_0}}$ и $\widetilde{C_{f_1}}$ – наборы к-тов ПЖ функций f_0 и f_1.
$f(y, x_1 ... x_n) =$ (это равенство надо ещё доказать!!!) $= \overline{y} f(0, x_1 ... x_n) \oplus y f(1, x_1 ... x_n) =$
$=(y \oplus 1) f_0(x_1 ... x_n) \oplus y f_1(x_1 ... x_n) = f_0(x_1 ... x_n) \oplus y(f_0(x_1 ... x_n) \oplus f_1(x_1 ... x_n))$
Заметим, что если k над $x_1 ... x_n$ имело номер v, то над мно-ом $y, x_1 ... x_n$ k имеет номер $k + 2^n$. □

4.4 Основные замкнутые классы БФ

4.4.1 Теорема 8 (о замкнутости основных классов БФ)

4.4.2 Теорема 9 (Поста)

4.4.3 Лемма 4 (о несамодвойственных функциях)

4.4.4 Лемма 5 (о нелинейной ф-ии