Высшая алгебра. II семестр

Валерий Авдеевич Чуркин

7 июня 2008 г.

Содержание

1 Линейное отображения и операторы

Определение 1.1. Пусть V и W — векторные пространства над полем K. Отображение $A\colon V \to W$ называется линейным, если:

$$\left.\begin{aligned} &A(x+y) = Ax + Ay \\ &A(\alpha x) = \alpha(Ax) \end{aligned}\right\} \forall x, y \in V \ \forall \alpha \in K$$

Равносильная формулировка:

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha(Ax) + \beta(Ay)$$

Пусть $W = V$, тогда линейное отображение называется линейным оператором (линейным преобразованием). Если $W = K$, то A — линейная функция (функционал).

Следствие.

$$A\left(\sum \alpha_i x_i\right) = \sum \alpha_i (Ax_i)$$

$$A(0) = A(0+0) = A(0) + A(0) \Rightarrow A(0) = 0$$

Пример 1.1. 1. *Геометрические отображения.*

(a) *Параллелограмм переходит в параллелограмм под воздействием A.*

(b) *Прямая переходит в прямую под воздействием A сохранением коэффициента пропорциональности между векторами.*

2. *Алгебраические отображения. $V = K^n$, $W = K^s$, K — поле. $A = (a_{ij})$ — матрица порядка $s \times n$ над K. $A\colon V \to W$ — умножение столбцов на матрицу A. $x \mapsto Ax$.*

3. *Функциональные отображения. $V = K[t]$ — алгебра многочленов над K. $D\colon f(t) \mapsto f'(t)$ — дифференцирование. $D\colon f(t) \mapsto \sum_{k=0}^{m} a_k f^{(k)}(t)$ — дифференциальный оператор. $I\colon f(t) \mapsto \int K(s,t) f(s) ds$.*

Теорема 1.1 (о свободе)**.** *Пусть V и W — векторные пространства над полем K, $e_1, \ldots, e_n$ — базис V, $a_1, \ldots, a_n$ —* произвольный *набор векторов из W. Тогда существует единственное линейное отображение $A\colon V \to W$ такое, что $Ae_{ij} = a_j$ $\forall j = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Докажем единственность. Пусть $A\colon V\to W$ — линейное отображение и $Ae_j = a_j\ \forall j$. Если $x\in V$, то $x=\sum\alpha_j e_j$, где $\alpha_j\in K$. Тогда:

$$Ax = A\left(\sum\alpha_j e_j\right) = \sum\alpha_j(Ae_j) = \sum\alpha_j a_j$$

Таким образом, A задается однозначно $\forall x\in V$.

Докажем существование. Зададим требуемое линейное отображение A формулой: $x=\sum\alpha_j e_j \Rightarrow Ax=\sum\alpha_j a_j$. Это отображение из V в W. Проверим линейность. Пусть $y=\sum\beta_j e_j$. Пусть $(x+y)=\sum(\alpha_j+\beta_j)e_j$. Тогда:

$$A(x+y)=\sum(\alpha_j+\beta_j)a_j = Ax+Ay=\sum\alpha_j a_j+\sum\beta_j a_j$$

$$\alpha x = \alpha\sum\alpha_j e_j = \sum(\alpha\alpha_j)e_j$$

$$A(\alpha x)=\sum(\alpha\alpha_j)a_j = \alpha\left(\sum\alpha_j a_j\right)=\alpha(Ax)$$

Таким образом, $Ae_j=a_j$. □

Определение 1.2. Пусть $e_1,\dots,e_n$ — базис V над полем K, $f_1,\dots,f_s$ — базис W над K, а $A\colon V\to W$ — линейное отображение. Пусть $Ae_j = \sum_i a_{ij}f_i$, где $a_{ij}\in K$. Тогда матрица:

$$A_f^e = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

составленной из координатных столбцов Ae_j в базисе $f_1,\dots,f_s$. Если $W=V$, то полагаем $f_1=e_1,\ \dots,\ f_n=e_n$. Тогда $A_e^e =: A_e$ и называется матрицей линейного оператора в базисе $e_1,\dots,e_n$.

Следствие. *Заданные базисы $e_1,\dots,e_n$ и $f_1,\dots,f_s$ и заданная матрицу (a_{ij}) порядка $s\times n$ над полем K однозначно задает линейное отображение $A\colon V\to W$.*

Пример 1.2. *$V=\{$многочлены от t степени $\leq 2\} =< 1,t,t^2 >$. $D\colon f(t)\mapsto f'(t)$ — оператор дифференцирования. Найдем матрицу оператора D в базисе $1,t,t^2$. Имеем:*

$$D1 = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2$$
$$Dt = 1 = 1\cdot 1+0\cdot t+0\cdot t^2$$
$$Dt^2 = x = 0\cdot 1 + 1\cdot t + 0\cdot t^2$$

$$D_{(1,t,t^2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 1.3. *$V = \{$многочлены от t степени $\leq 2\}$, $W = K$, базис $1, t, t^2$ в пространстве V, базис 1 в пространстве W. Линейное отображение $A\colon f(t) \mapsto f(c)$ — специализация в точке $c \in K$. Найти матрицу отображения оставляется читателю в качестве упражнения.*

1.1 Координаты образа

Теорема 1.2. *Пусть $A\colon V \to W$ — линейное отображение в пространствах над полем K. Пусть $x \in V$, $y = Ax$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис V, $f_1, \dots, f_s$ — базис W, x_e — координатный столбец x в базисе $e_1, \dots, e_n$, y_f — координатный столбец y в базисе $f_1, \dots, f_s$ и A_f^e — матрица линейного отображения A в паре базисов e и f. Тогда $y_f = A_f^e x_e$.*

Доказательство. Таким образом, действие любого линейного отображения в координатах сводится к умножению координатных столбцов на матрицу линейного отображения.

Имеем вектор $x = \sum x_j e_j$.

$$x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} A_f^e = (a_{ij}) \Rightarrow A_{e_j} = \sum_i a_{ij} f_i$$

$$y = Ax = A\left(\sum_j x_j e_j\right) = \sum_j x_j (Ae_j) = \sum_j x_j \left(\sum_i a_{ij} f_i\right)$$
$$= \sum_j \sum_i x_j a_{ij} f_i = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j\right) f_i$$

$$y_f = \begin{pmatrix} \sum_j a_{ij} x_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{sj} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_f^e x_e$$

$\square$

1.2 Замена координат при замене базисов

Определение 1.3. Матрицы A и $B = C^{-1}AC$ называются подобными или сопряженными.

Теорема 1.3. *Пусть $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$ — старый и новый базисы пространства V, пусть $C_1 \colon e \to e'$ — матрица перехода. Пусть $f_1, \dots, f_n$ и $f'_1, \dots, f'_n$ — старый и новый базисы пространства W, пусть $C_2 \colon f \to f'$ — матрица перехода. Если $A \colon V \to W$ — линейное отображение, тогда:*

$$A^{e'}_{f'} = C_2^{-1} A^e_f C_1$$

В частности, если $W = V$, $f = e$, $f' = e'$, то $C_1 = C_2 = C$ и $A_{e'} = C^{-1}A_eC$.

Доказательство. Пусть:

$$\begin{cases} x_e = C_1 x_{e'} \\ y_f = C_2 y_{f'} \\ y_f = A^e_f x_e \end{cases}$$

$$y_{f'} = C_2^{-1} y_f = C_2^{-1} A^e_f x_e = (C_2^{-1} A^e_f C_1) x_{e'} = A^{e'}_{f'} x_{e'}$$

Если линейные отображения совпадают в координатах, то и их матрицы равны.

$$\begin{pmatrix} \sum a_{ij}x_j \\ \vdots \\ \sum a_{sj}x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{1s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$$

□

1.3 Алгебра линейных операторов

Определение 1.4. Алгебра L над полем — это векторное пространство и кольцо с дополнительной аксиомой:

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) \qquad \forall \lambda \in K \ \forall a, b \in L$$

Пример 1.4.

$$L = M_n(K) \qquad L = K[t] \qquad K \text{ — } \textit{поле}$$

Теорема 1.4. *Пусть V — векторное пространство над полем K и $L(V)$ — множество всех линейных операторов пространства V. Тогда $L(V)$ образует алгебру над полем K относительно операций:*

$$\begin{aligned}
&(A+B)x := Ax + Bx\\
&(AB)x := A(B(x))\\
&(\lambda A)x := \lambda(Ax)
\end{aligned}$$

Эта алгебра $L(V)$ изоморфна алгебре матриц $M_n(K)$, где $n = \dim V$. В частности, $L(V)$ — ассоциативная алгебра с единицей и некоммутативна при $n \geq 2$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
(A+B)(x+y) = A(x+y) + B(x+y) &= Ax + Ay + Bx + By\\
&= (Ax+Bx) + (Ay+By) = (A+B)x + (A+B)y
\end{aligned}$$

$$(A+B)(\alpha x) = A(\alpha x) + B(\alpha x) = \alpha Ax + \alpha Bx = \alpha((A+B)x)$$

$$\begin{aligned}
(AB)(\alpha x + \beta y) = A(B(\alpha x + \beta y)) &= A(\alpha Bx + \beta By)\\
&= \alpha(A(Bx)) + \beta(A(By)) = \alpha((AB)x) + \beta((AB)y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda A)(\alpha x + \beta y) = \lambda(A(\alpha x + \beta y)) = \lambda(\alpha Ax + \beta Ay) = \lambda\alpha Ax + \lambda\beta Ay =\\
= \alpha(\lambda A)x + \beta(\lambda A)y
\end{aligned}$$

Проверим изоморфизм $L(V)$ и $M_n(K)$, $n = \dim V$. Фиксируем в пространстве V базис $e_1, \ldots, e_n$. Зададим соответствие по правилу: $A \leftrightarrow A_e$. Это соответствие взаимно однозначно ввиду следствия из теоремы о свободе. Надо проверить:

$$\left.\begin{aligned}
A \leftrightarrow A_e\\
B \leftrightarrow B_e
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases}
A + B \leftrightarrow A_e + B_e\\
A \cdot B \leftrightarrow A_e \cdot B_e\\
\lambda A \leftrightarrow \lambda A_e
\end{cases}$$

Пусть:

$$A_{e_j} = \sum_i a_{ij} e_i \qquad A_e = (a_{ij})$$

$$B_{e_j} = \sum_i b_{ij} e_i \qquad B_e = (b_{ij})$$

Тогда:

$$(A+B)_{e_j} = A_{e_j} + B_{e_j} = \sum_i a_{ij}e_i + \sum_i b_{ij}e_i = \sum_i (a_{ij}+b_{ij})e_i$$

$$(A+B)_e = (a_{ij}+b_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij}) = A_e + B_e$$

$$\begin{aligned}(AB)_e = A(B_{e_j}) = A\left(\sum_k b_{kj}e_k\right) &= \sum_k b_{kj}A_{e_k} \\ &= \sum_k b_{kj}\left(\sum_i a_{ik}e_i\right) = \sum_i\left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)e_i\end{aligned}$$

$$(AB)_e = \left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right) = (a_{ij})(b_{ij}) = A_eB_e$$

$$(\lambda A)_e = \lambda(A_{e_j}) = \lambda\left(\sum_k a_{kj}e_k\right) = \sum_k (\lambda a_{kj})\, e_k = (\lambda a_{ij}) = \lambda(a_{ij}) = \lambda A_e$$

Значит, $L(V) \simeq M_n(K)$ — ассоциативная алгебра с единицей, некоммутативная при $n \geq 2$. Значит, и $L(V)$ — такая же алгебра.

Проверить аксиомы алгебры непосредственно оставляется читателю в качестве упражнения. Доказать, что множество линейных отображений $L(V,W)$ пространства V над полем K в пространство W над K образуют векторное пространство относительно сложения и умножения на скаляр. Оно изоморфно пространству матриц порядка $s\times n$ над K, где $s = \dim W$ и $n = \dim V$. $\square$

1.4 Ядро и образ линейного отображения

Определение 1.5. Пусть $A\colon V \to W$ — линейное отображение векторных пространств над полем K.

$$\operatorname{Ker} A := \{v \in V \mid Av = 0\} \qquad \text{— ядро отображения}$$

$$\operatorname{Im} A := \{Av \mid v \in V\} \qquad \text{— образ отображения}$$

Теорема 1.5. *В предыдущих обозначениях:*

1. $\operatorname{Ker} A, \operatorname{Im} A$ — *подпространства.*
2. $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = \dim V$.

Доказательство. Достаточно проверить, что $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$ замкнуты относительно сложения и умножения на скаляр.

$$Au = 0 \quad Av = 0 \Rightarrow A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av = 0 + 0 = 0 \in \operatorname{Ker} A$$

$$Au, Av \in \operatorname{Im} A \Rightarrow A(\alpha u + \beta v) = \alpha(Au) + \beta(Av) = A(\alpha u + \beta v) \in \operatorname{Im} A$$

Пусть $u_1, \ldots, u_d$ — базис $\operatorname{Ker} A$. пусть $w_1 = Av_1, \ldots, w_r = Av_r$ — базис $\operatorname{Im} A$. Достаточно показать, что $u_1, \ldots, u_d, w_1, \ldots, w_r$ — базис V. Проверим линейную независимость:

$$\sum \alpha_i u_i + \sum \beta_j v_j = 0$$

Применим A. Получаем:

$$\sum \beta_j w_j = 0 \Rightarrow \beta_j = 0 \ \forall j \Leftarrow w_1, \ldots, w_r \text{ — базис } \operatorname{Im} A$$

Тогда:

$$\sum \alpha_i u_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i \Leftarrow u_1, \ldots, u_d \text{ — базис } \operatorname{Ker} A$$

Проверим максимальность: Пусть $v \in V$ — произвольный вектор. Значит:

$$\begin{aligned} Av \in \operatorname{Im} A \Rightarrow \exists \beta_j \ : \ Av = \sum_j \beta_j w_j = \sum_j \beta_j (Av_j) = A\left(\sum_j \beta_j v_j\right) \\ \Rightarrow A\left(v - \sum_j \beta_j v_j\right) = 0 \Rightarrow \left(v - \sum_j \beta_j v_j\right) \in \operatorname{Ker} A \\ \Rightarrow \exists \alpha_i \ : \ v - \sum_j \beta_j v_j = \sum_i \alpha_i u_i \end{aligned}$$

$$v = \sum_i \alpha_i u_i + \sum_j \beta_j v_j$$

□

Определение 1.6. Число $\dim \operatorname{Im} A$ называется рангом линейного отображения A. Обозначается $\operatorname{rk} A$. Число $\dim \operatorname{Ker} A$ называется дефектом линейного отображения A или корангом. Обозначается $\operatorname{df} A$.

Пример 1.5. *Пусть K — поле, $V = K^n$, $W = K^s$, $A = (a_{ij})$ — матрица порядка $s \times n$. Найдем ядро м образ линейного отображения $x \mapsto Ax$. $v \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow Av = 0 \Leftarrow v$ — решение однородной системы линейных уравнений $Ax = 0$ Значит, $\operatorname{Ker} A$ — пространство решений системы линейных уравнений, а его базис - это фундаментальная система решений.*

$$\operatorname{Im} A = \{Av \mid v \in K^n\}$$
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \Rightarrow Ax = \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{sj}x_j \end{pmatrix} = \sum_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{sj} \end{pmatrix} x_j$$

Ax — линейная комбинация столбцов A с коэффициентами $x_1, \ldots, x_n \in K$. Значит, $\operatorname{Im} A$ — линейная оболочка столбцов A. Значит, $\dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rk} A$. Базис $\operatorname{Im} A$ — базис линейной оболочки столбцов A, например, базис системы столбцов A.

1.5 Обратные операторы

Теорема 1.6. *Для линейного оператора A векторного пространства V над полем K следующие утверждения равносильны:*

1. $\operatorname{Ker} A = 0$,
2. $\operatorname{Im} A = V$,
3. *A — взаимно однозначное отображение V на V,*
4. *A^{-1} существует (и линейный),*
5. *A (образ любого базиса V) — базис V,*
6. *A (образ некоторого базиса V) — базис V,*
7. *Матрица A обратима в некотором базисе,*
8. *Матрица A обратима в любом базисе,*

Такой линейный оператор называют обратимым или невырожденным.

Доказательство. $1 \Leftrightarrow 2$ ввиду формулы: $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = \dim V$.
2 и 3 $\Rightarrow$ 3. A отображает V на V, так как $\operatorname{Im} A = V$.

$$Au = Av \Rightarrow A(u - v) = A0 = 0 \Rightarrow u - v \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow u - v = 0 \Rightarrow u = v$$

$3 \Rightarrow 4$. A^{-1} существует по определению обратного отображения. Проверим линейность A^{-1}. Пусть $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in K$. Пусть $Au = x$, $Av = y$. Тогда:

$$\begin{aligned} A^{-1}(\alpha x + \beta y) = A^{-1}(\alpha(Au) + \beta(Ay)) &= A^{-1}(A(\alpha u + \beta v)) \\ &= \alpha u + \beta v = \alpha(A^{-1}x) + \beta(A^{-1}y) \end{aligned}$$

$4 \Rightarrow 5$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — произвольный базис V. Проверим, что $Ae_1, \dots, Ae_n$ — базис V. Проверим линейную независимость. Пусть:

$$\sum_i \alpha_i(Ae_i) = 0 \Rightarrow A\left(\sum_i \alpha_i e_i\right) = A0$$

Применим A^{-1}:

$$\sum_i \alpha_i e_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0\ \forall i$$

Максимальность очевидно из размерности V и линейной независимости.

$5 \Rightarrow 6$. Очевидно.

$6 \Rightarrow 7$. Предположим, что $e_1, \dots, e_n$ и $Ae_1, \dots, Ae_n$ — базисы V. Тогда A_e совпадает с матрицей перехода от базиса $e_1, \dots, e_n$ к $e'_1 = Ae_1, \dots, e'_n = Ae_n$. Матрица перехода всегда обратима, значит A_e обратима.

$7 \Rightarrow 8$. Пусть $\det A_e \neq 0$. Тогда:

$$\det(C^{-1}A_eC) = \det A_e \neq 0$$

Так как матрицы оператора в различных базисах подобны, то утверждение доказано.

$8 \Rightarrow 1$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — некоторый базис V и $\det A_e \neq 0$. Докажем, что $\operatorname{Ker} A = 0$. Пусть $Av = 0$. Координатный столбец $(Av)_e = 0$. $A_e v_e = 0$. Значит, v_e — решение крамеровой системы однородных линейных уравнений, значит $v_e = 0$, $v = 0$ и $\operatorname{Ker} A = 0$. $\square$

1.6 Инвариантные подпространства

Определение 1.7. Пусть $A\colon V \to V$ — линейный оператор векторного пространства V над полем K. Подпространство U из V называется инвариантным относительно A, если $AU \subseteq U \Leftrightarrow u \in U \Rightarrow Au \in U$.

Пример 1.6. *$\{0\}$ и V — тривиальные инвариантные подпространства относительно любого линейного оператора $A\colon V \to V$.*

Пусть P_n — пространство многочленов степени $\leq n$ от переменной t над полем K. Тогда $\{0\} < P_0 < P_1 < \dots < P_{n-1} < P_n$ — цепочка подпространств, инвариантных отсительно оператора дифференцирования $D\colon f(t) \mapsto f'(t)$.

Определение 1.8. Пусть U — инвариантное подпространство пространства V относительно оператора A. Тогда $\overline{A}\colon u \mapsto Au$ — линейный оператор на пространстве U. Он называется сужением (или ограничением) A на U. Проверим линейность $\overline{A}$:

$$\overline{A}(\alpha u + \beta u') = A(\alpha u + \beta u') = \alpha Au + \beta Au'$$

Кроме того, возникает линейный оператор $\widetilde{A}$ на фактор-пространстве $\widetilde{V} = V/U$. $\widetilde{A}\widetilde{v} = \widetilde{Av}$. Проверим корректность определения:

$$\tilde{v} = \tilde{w} \Leftrightarrow v - w \in U \Rightarrow A(v-w) \in U \Rightarrow Av - Aw \in U \Rightarrow \widetilde{Av} = \widetilde{Aw}$$

Проверим линейность $\widetilde{A}$:

$$\tilde{A}(\alpha\tilde{u} + \beta\tilde{w}) = \tilde{A}\widetilde{\alpha v + \beta} w = A(\widetilde{\alpha v + \beta} w) = \alpha A\widetilde{v + \beta} Aw = \alpha\widetilde{Av} + \beta\widetilde{Aw} = \\ = \alpha(\tilde{A}\tilde{v}) + \beta(\tilde{A}\tilde{w})$$

Оператор $\tilde{A}$ называется индуцированным на фактор-пространство V/U.

Теорема 1.7. *Пространство V над полем K имеет нетривиальное подпространство U, инвариантное относительно оператора $A\colon V \to V \Leftrightarrow$ матрица A в подходящем базисе V является полураспавшейся.*

$$\exists e_1, \ldots, e_n \text{ — базис } V \;\; A_e = \begin{pmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{pmatrix} \tag{1}$$

где P — квадратная подматрица порядка $1 \leq k < n$. При этом $P = (\overline{A})_{e_1,\ldots,e_n}$, $Q = (\tilde{A})_{\tilde{e_1},\ldots,\tilde{e_n}}$.

Доказательство. $Rightarrow$ Пусть $AU = U$, $\dim U = k$, $0 < k < n$. Выберем базис $e_1, \ldots, e_k$ подпространства U. Дополним его до базиса V: $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$.

$$\begin{aligned}
&Ae_1 = a_{11}e_1 + \cdots + a_{k1}e_k \\
&\vdots \\
&Ae_k = a_{1k}e_1 + \cdots + a_{kk}e_k \\
&Ae_{k+1} = a_{1\ k+1}e_1 + \cdots + a_{n\ k+1}e_n \\
&\vdots \\
&Ae_n = a_{1n}e_1 + \cdots + a_{nn}e_n
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$. Предположим, что в базисе $e_1, \dots, e_n$ матрица оператора A имеет вид 1. Пусть $U :=< e_1, \dots, e_k$. Тогда $AU \subseteq U$. Так как $Ae_{ij} \in U$ при $1 \leq j \leq k$. $\square$

Лемма 1.8. *Доказать, что $V = U \oplus W$, где U и W — инвариантные подпространства относительно A, $U \neq 0$, $W \neq 0 \Leftrightarrow$ существует базис $e_1, \dots, e_n$ такой, что:*

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Доказательство. Оставляется читателю в качестве упражнения $\square$

1.7 Собственные вектора и собственные значения линейного оператора

Определение 1.9. Пусть A — линейный оператор в пространстве V над полем K. Вектор $v \in V$ и скаляр $\lambda \in K$ называются собственными относительно A, если $Av = \lambda v$ при $v \neq 0$.

Иначе говоря, $< v >$ — инвариантное одномерное подпространство относительно A.

Предположим, что известна матрица A_e оператора A в базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства V. Как найти собственные векторы и собственные значения для A? Равносильно:

$$\begin{cases} Av = \lambda v \qquad v \neq 0 \\ Av = \lambda E v \qquad v \neq 0 \\ (A - \lambda E)v = 0 \qquad v \neq 0 \\ \operatorname{Ker}(A - \lambda E) \neq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Значит $A - \lambda E$ — вырожденный оператор, $\det(A - \lambda E) = 0$, $\det(A_e - \lambda E) = 0$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Это уравнение называется характеристическим. Его левая часть называется характеристикой оператора A.

$$\chi_A(t) = \det(A_e - tE)$$

Теорема 1.9. *В предыдущих обозначениях:*

1. *Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса.*

2. *Всякое собственное значение — корень χ_A.*

3. *Всякий корень χ_A, принадлежащий полю скаляров, является собственным значением.*

4. *Множество собственных векторов оператора A, отвечающих собственному значению λ, вместе с нулем образуют подпространство $\operatorname{Ker}(A - \lambda E)$.*

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda E) = \dim V - \operatorname{rk}(A - \lambda E)$$

Доказательство. Матрицы оператора в разных базисах подобны: $A' = C^{-1}AC$

$$\begin{aligned}\det(A' - tE) = \det(C^{-1}AC - tE) = \det(C^{-1}(A - tE)C) \\ = \det C^{-1} \det(A - tE) \det C = \det(A - tE)\end{aligned}$$

Остальные пункты следуют из 2. □

Определение 1.10. Спектр оператора - множество корней характеристического многочлена. Обозначается $\operatorname{Sp} A$.

Пример 1.7.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad V = \mathbb{R}^2 \ qquad A\colon x \mapsto Ax \qquad x \in \mathbb{R}^2$$

Выразим матрицу A в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^2$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Ae_1 = 2e_1 + 3e_2 \\ Ae_2 = e_1 + 4e_2 \end{cases}$$

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A$$

$$|A_e - tE| = \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 3 & 4-t \end{vmatrix} = (2-t)(4-t) - 3 = (t-1)(t-5)$$

$$\operatorname{Sp} A = \{1, 5\}$$

$$\operatorname{Ker}(A-E):\ (A-E)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

Базис $\operatorname{Ker}(A-E)$ — $\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}$ — *Ф. С. Р.*

$$\operatorname{Ker}(A-5E):\ \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-3x_1 + x_2 = 0$$

Базис $\operatorname{Ker}(A-5E)$ — $\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}$ — *Ф. С. Р.*

Вывод: A растягивает плоскость в пять раз параллельно прямой Rv_2 относительно неподвижной прямой Rv_1.

Пусть:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad V = \mathbb{R}^2 \qquad A\colon x \mapsto Ax$$

Тогда:

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = t^2 + 1 = (t-i)(t+i)$$

$$\operatorname{Sp} A = \{i; -1\} \cap \mathbb{R} = \emptyset$$

Вывод: собственных чисел и собственных векторов нет.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad V = \mathbb{R}^2 \qquad A\colon x \mapsto Ax$$

Тогда:

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2$$

$$\operatorname{Sp} A = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Ker}(A - 0E) = \operatorname{Ker} A$$

$$Ax = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$v_1 = \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$ — *Ф. С. Р. Базиса* $\mathbb{R}^2$*, состоящего из собственных векторов нет.*

Определение 1.11. Подпространство $V_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda E)$ называется собственным подпространством оператора A, отвечающего собственному значению λ.

1.8 Диагонализируемые операторы

Теорема 1.10. *Пусть A — линейный оператор векторного пространства V над полем K и пусть $\operatorname{Sp} A = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ при этом $\operatorname{Sp} A \subseteq K$. Обозначим $V_i = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i E)$ $(i = 1, \ldots, s)$.*

Следующие утверждения равносильны:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} \dim V_i \geq \dim V$.

2. $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots V_s$.

3. *V имеет базис, состоящий из собственных векторов.*

4. *Матрица оператора A в любом базисе V подобна диагональной над K (диагонализируема над K).*

Такой оператор A называется диагонализируемым или оператором простой структуры.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$ Сначала покажем индукцией по s, что сумма $V_1 + V_2 + \cdots + V_s$ всегда является прямой. При $s = 1$ это очевидно.

Индуктивный переход от $s - 1$ к s. Докажем, что:

$$V_s \cap (V_1 + V_2 + \cdots + V_{s-1}) = \{0\}$$

Тогда:

$$v_s = v_1 + v_2 + \cdots + v_s \qquad v_i \in V_i \ \forall i$$

Применим оператор A к этому равенству:

$$\lambda_s v_s = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{s-1} v_{s-1}$$

Умножим первое равенство на λ_s и вычтем второе.

$$0 = (\lambda_s - \lambda_1) v_1 + \cdots + (\lambda_s - \lambda_{s-1}) v_{s-1}$$

По предположению индукции $V_1 + \cdots + V_{s-1}$ — прямая сумма. Значит $\lambda_s - \lambda_i = 0$ при $i = 1, \ldots, s$.

Но $\lambda_s - \lambda_i \neq 0$ при $i < s$. Значит, $v_i = 0$ и $v_s = 0$. Значит, $V_s \cap \left(\sum_{i<s} V_i\right) = \{0\}$.

$$V_1 + \cdots + V_s = (V_1 + \cdots + V_{s-1}) \oplus V_s = (V_1 \oplus V_{s-1}) \oplus V_s$$

$$\sum \dim V_i \geq \dim V \Rightarrow \dim(V_1 + \cdots + V_s) \geq \dim V$$

$$V_1 + \dots + V_s \leq V \Rightarrow V_1 \oplus \dots \oplus V_s = V$$

$2 \Rightarrow 3$. Требуемый базис — объединение базисов подпространств V_i $(i = 1, \dots, s)$.

$3 \Leftrightarrow 4$. Пусть $v_1, \dots, v_n$ — базис V.

$$Av_j = \lambda'_j v_j$$

$$A_* = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda'_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda'_s \end{pmatrix}$$

Матрица A в произвольном базисе подобна матрице A_* в базисе V. Верно и обратное утверждение.

$3 \Rightarrow 1$ Пусть V имеет базис $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, состоящий из собственных векторов оператора A с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Разобьем его на части. B_i состоит из векторов с собственным значением λ_i. Тогда:

$$B_i \leq V_i \qquad |B_i| \leq \dim V_i \Rightarrow \dim V = |B| = \sum_{i=1}^{s} |B_i| \leq \sum_{i=1}^{s} V_i$$

□

Лемма 1.11. *Пусть A — линейный оператор в пространстве V над $\mathbb{C}$ и пусть $\chi_A(t)$ не имеет кратных корней. Доказать, что A диагонализируем.*

Доказательство. Оставляется читателю в качестве упражнения □

1.9 Теорема Перрона-Фробениуса

В приложениях к теории часто состояние системы характеризуется набором неотрицательных вещественных чисел. Переход в другое состояние часто (приблизительно) задается переходом типа $x \mapsto Ax = y$, где A — матрица из неотрицательных вещественных чисел. Нас интересует прогноз.

Определение 1.12. Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ и матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ называются неотрицательными, если $x_i \geq 0\ \forall i$, $a_{ij} \geq 0\ \forall j$.

Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ и матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ называются положительными, если $x_i > 0\ \forall i$, $a_{ij} > 0\ \forall j$.

Определим частичные порядки на $\mathbb{R}^n$ и на $M_n(K)$, полагая:

$$x \geq y \Leftrightarrow x - y \geq 0$$

$$A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$$

Пример 1.8.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ несравнимы}$$

Лемма 1.12. *Если $x \geq y$, $A \geq 0$, то $Ax \geq Ay$.*
Если $x \geq y$, $A > 0$, то $Ax > Ay$.

Доказательство.

$$Ax - Ay = A(x - y) = \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j}(x_j - y_j) \\ \vdots \\ \sum_j a_{nj}(x_j - y_j) \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Надо доказать, что:

$$\sum_j a_{ij}(x_j - y_j) > 0 \ \forall i$$

$$x \neq y \Rightarrow \exists j: \ x_j - y_j > 0, \ a_{ij} > 0 \Rightarrow \sum_j a_{ij}(x_j - y_j) > 0 \ \forall i$$

□

Пусть A — неотрицательная матрица порядка n и её граф Γ_A задается множеством вершин $V(\Gamma_A) = \{1, 2, \ldots, n\}$ и множеством направленных рёбер $E(\Gamma_A) = \{(i, j) \mid a_{ij} > 0\}$.

Матрица $A \geq 0$ называется неразложимой, если её граф Γ_A связен, то есть из любой его вершины можно перейти в любую другую вершину по направленным рёбрам. В противном случае, матрица называется разложимой.

Лемма 1.13. *Матрица $A \geq 0$ разложима $\Leftrightarrow$ существует A-инвариантная координатная плоскость.*

Доказательство. Оставляется читателю в качестве упражнения □

Лемма 1.14. *Пусть A — неразложимая неотрицательная вещественная матрица порядка n. Тогда матрица $S = \sum\limits_{q=0}^{n-1} A^q$ положительная.*

Доказательство. Обозначим $A^q = (a_{ij}^{(q)}$ $(1 \le i, j \le n)$. Докажем индукцией по q, что $a_{ij}^{(q)} > 0 \Leftrightarrow$ в графе Γ_A существует ориентированный путь длины q, соединяющий вершины i и j.

$q = 0$. $A^0 = E$.

$q = 1$. Верно по определению графа Γ_A.

$q - 1 \to q$. Имеем:

$$a_{ij}^{(q)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(q-1)} a_{kj} > 0 \Leftrightarrow \exists k : \ a_{ik}^{(q-1)} a_{kj} > 0 \Leftrightarrow a_{ik}^{(q-1)} > 0, \ a_{kj} > 0 \Leftrightarrow$$

Существует путь длины q, соединяющий вершины i и j.

Предположим, что Γ_A связен, тогда $\forall i, j$ существует путь длины $q \le n - 1$, соединяющий вершины i и j. Тогда $a_{ik}^{(q-1)} > 0$. Отсюда $\sum_{q=0}^{n} A^q > 0$. □

Определение 1.13. Пусть $A \ge 0$, $x \ge 0$, $x \ne 0$. Число $\lambda(x) = \sup\{\lambda \mid \lambda x \le Ax\}$ называется максимальной скоростью роста в направлении вектора x для матрицы A.

Определение 1.14. Число $\lambda(A) = \sup\{\lambda(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, x \ge 0, x \ne 0\}$ называются максимальной скоростью роста для матрицы A.

Пример 1.9.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda x \le Ax \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda x_1 \le 2x_1 + x_2 \\ \lambda x_2 \le x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \le \dfrac{2x_1 + x_2}{x_1} \\ \lambda \le \dfrac{x_1}{x_2} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \le \min\left\{\frac{2x_1 + x_2}{x_1}; \frac{x_1}{x_2}\right\}$$

Обозначим $t = \frac{x_2}{x_1}$: $\lambda \le \min\{2 + t; \frac{1}{t}\}$.

$\max \lambda(x) = ?$

$$2 + t = \frac{1}{t} \Rightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\max \lambda(x) = \sqrt{2} - 1$$

Лемма 1.15. *Для матрицы $A \geq 0$ направление и скорость максимального роста существуют.*

Доказательство. Ввиду примера:

$$\lambda(x) = \min \left\{ \frac{\sum_j a_{ij} x_j}{x_i} \mid i = 1, \ldots, n \right\} < \infty$$

Кроме того, $\lambda(\alpha x) = \lambda(x)$, при $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Обозначим:

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

стандартный $(n-1)$-мерный симплекс. Ясно, что Δ — замкнутое ограниченное множество (компакт). Функции $\frac{\sum_j a_{ij} x_j}{x_i}$ непрерывны в своей области определения, минимум нескольких непрерывных функций — непрерывная функция. Поэтому $\lambda(x)$ — непрерывна на Δ. Тогда $\lambda(x)$ достигает своего максимума (и минимума тоже) в некоторой точке из Δ. Поэтому $\exists \lambda(A) = \sup\{\lambda(x)\} < \infty$. Кроме того, $\exists x^0 : \ \lambda(A) = \lambda(x^0)$, $x^0 \in \Delta$. □

Теорема 1.16 (Перрона-Фробениуса)**.** *Пусть A — вещественная, неотрицательная, неразложимая матрица порядка n. Тогда:*

1. *Направление максимального роста положительно, единственно и задается положительным собственным вектором v матрицы A. $Av = \lambda v$, $\lambda > 0$. При этом $\lambda = \lambda_{\max} = \lambda(A)$ — максимальная скорость роста. Оно называется числом Перрона-Фробениуса матрицы A (максимальное, положительное, вещественное собственное значение матрицы A).*

2. *$\lambda(A^T) = \lambda(A)$*

3. *Если $Ax = \alpha x$, $x \geq 0$, $x \neq 0$, $\alpha \geq 0$, то $\alpha = \lambda = \lambda(A)$, $x = \beta v$, $\beta > 0$.*

4. *характеристические корни матрицы A по модулю не больше $\lambda(A)$.*

Доказательство. Пункт 1. По лемме 3 существует скорость и направление максимального роста для матрицы A. Пусть $v \geq 0$, $v \neq 0$ задает направление, а λ — скорость. Тогда по определению:

$$\begin{cases} \lambda v \leq Av \\ \lambda \text{ — максимальный} \end{cases}$$

Предположим, что $\lambda v \neq Av$, то есть $Av \geq \lambda v$ и $Av \neq \lambda v$. По лемме 2 матрица $S = \sum\limits_{q=0}^{n-1} A^q$ положительна. По лемме 1:

$$S(Av) > S(\lambda v)$$

$$A(Sv) > \lambda(Sv)$$

Тогда λ можно увеличить с сохранением неравенства:

$$ASv \geq \lambda' Sv \qquad \lambda' > \lambda$$

Это противоречит максимальности λ.

Значит, $Av = \lambda v$. Иначе говоря, v — собственный вектор. Тогда $Sv > 0$, так как $S > 0$.

$$Sv = \left(\sum_{q=0}^{n-1} A^q\right) v = \left(\sum_{q=0}^{n-1} \lambda^q\right) v > 0 \Rightarrow v > 0$$

Пусть есть еще один вектор u, $Au = \lambda u$. Предположим, что v, u линейно независимы. Пусть:

$$\alpha = \min\left\{\frac{v_i}{u_i} \mid i = 1, \ldots, n\right\}$$

$$w_i = v_i - \alpha u_i \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{v_i}{u_i} \ \forall i$$

С другой стороны $\exists i: \ w_i = 0$.

$$Aw = \lambda w \qquad Sw = \left(\sum_{q=0}^{n-1} \lambda^q\right) w > 0$$

Противоречие. Пункт 1 доказан.

Пункт 2. Матрица A^T неразложима. Пусть: $\lambda' := \lambda(A^T)$ — число Перрона-Фробениуса.

$$A^T u = \lambda' u \qquad u > 0$$

Тогда:

$$\lambda'(u^T v) = (\lambda' u)^T v = (A^T u)^T v = u^T A v = u^T(\lambda v) = \lambda'(u^T v)$$

Но $u^T v > 0$. Поэтому $\lambda = \lambda'$.

Пункт 3. Пусть: $Ax = \lambda' x$, $x \geq 0$, $x \neq 0$.

$$\lambda'(u^T x) = u^T(\lambda' x) = u^T(Ax) = (A^T u)^T x = (\lambda u)^T x = \lambda(u^T x)$$

Так как $u > 0$, $x \geq 0$, $x \neq 0$, то $u^T x > 0$. Поэтому $\lambda' = \lambda = \lambda(A)$. Ввиду пункта 1 $x = \alpha v$ $(\alpha > 0)$.

Пункт 4. Пусть $\lambda' \in \operatorname{Sp} A$. $\lambda' \in \mathbb{C}$.

$$\det(A - \lambda' E) = 0$$

Согласно определению оператора $x \mapsto Ax$, $x \in \mathbb{C}^n$, в $\mathbb{C}^n$ существует собственный вектор $w \neq 0$: $Aw = \lambda' w$.

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \Rightarrow |w_+| = \begin{pmatrix} |w_1| \\ \vdots \\ |w_n| \end{pmatrix} w_+ \in \mathbb{R}^n \quad w \neq 0 \quad w \geq 0$$

$$|\lambda'| w_+ = \begin{pmatrix} |\lambda' w_1| \\ \vdots \\ |\lambda' w_n| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\sum_{j=1}^n a_{1j} w_j| \\ \vdots \\ |\sum_{j=1}^n a_{nj} w_j| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} |w_j| \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} |w_j| \end{pmatrix} = Aw_+$$

$$|x| \leq \lambda(w_+) \leq \max \lambda(x) = \lambda(A)$$

$\square$

Пример 1.10.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_A(t) = (-t)^2 + \operatorname{tr} A \cdot t + \det A = t^2 - 2t - 1$$

$$t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \lambda(A) = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow (A - \lambda E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = (1 + \sqrt{2}) x_2$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.10 Нильпотентные операторы

Определение 1.15. Линейный оператор N векторного пространства V над полем K называется нильпотентным, если $\exists k \in \mathbb{N}: \ N^k = 0$.

Пример 1.11. *V — пространство многочленов степени не выше n. $\dim V = n+1$. D — оператор дифференцирования. $D^{n+1} = 0$. При $n > 0$ оператор $D \neq 0$.*

Теорема 1.17. *Ненулевой нильпотентный оператор недиагонализируем.*

Доказательство. Пусть $N\colon V \to V$ — нильпотентный оператор векторного пространства V над полем K и $N^k = 0$, $N \neq 0$.

Предположим, что оператор диагонализируем $\Leftrightarrow$ V имеет базис из собственных векторов относительно N.

$$N_j = \lambda_j v_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

Тогда:

$$N^2 v_j = N(N(\lambda_j v_j)) = \lambda_j N v_j = \lambda_j^2 v_j$$

$$N^k v_j = \lambda_j v_j = 0 \qquad v_j \neq 0$$

$$\lambda_j^k = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0 \quad \forall j$$

$$N v_j = 0 \ \forall j \Rightarrow N = 0$$

Противоречие. □

Определение 1.16. Последовательность векторов

$$v, Nv, N^2 v, \ldots, N^{k-1} v$$

называют ниль-слоем высоты h с началом v, если $N^h v = 0$.

Пример 1.12.

$$\frac{x^n}{n!}, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \ldots, x, 1$$

Ниль-слой высоты $n+1$ с началом $\frac{x^n}{n!}$ относительно D.

Определение 1.17. Ниль-таблица (НТ) оператора N — это набор ниль-слоев относительно N с общей нижней горизонтальной границей.

Определение 1.18. Следующие преобразования ниль-таблицы называются элементарными:

1. Прибавление к слою высоты h нижнего отрезка из другого слоя высоты $\geq h$, умноженного на скаляр.

2. Умножение слоя на ненулевой скаляр.

3. Перестановка слоев.

4. Исключение нулевых векторов сдвигом слоя вниз.

Лемма 1.18. *Элементарные преобразования ниль-таблицы сохраняют свойство быть ниль-таблицей относительно N и сохраняют линейную оболочку векторов ниль-таблицы.*

Доказательство. Рассмотрим фрагмент ниль-таблицы:

$$\begin{pmatrix} u & v \\ Nu & Nv \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u+v & v \\ Nu+Nv & Nv \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u & v \\ Nu & Nv \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda u & v \\ \lambda Nu & Nv \end{pmatrix}$$

$$N(u+v) = Nu + Nv \qquad N(\lambda u) = \lambda Nu$$

Для третьего и четвертого типа преобразований утверждение очевидно.

При элементарных преобразованиях системы векторов линейная оболочка не изменяется. □

Лемма 1.19. *Если нижний этаж ниль-таблицы линейно независим, то и множество всех векторов ниль-таблицы линейно независимо.*

Доказательство. Пусть $v_1, \ldots, v_s$ — начала ниль-слоев ниль-таблицы. Пусть множество векторов ниль-таблицы линейно зависимо.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j} \alpha_{ij} N^i v_j = 0 \\ \exists \alpha_{ij} \neq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Пусть $\alpha_{pq} \neq 0$ коэффициент при самом высоком векторе ниль-таблицы. И пусть ниже его r векторов. Применим к 3 оператор N^r. Получим нетривиальную линейную комбинацию нижнего этажа, равную нулю. Это противоречит условию леммы. Линейная независимость доказан. □

Теорема 1.20. *Всякое конечномерное векторное пространство V относительно нильпотентного оператора N имеет ниль-базис, то есть базис — ниль-таблица максимальных слоев.*

Если s_h — число максимальных слоев высоты h. В любом нильбазисе:

$$s_h = r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1}$$

$$r_i = \dim N^i v = \operatorname{rk} N$$

Поэтому вид ниль-базиса зависит лишь от N и V.

Доказательство. Докажем существование ниль-базиса.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — некоторый базис V. Составим ниль-таблицу с началом $e_1, \ldots, e_n$ (относительно N).

$$T_1 = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \\ Ne_1 & \ldots & Ne_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ N^{k-1}e_1 & \ldots & N^{k-1}e_n \end{pmatrix} \qquad N^k \equiv 0$$

Элементарными преобразованиями перестроим T_1 в базисе V. Исключим нулевые векторы сдвигом вниз. Если векторы линейно независимы, то есть ненулевой вектор, который выражается через векторы, принадлежащии более длинным слоям. На его месте можно получить нулевой вектор и сдвинуть слой вниз. Значит число векторов в ниль-таблице уменьшается и продолжим этот процесс до получения ниль-таблицы T_2 с линейно независимым нижним этажом.

По лемме 2 все векторы T_2 линейно независимы. По лемме 1 $< T_2 >=< T_1 >= V$ по выбору T_1.

Докажем единственность.

Пусть дан некоторый ниль-базис. По нему легко найти размерность подпространств N^iV.

$$\begin{cases} r_0 = n = \dim V = s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \cdots + ns_n \\ r_1 = \dim NV = s_2 + 2s_3 + \cdots + (n-1)s_n \\ r_2 = \dim N^2V = s_3 + 2s_4 \cdots + (n-2)s_n \end{cases}$$

Вычтем из каждого уравнения следующее, получим:

$$\begin{cases} r_0 - r_1 = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n \\ r_1 - r_2 = s_2 + s_3 + \cdots + s_n \\ r_2 - r_3 = s_3 + \cdots + s_n \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} (r_0 - r_1) - (r_1 - r_2) = s_1 \\ (r_1 - r_2) - (r_2 - r_3) = s_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

$$s_h = r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1}$$

□

Пример 1.13.

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad N^2 = 0$$

Найдем ниль-базис:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc} & 0 \\ & 1 \\ & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$Nf_1 = 0 \qquad Nf_2 = 0 \qquad Nf_3 = f_3$$

$$N_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.11 Леммы о расщеплении на инвариантные подпространства

Пусть $A\colon V \to V$ — линейный оператор.

Найдем расщепление V в прямую сумму A-инвариантные подпространств:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_j \qquad AV_j \subseteq V_j \ \forall j \qquad \dim V_j \text{ — минимальная}$$

В этом случае действие A на V расщепляется в сумму действий A на V_j.

$$v = v_1 + \cdots + v_s \in V_j$$

$$Av = Av_1 + \cdots + Av_s \qquad Av_j \in V_j \ \forall j$$

Если знаем операторы $v_j \mapsto Av_j \ \forall j$, то знаем, как действует A на V.

Лемма 1.21. *Если $AB = BA$ для линейных операторов A и B векторного пространства V над полем K, то ядро и образ одного из операторов A, B инвариантно относительно другого оператора. В частности, это верно, если:*

$$B = \sum_{k \geq 0} a_k A^k \qquad a_k \in K$$

Доказательство. $\operatorname{Ker} B$ инвариантно относительно A:

$$v \in \operatorname{Ker} B \Rightarrow Av \in \operatorname{Ker} B$$

$$Bv = 0 \Rightarrow B(Av) \in \operatorname{Ker} B$$

Но $B(Av) = A(Bv) = A0 = 0$ — верно.

$\operatorname{Im} B$ инвариантен относительно A:

$$Bv \in \operatorname{Im} A \Rightarrow A(Bv) = B(Av) \in \operatorname{Im} B$$

□

Лемма 1.22 (о ядерно-образном расщеплении)**.** *Пусть A — линейный оператор векторного пространства V над полем K. Тогда:*

$$V \in \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A \Leftrightarrow \operatorname{Im} A^2 = \operatorname{Im} A$$

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $V = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A$. Тогда:

$$\operatorname{Im} A = AV = A(\operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A) = A(\operatorname{Ker} A) \oplus A(\operatorname{Im} A) = 0 \oplus \operatorname{Im} A^2 = \operatorname{Im} A^2$$

$\Leftarrow$. Пусть $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A^2 = A(\operatorname{Im} A)$. Тогда сужение A на $\operatorname{Im} A$ — невырожденный оператор.

$$\operatorname{Ker}(A|_{\operatorname{Im} A}) = \{0\} \Leftrightarrow (\operatorname{Im} A) \cap (\operatorname{Ker} A) = \{0\}$$

Тогда:

$$\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = \dim(\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A)$$

$$\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A \le V \qquad \dim(\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A) = \dim V$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A = V \Rightarrow V = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A$$

$\square$

Лемма 1.23 (о расщеплении спектра)**.** *Пусть $V = U \oplus W$, $A\colon V \to V$ — линейный оператор, $AU \subseteq U$, $AW \subseteq W$, $V \neq \{0\}$, $W \neq \{0\}$. Обозначим B — сужение A на V, C — сужение A на W. Тогда:*

$$\chi_A(t) = \chi_B(t) \cdot \chi_C(t) \qquad \operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} B \cup \operatorname{Sp} C$$

Доказательство. Пусть базис $f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n$ пространства V согласован с ращеплением $V = U \oplus W$, то есть $f_1, \dots, f_k$ — базис U, $f_{k+1}, \dots, f_n$ — базис W. Пусть A_f, B_f, C_f — матрицы A, B, C в соответствующих базисах. Тогда:

$$A_f = \begin{pmatrix} B_f & 0 \\ 0 & C_f \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} B_f - tE & 0 \\ 0 & C_f - tE \end{pmatrix} = \det(B_f - tE) \cdot \det(C_f - tE) = \chi_B(t) \cdot \chi_C(t)$$

Корни $\chi_A(t)$ являются корнями либо $\chi_B(t)$, либо $\chi_A(t)$. Значит, $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} B \cup \operatorname{Sp} A$. $\square$

Следствие. *Если $\operatorname{Sp} A \subset K$, то всякое нетривиальное инвариантное подпространство относительно A содержит собственные векторы относительно A.*

1.12 Корневые подпространства и корневое расщепление

Пусть A — линейный оператор векторного пространства V над полем K и λ — собственные значения для A.

Вектор $v \in V$ называются корневыми векторами высоты h, отвечающими собственному значению λ оператора A, если:

$$(A - \lambda E)^h v = 0$$
$$(A - \lambda E)^{h-1} v \neq 0$$

Собственные векторы — это корневые векторы высоты 1. Ясно, что:

$$\{0\} \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda E) \subseteq \mathrm{Ker}(A - \lambda E)^2 \subseteq \cdots$$

Подпространство $V^\lambda(A) := \bigcup_{h \geq 0} \mathrm{Ker}(A - \lambda E)^h$ называется корневым подпространством, отвечающим собственному значению λ оператора A. Оно состоит из нуль-вектора и всех корневых векторов, отвечающих собственному значению λ.

Теорема 1.24 (о корневом расщеплении)**.** *Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем K, A — его линейный оператор и $\mathrm{Sp}\, A \subset K$. Тогда пространство V расщепляется в прямую сумму своих корневых подпространств $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} V^\lambda(A)$, причем каждое слагаемое инвариантно относительно A. При этом:*

$$V^\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda E)^{h(\lambda)}$$

$$h(\lambda) = \min\{h \mid (A - \lambda E)^h V = (A - \lambda E)^{h+1} V\}$$

$\dim V^\lambda(A) = k(\lambda)$*, где $k(\lambda)$ — кратность корня λ в $\chi_A(t)$.*

Доказательство. Используем индукции по размерности пространства V. Фиксируем $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$ и добьёмся отщепления V^λ. Так как $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$, то $(A - \lambda E)$ — вырожден, то $V > (A - \lambda E)V$. Применим $A - \lambda E$ несколько раз:

$$V > (A - \lambda E)V > (A - \lambda E)^2 V > \cdots > (A - \lambda E)^h V = (A - \lambda E)^{h+1} V = \ldots$$

По теореме о сумме размерностей ядра и образа линейного отображения. Следовательно:

$$V^\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda E)^h \qquad h = h(\lambda)$$

Обозначим $U = \mathrm{Ker}(A - \lambda E)^{h(\lambda)}$.

$$W = \mathrm{Ker}(A - \lambda E)^{h(\lambda)} V = \mathrm{Im}(A - \lambda E)^{h(\lambda)}$$

Так как $(A - \lambda E)^h V = (A - \lambda E)^{2h} V$, то по лемме 2:

$$V = \mathrm{Ker}(A - \lambda E)^h \oplus \mathrm{Im}(A - \lambda E)^h$$

$V = U \oplus W$, слагаемые инвариантны относительно A, по лемме 1. $U = V^\lambda$.

Пусть $\lambda' \neq \lambda$, $\lambda' \in \operatorname{Sp} A$. Докажем, что $V^{\lambda'} \subseteq W$. Действительно $V^{\lambda'} = \operatorname{Ker}(A - \lambda' E)^{h(\lambda')}$. Обозначим $p(t) = (t-\lambda)^{h(\lambda)}$, $q(t) = (t - \lambda')^{h(\lambda')}$. Так как $\lambda \neq \lambda'$, то $p \perp q$.

Существуют многочлены $r(t), s(t) \in K[t]$ такие, что:

$$p(t)r(t) + q(t)s(t) = 1$$

Отсюда:

$$p(A)r(A) + q(A)s(A) = E$$

Если $v \in V^{\lambda'}$, то $(A - \lambda' E)^{h(\lambda')} v = 0$, значит $q(A)v = 0$, $p(A)r(A)v = v$. $r(A)v \in V^{\lambda'}$ ввиду инвариантности $V^{\lambda'}$. Тогда:

$$p(A)V^{\lambda'} = V^{\lambda'} \Rightarrow V^{\lambda'} \subseteq \operatorname{Im} p(A) = W$$

Используем индукцию. Пусть B — сужение A на V^λ, C — сужение A на W. Тогда $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} B \cup \operatorname{Sp} C$ по лемме 3. При этом $\operatorname{Sp} B = \{\lambda\}$, так как $(A - \lambda' E)^{h(\lambda')} V^\lambda = V^\lambda$ при $\lambda' \neq \lambda$, то есть V^λ не содержит собственных векторов, отвечающих значению $\lambda' \neq \lambda$. Кроме того $\operatorname{Sp} C = \operatorname{Sp} A \setminus \{\lambda\}$. Так как $\dim W < \dim V$, то по предположению индукции:

$$W = \bigoplus_{\lambda' \neq \lambda} W^{\lambda'}(C)$$

Докажем, что $W^{\lambda'}(C) = V^{\lambda'}(A)$. Так как $C = A|_W$ — сужение A на W, то:

$$W^{\lambda'}(C) = \operatorname{Ker}(C - \lambda' E)^{h(\lambda)} = W \cap \operatorname{Ker}(A - \lambda' E)^{h(\lambda')} = W \cap V^{\lambda'(A)} = V^{\lambda'}(A)$$

так как $V^{\lambda'} \subseteq W$. В итоге:

$$V = V^\lambda \oplus W = V^\lambda \oplus \left(\bigoplus_{\lambda' \neq \lambda} V^{\lambda'} \right) = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} V^\lambda$$

Ввиду леммы 3 из разложения $V = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} V^\lambda$ и инвариантности V^λ относительно A получаем:

$$\operatorname{Sp} A = \bigcup \operatorname{Sp} A|_{U^\lambda} \qquad \chi_A(t) = \prod \chi_{A|_{U^\lambda}}(t)$$

Но $\chi_{A|_{V^\lambda}} = \pm (t - \lambda)^{k(\lambda)}$, где $k(\lambda) = \dim V^\lambda$, поскольку $\operatorname{Sp} A|_{V^\lambda} = \{\lambda\}$. В итоге $\chi_A(t) = \pm \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} (t - \lambda)^{k(\lambda)}$, $k(\lambda)$ — кратность λ в $\chi_A(t)$. □

Теорема 1.25 (Гамильтона-Кэли). *Всякая квадратная матрица над полем аннулируется своим характеристическим многочленом.*

$$A \in M_n(K) \qquad K \text{ — поле} \qquad \chi_A(t) = \det(A - tE) \Rightarrow \chi(A) = 0$$

Доказательство. Можно считать, что $\operatorname{Sp} A \subseteq K$, иначе расширим поле K. Пусть $V = K^n$, $A\colon x \mapsto Ax$ — линейный оператор на V. Тогда $\operatorname{Sp} A \subseteq K$. По теореме о корневом разложении:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} V^\lambda \qquad V = \operatorname{Ker}(A - \lambda E)^{h(\lambda)}$$

$$h(\lambda) = \min\{h \mid (A - \lambda E)^h V = (A - \lambda E)^{h+1} V\}$$

$h(\lambda)$ — максимальная высота корневого вектора, отвечающего собственному значению λ. Тогда:

$$\chi_A(t) = \pm \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \chi_{A|_{V^\lambda}}(t) = \pm \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} (t - \lambda)^{k(\lambda)} \qquad k(\lambda) = \dim V^\lambda$$

Покажем, что $\operatorname{Sp}(A|_{V^\lambda}) = \{\lambda\}$. Но $k(\lambda) \geq h(\lambda)$. Так как в цепочке

$$\{0\} < \operatorname{Ker}(A - \lambda E) < \operatorname{Ker}(A - \lambda E)^2 < \cdots < \operatorname{Ker}(A - \lambda E)^{h(\lambda)} = V^\lambda$$

будет ровно $h(\lambda)$ скачков и размерность при каждом скачке увеличивается по крайней мере на единицу.

$$k(\lambda) = \dim V^\lambda \geq h(\lambda)$$

Следовательно:

$$(A - \lambda E)^{k(\lambda)} V^\lambda = \{0\}$$

$$\chi_A(A) V^\lambda = \pm \left[\prod_{\lambda' \neq \lambda} (A - \lambda' E)^{k(\lambda')}\right] (A - \lambda E)^{k(\lambda)} V^\lambda = \{0\}$$

$$\chi_A(A) V = \chi_A(A) \left(\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} V^\lambda\right) = \{0\}$$

Значит, $\chi_A(A) = 0$. $\square$

Определение 1.19. Многочлен $\mu_A(t) \in K[t]$ называется минимальным аннулирующим многочленом для матрицы $A \in M_n(K)$ (или оператор), если:

1. $\mu_A(A) = 0$,

2. старший коэффициент $\mu_A(t) = 1$,

3. $\deg \mu_A(t)$ наименьшая, чтобы выполнялись предыдущие условия.

Теорема 1.26 (о минимальном многочлене)**.** *Пусть $A \in M_n(K)$, K — поле. Тогда:*

1. *минимальный аннулирующий многочлен $\mu_A(t)$ для матрицы A существует и делит любой аннулирующий для A.*

2. $$\mu_A(t) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} (t-\lambda)^{h(\lambda)}$$ $$h(\lambda) = \min\{h \mid (A-\lambda E)^h V = (A-\lambda E)^{h+1} V\}$$

Доказательство. Докажем первый пункт теоремы.

Пусть $f(t) \in K[t]$ и $f(A) = 0$. Разделим $f(t)$ на $\mu_A(t)$ с остатком:

$$f(t) = \mu_a(t)h(t) + r(t) \qquad \deg f(t) < \deg \mu_A(t)$$

Тогда:

$$f(A) = \mu_A(A)h(A) + r(A)$$
$$f(A) = 0 \Rightarrow r(A) = 0$$

Если $r(t) \not\equiv 0$, то он будет аннулирующим и будет иметь степень меньше, чем $\mu_A(t)$. Противоречие с выбором $\mu_A(t)$. Значит, $r(t) \equiv 0$.

$$\mu_A(t) \mid f(t)$$

Докажем вторую часть теоремы. Обозначим:

$$\mu_A(t) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} (t-\lambda)^{h(\lambda)}$$

Имеем $p(A) = 0$, поскольку $(A - \lambda E)^{h(\lambda)} V^\lambda = 0$ (в силу теоремы Гамильтона-Кэли). Кроме того, старший коэффициент $p(t) = 1$.

По доказанному $\mu_A(t) \mid p(t)$. Докажем, что $p(t) \mid \mu_A(t)$.

Утверждается

$$\mu_{A|_{V^\lambda}}(t) = (t-\lambda)^{h(\lambda)}$$

поскольку

$$(A-\lambda E)^{h(\lambda)} V^\lambda = 0 \qquad \mu_{A|_{V^\lambda}}(t) \mid (t-\lambda)^{h(\lambda)}$$
$$\mu_{A|_{V^\lambda}}(t) = (t-\lambda)^{m(\lambda)} \qquad m(\lambda) \le h(\lambda)$$

Если $m(\lambda) < h(\lambda)$, то:

$$(A - \lambda E)^{m(\lambda)} V^\lambda = \{0\}$$

$$V^\lambda \subseteq \mathrm{Ker}(A - \lambda E)^{m(\lambda)} < \mathrm{Ker}(A - \lambda E)^{h(\lambda)} = V^\lambda$$

$V^\lambda < V^\lambda$. Противоречие.

Значит $m(\lambda) = h(\lambda)$. Значит, $\mu_{A|_{V^\lambda}}(t) = (t - \lambda)^{h(\lambda)}$.

Поскольку:

$$\mu_A(A) V^\lambda = \{0\}$$

$$\mu_{A|_{V^\lambda}}(t) \mid \mu_A(A|_{V^\lambda}) = 0 \Rightarrow \mu_{A|_{V^\lambda}}(t) \mid \mu_A(t)$$

ввиду доказанного. Тогда:

$$(t - \lambda)^{h(\lambda)} \mid \mu_A(t)$$

$$p(t) = \prod (t - \lambda)^{h(\lambda)} \mid \mu_A(t)$$

$$p(t) \mid \mu_A(t) \qquad \mu_A(t) \mid p(t)$$

Старший коэффициент $p(t) =$ старший коэффициент $\mu_A(t) = 1$.

$$\mu_A(t) = p(t)$$

$\square$

1.13 Теорема Жордана

Матрица

$$J_h(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \dots \\ 0 & \dots 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Определение 1.20. Жорданова форма - клеточно-диагональная матрица с клетками Жордана на главной диагонали.

Пример 1.14.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda' & 0 \\ 0 & 0 & \lambda'' \end{pmatrix}$$

Теорема 1.27 (Жордан, 1876)**.** *Пусть A — линейный оператор конечномерного векторного пространства V над полем K и $\operatorname{Sp} A \subseteq K$.*

Тогда в подходящем базисе пространства V матрица оператора A имеет жорданову форму J.

Если $s_h(\lambda)$ — число жордановых клеток $J_h(\lambda)$ из J, то:

$$s_h(\lambda) = r_{k-1}(\lambda) - 2r_h(\lambda) + r_{h+1}(\lambda)$$

$$r_h(\lambda) = \operatorname{rk}(A - \lambda E)^k \qquad \lambda \in \operatorname{Sp} A$$

Таким образом, жорданова форма J задается оператором A однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток по диагонали.

Доказательство. Докажем существование жорданова базиса. По теореме о корневом разложении:

$$V = \bigoplus V^\lambda \qquad V^\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda E)^{h(\lambda)}$$

где $h(\lambda)$ — высота корневого вектора, отвечающего собственному значению λ. Оператор $N = A - \lambda E$ нильпотентен на V^λ.

$$v \in V^\lambda \Rightarrow N^{h(\lambda)} v = 0$$

По теореме о нильпотентных операторах пространство V^λ имеет нильбазис оператора N, состоящий из ниль-слоёв. Пусть $f_1, \dots, f_n$ — нильслой, максимальный по включению, и такой, что:

$$\begin{cases} Nf_1 = 0 \\ Nf_2 = f_1 \\ \vdots \\ Nf_n = f_{n-1} \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{cases} (A - \lambda E)f_1 = 0 \\ (A - \lambda E)f_2 = f_1 \\ \vdots \\ (A - \lambda E)f_n = f_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Af_1 = \lambda f_1 \\ Af_2 = f_1 + \lambda f_2 \\ \vdots \\ Af_n = f_{n-1} + \lambda f_n \end{cases}$$

$$A_{\{f_1,\dots,f_n\}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \dots \\ 0 & \dots 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = J_h(\lambda)$$

Следовательно, в базисе пространства V, составленном из ниль-базисов V^λ относительно $(A-\lambda E)$, матрица A клеточно-диагональна с клеткой $J_h(\lambda)$ по диагонали, то есть является жордановой формой J.

Если в некотором базисе V матрица оператора A имеет жорданову форму J, то базис составлен из ниль-слоев относительно $(A-\lambda E)$. $(\lambda \in \operatorname{Sp} A)$ Если λ зафиксировать, то все векторы базиса из ниль-слоев относительно $(A-\lambda E)$ являются корневыми, отвечающими собственному значению λ и потому лежащими в пространстве V^λ. Более того, они образуют базис V^λ, иначе их общее количество будет $< \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \dim V^\lambda = \dim V$ и они не образуют базис V. Противоречие с выбором базиса. По теореме о нильпотентных операторах:

$$s_h(\lambda) = r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1}$$

$$r_h = \dim N^k V^\lambda = \dim(A-\lambda E)^k V^\lambda$$

С другой стороны,

$$r_k(\lambda) = \operatorname{rk}(A-\lambda E)^l = \dim(A-\lambda E)^k V = \dim(A-\lambda E)^k (V^\lambda \oplus W) =$$
$$= \dim(A-\lambda)^l V^\lambda + \dim(A-\lambda E)^k W = r_k + d \qquad d = \dim W \qquad (A-\lambda E)W = W$$

$$s_h(\lambda) = r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1} = (r_{h-1}(\lambda) - d) - 2(r_h(\lambda) - d) + (r_{h+1}(\lambda) - d) =$$
$$= r_{h-1}(\lambda) - 2r_h(\lambda) + r_{h+1}(\lambda)$$

□

Пример 1.15.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$A\colon x \mapsto Ax$ — линейный оператор на $\mathbb{R}^3$. Тогда:

$$\chi_A(t) = (t^2 - 2t + 1)(2-t) = -(t-1)^2(t-2)$$

$$\operatorname{Sp} A = \{1; 1; 2\} \subset \mathbb{R}$$

Найдем жорданов базис $\mathbb{R}^3$ и жорданову форму A.

Шаг 1. Корневое разложение.

$$V = \mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(A-E)^2 \oplus \operatorname{Ker}(A-2E)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline \\ -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{Ker}(A - 2E) =< \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} >$$

$$\mathrm{Ker}(A - E)^2 =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

Шаг 2. Найдем ниль-базис V^λ *относительно* $A - \lambda E$ *(*$\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$*).*

$$\lambda = 2 \Rightarrow f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (A - 2E)f_1 = 0$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - E)f_2 = 0$$

$$(A - E)f_3 = f_2$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J$$

$$C = (f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = Af = C^{-1}AC$$

Следствие. *Пусть* K *— поле,* $A \in M_n(K)$, $\mathrm{Sp}\, A \subset K$. *Тогда* A *подобно жордановой форме* J *над полем* K.

$$\exists C \in M_n(K) \qquad \det C \neq 0 \qquad J = C^{-1}AC$$

Доказательство. Пусть $V = K^n$. $A\colon x \mapsto Ax$, $\mathcal{A}$ — линейный оператор в K^n, $A_e = A$ в стандартном базисе K^n, $\operatorname{Sp}\mathcal{A} = \operatorname{Sp} A \subset K$

По теореме Жордана существует базис $f_1, \dots, f_n$ пространства $V = K^n$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет жорданов вид $A_f = J$. Пусть $C = (f_1, \dots, f_n)$.

$$J = A_f = C^{-1}A_eC = C^{-1}AC$$

□

Более того, вид J определяется по A однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток по диагонали.

Теорема 1.28 (Критерий подобия матриц)**.** *Пусть K — поле, $A \in M_n(K)$, $\operatorname{Sp} A \subset K$. Матрица $B \in M_n(K)$ подобна матрице A над K iff:*

$$\begin{cases} \chi_B(t) = \chi_A(t) \Leftrightarrow \operatorname{Sp} B = \operatorname{Sp} A \\ \operatorname{rk}(B - \lambda E)^k = \operatorname{rk}(A - \lambda E)^k \end{cases}$$

для всех $\lambda \in \operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} B$ и всех k: $0 < k < h(\lambda)$, где $h(\lambda)$ — максимальный размер жордановой клетки $J_h(\lambda)$ из J_A.

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $B = C^{-1}AC$, $C \in M_n(K)$, $\det C \neq 0$. Тогда $\det(B - tE) = \det(A - tE)$ и для всех $\lambda \in \operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} B$ и всех $k > 0$:

$$(B - \lambda E)^k = (C^{-1}AC - \lambda E)^k = [C^{-1}(A - \lambda E)C]^k = C^{-1}(A - \lambda E)^kC$$

$$\operatorname{rk}(B - \lambda E)^k = \operatorname{rk}(A - \lambda E)^k \Leftarrow \det C \neq 0$$

$\Leftarrow$. Условия теоремы обеспечивают равенства жордановых форм матриц A и B.

$$C_1^{-1}AC_1 = J_A \qquad C_2^{-1}BC_2 = J_B \qquad C_1, C_2 \in M_n(K)$$

$$J_B = J_A \Rightarrow C_2^{-1}BC_2 = C_1^{-1}AC_1$$
$$B = (C_2C_1^{-1})A(C_1C_2^{-1}) = C^{-1}AC$$
$$C = C_1C_2^{-1} \in M_n(K)$$

□

Замечание 1.1.

$$C^{-1}AC = B \Leftrightarrow AC = CB \qquad \det C \neq 0$$

Справа — система линейных уравнений от n^2 неизвестных.

1.14 Многочлены от матриц

Пусть K — поле, $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_N t^N$ — многочлен. Как быстро вычислить:

$$f(A) = a_0 E + a_1 A + \dots + a_N A^N$$

для матрицы $A \in M_n(K)$.

Способ 1. Через минимальный многочлен. Пусть $\mu_A(t) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A}(t - \lambda)^{h(\lambda)}$ — минимальный аннулирующий многочлен матрицы A. Разделим $f(t)$ на $\mu_A(t)$ с остатком:

$$f(t) = \mu_A(t) q(t) + r(t)$$

$$\deg r(t) < \deg \mu_A(t) \le n$$

$$f(A) = \mu_A(A) q(A) + r(A) = r(A)$$

Пример 1.16.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Найти A^{100}.

$$\chi_A(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$$

$$\mu_A(t) \mid \chi_A(t) \Rightarrow \mu \ne 1$$

$$\mu_A(t) = t - 1 \Rightarrow A - E = 0 \Rightarrow A = E$$

$$\mu_A(t) = \chi_A(t) = (t-1)^2$$

$$r(t) = 1 + 100t(t-1) = 100t - 99 \Leftarrow \frac{100 \cdot 99}{2!}(t-1)^2$$

$$r(A) = 100A - 99E = \begin{pmatrix} 201 & -100 \\ 400 & -199 \end{pmatrix}$$

Способ 2. Через жорданову форму. Пусть $J = C^{-1}AC$. *Тогда* $A = CJC^{-1}$.

$$f(A) = \sum_{k=0}^{N} a_k (CJC^{-1})^k = \sum_{k=0}^{N} a_k C J^k C^{-1} = C \left(\sum_{k=0}^{N} a_k J^k \right) C^{-1} = C f(J) C^{-1}$$

Пусть

$$J = \begin{pmatrix} j_1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & j_s \end{pmatrix}$$

клеточно-диагональная матрица с клетками Жордано $j_1, \ldots, j_s$. Тогда:

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(j_1) & 0 & \ldots \\ 0 & \ddots & \ldots \\ 0 & \ldots & f(j_s) \end{pmatrix}$$

функция применяется на каждую клетку отдельно в силу:

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & 0 \\ 0 & x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & 0 \\ 0 & x_2 y_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 & 0 \\ 0 & \lambda y_2 \end{pmatrix}$$

Осталось найти значение многочлена на клетке Жордано.

Теорема 1.29. *Если $f(t) \in K[t]$, то:*

$$f(J_h(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \ddots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \ddots & \ddots \\ \ddots & 0 & \ddots & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & \ddots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Доказательство. Разложим $f(t)$ по формуле Тейлора:

$$f(t) = \sum_{i>0} \frac{f^{(i)}(\lambda)}{i!}(t-\lambda)^i$$

Пусть $J = J_h(\lambda)$. Тогда:

$$f(J) = \sum_{i>0} \frac{f^{(i)}(\lambda)}{i!}(J - \lambda E)^i$$

$$N = J - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ddots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

N — матрица сдвига ниль-слоя на 1 этаж вниз, а $(J - \lambda E)^i$ — сдвиг на i этажей. $\square$

1.15 Функции от матриц

Определение 1.21. Пусть $K = \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $A \in M_n(K)$, $D \subset K$, D — область (открытое множество), $f\colon D \to K$ — некоторая функция. Говорят, что f определена на спектре матрицы A, если:

1. $\operatorname{Sp} A \subset D$
2. $\exists f^{(i)}(\lambda)\ \forall \lambda \in \operatorname{Sp} A \qquad \forall i\ 0 < i < h(\lambda)$, где $h(\lambda)$ — максимальный размер $J_h(\lambda)$ из J_A.

В этом случае можно определить $f(A)$ по правилу:

1. $J = C^{-1}AC$ — Жорданова форма, значит $f(A) := Cf(J)C^{-1}$.
2. $$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & J_s \end{pmatrix}$$ $$f(J) = \begin{pmatrix} f(J_1) & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & f(J_s) \end{pmatrix}$$
3. $$f\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \ddots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \ddots & \ddots \\ \ddots & 0 & \ddots & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & \ddots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Надо доказать независимость этого определения от выбора C и J.

Теорема 1.30 (о многочлене Лагранжа-Сильвестера)**.** *Предполагаем, что $A \in M_n(K)$, $K = \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и функция f определена на спектре матрицы A. Пусть $\mu_A(t) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} (t-\lambda)^{h(\lambda)}$ — минимальный аннулирующий многочлен для A степени $m = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} h(\lambda)$. Тогда:*

1. *существует и единственный многочлен $p(t)$ степени $< m$ такой, что:* $$p^{(i)}(\lambda) = f^{(i)}(\lambda)\ \forall \lambda \in \operatorname{Sp} A\ \forall i < h(\lambda)$$
2. *$f(A) = p(A)$ не зависит от выбора матрицы J и C: $J = C^{-1}AC$.*

Этот многочлен называется многочленом Лагранжа-Сильвестера для функции f на матрице A.

Доказательство. Пусть V — пространство многочленов из $K[t]$ степени $< m$, $\dim_K V = m$. Пусть $W = K^m$. Зададим отображение $\phi\colon V \to W$ по правилу:

$$\phi\colon p(t) \mapsto (p^{(i)}(\lambda) \mid \lambda\, in\, \operatorname{Sp} A \quad 0 \leq i < h(\lambda))$$

Тогда $\phi(p(t)) \in K^m = W$ имеет степень $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} h(\lambda) = m$. Отображение $\phi\colon V \to W$ линейно.

$$\varphi(p(t) + q(t)) = \varphi(p(t)) + \varphi(q(t))$$

$$\varphi(\alpha p(t)) = \alpha\varphi(p(t))$$

Найдем ядро $\operatorname{Ker}\varphi$. Если $p(t) \in \operatorname{Ker}\varphi$, то $p^{(i)}(\lambda) = 0$ $\forall \lambda \in \operatorname{Sp} A$ $\forall i :\ 0 \leq i < h(\lambda)$. Ввиду формулы Тейлора:

$$(t - \lambda)^{h(\lambda)} \mid p(t)$$

По свойству взаимной простоты:

$$\mu_A(t) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} (t - \lambda)^{h(\lambda)} \mid p(t)$$

Но $\deg p(t) < m = \deg \mu_A(t)$. Значит, $p(t) = 0$ и $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.

$$\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V - \dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim V = m$$

$$\operatorname{Im}\varphi \leq K^m = W \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = V$$

Отображение $\varphi\colon V \to W$ взаимно однозначно.

$$\varphi(p(t)) = \varphi(q(t)) \Rightarrow= \varphi(p(t) - q(t)) = 0$$

$$p(t) - q(t) = 0 \Rightarrow p(t) = q(t)$$

Тогда для любого набора чисел $f^{(i)}(\lambda)$, $\lambda \in \operatorname{Sp} A$, $0 \leq i < h(\lambda)$ существует единственный многочлен $p(t)$ степени $< m$ такой, что:

$$\phi(p(t)) = (f^{(i)}(\lambda) \mid \lambda\, in\, \operatorname{Sp} A \quad 0 \leq i < h(\lambda))$$

То есть $p^{(i)}(\lambda) = f^{(i)}(\lambda)$ $\forall \lambda$ $\forall i$. Единственность очевидна. $\square$

Пример 1.17. *Пусть* $A = \begin{smallmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}$. *Найдем* $\sqrt{A}$, *используя минимальный многочлен.* $f(t) = \sqrt{t}$.

Найдем $\mu_A(t)$.

$$\chi_A(t) = t^2 - 8t + 16 = (t-4)^2 \Rightarrow \operatorname{Sp} A = \{4\}$$

$$\mu_A \mid \chi_A \Rightarrow \mu_A = \chi_A \qquad \deg \mu = 2$$

$p(t) = at + b$ — *многочлен Лагранжа-Сильвестера для* $\sqrt{t}$ *на* A.

$$p(4) = f(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$p'(4) = f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$a = \frac{1}{4} \qquad b = 2$$

$$p(t) = \frac{1}{4}(t+4)$$

$$\sqrt{A} = p(A) = \frac{1}{4}(A + 4E) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$X^2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 80 & 16 \\ -16 & 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = A$$

Следствие. *Функции от матриц перестановочны с матрицей.*

Доказательство. Пусть $f(A) = p(A)$, где p — многочлен Лагранжа-Сильвестера. Тогда:

$$Af(A) = Ap(A) = p(A)A = f(A)A$$

□

1.16 Ряды от матриц

Определение 1.22. Пусть $K = \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Числовой ряд $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, $a_k \in K$. Его производная — это форма $f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1}$.

Его N-тая частичная сумма — это многочлен $f_N(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k t^k$. Ряд $f(t)$ сходится в точке $\lambda \in K$, если существует $\lim_{N\to\infty} f_N(\lambda)$.

Определение 1.23. Пусть $A_1, A_2, \dots$ — последовательность матрицы из $M_n(K)$. Эта последовательность сходится к матрице $A_0 \in M_n(K)$, если:

$$\lim_{N\to\infty} (A_N)_{ij} = (A_0)_{ij}$$

для всех $1 \le i, \le n$. $(X)_{ij}$ — элемент на месте (i,j) в матрице X. Обозначение: $A_0 = \lim_{N\to\infty} A_N$.

Определение 1.24. Формальный числовой ряд $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ сходится на матрице $A \in M_n(K)$, если существует $\lim_{N\to\infty} f_N(A)$. Обозначение: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = \lim_{N\to\infty} f_N(A)$.

Лемма 1.31. *Пусть* $A_0 = \lim_{N\to\infty} A_N$ *и* $B_0 = \lim_{N\to\infty} B_N$*, где* $A_N, B_N \in M_n(K)$*,* $n = 1, 2, 3, \dots$*. Тогда существует предел* $\lim_{N\to\infty}(A_N + B_N) = A_0 + B_0$ *и* $\lim_{N\to\infty}(A_N B_N) = A_0 B_0$*.*

Доказательство. Следует из соответствующих утверждений анализа. □

Теорема 1.32. *Пусть* $K = \mathbb{R}$ *(или* $\mathbb{C}$*),* $A \in M_n(K)$*.* $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$*,* $a_k \in K$ *— формальный степенной ряд. Он сходится на матрице* $A \Leftrightarrow$ $f(t)$ *и его производные до порядка* $h(\lambda)$ *сходятся во всех точках* $\lambda \in \operatorname{Sp} A$*. Здесь* $h(\lambda)$ *— максимальный порядок клетки Жордано* $J_h(\lambda)$ *из жордановой формы* J_A *матрицы* A*.*

Доказательство. Пусть $J_A = C^{-1}AC$. Тогда $f_N(J_A) = C^{-1} f_N(A) C$. Значит $f_N(A) = C f_N(J_A) C^{-1}$. По лемме $\exists \lim f_N(A) \Leftrightarrow \exists \lim f_N(J_A)$.

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & J_s \end{pmatrix}$$

где J_k — жордановы клетки. Тогда

$$f_N(J_A) = \begin{pmatrix} f_N(J_1) & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & f_N(J_s) \end{pmatrix}$$

и $\exists \lim f_N(J_A) \Leftrightarrow \exists \lim f_N(J_k)\ \forall k$. Пусть

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \dots \\ 0 & \dots 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$f_N(J_k) = \begin{pmatrix} f_N(\lambda) & \frac{f'_N(\lambda)}{1!} & \ddots & \frac{f_N^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f_N(\lambda) & \ddots & \ddots \\ \ddots & 0 & \ddots & \frac{f'_N(\lambda)}{1!} \\ 0 & \ddots & 0 & f_N(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\exists \lim f_N(J_k) \Leftrightarrow \exists \lim_{N\to\infty} f_N^{(i)}(\lambda)\ \forall \lambda \in \operatorname{Sp} A\ \forall i \le h-1 < h(\lambda)$$

Это равносильно существованию ряда $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ и его производных до порядка $h(\lambda)$ в точках $\lambda \in \operatorname{Sp} A$. □

Следствие. *Ряды* $\exp t$, $\sin t$, $\cos t$ *сходятся по любой матрице* $A \in M_n(K)$.

Следствие. *Пусть ряды* $f(t), g(t), \ldots$ *сходятся на матрице* A *и удовлетворяют полиномиальному тождеству:*

$$F(f(t), g(t), \ldots) = 0$$

Тогда

$$F(f(A), g(A), \ldots) = 0$$

В частности, отсюда следуют все тригонометрические тождества на матрицах.

Доказательство.

$$f(t) = \sum_{n\ge 0} a_n t^n \qquad g(t) = \sum_{k\ge 0} b_k t^k$$

Тогда:

$$F(f(t), g(t), \ldots) = \sum_{k\ge 0} r_k t^k$$

где r_k — многочлен от $a_i, b_j, \ldots$ $(i, j \le k)$ По условию, $r_k = 0\ \forall k \ge 0$. Тогда:

$$F(f(A), g(A), \ldots) = \sum_{k\ge 0} r_k A^k = 0$$

□

1.17 Задача о подобии (в общем случае)

Теорема 1.33 (Фробениуса)**.** *Пусть K — произвольное поле, V — конечномерное векторное пространство над K, $A\colon V \to V$ — линейный оператор и $\operatorname{Sp} A \not\subset K$. Есть ли аналог жордановой формы, жорданова базиса в этом случае?*

Пусть $\chi_A(t) = \pm\prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i}(t)$, где $p_i(t)$ — различные неразложимые многочлены из $K[t]$ со старшим коэффициентом 1.

Определение 1.25. Вектор $v \in V$ называется примарным высоты h, отвечающим делителю $p_i(t)$, если:

$$\begin{cases} p_i^h(A)v = 0 \\ p_i^{h-1}(A)v = 0 \end{cases}$$

Определение 1.26. Подпространство $V_i = \bigcup_{h>0} \operatorname{Ker}^h p_i(A)$ называется примарным, отвечающим делителю $p_i(t)$.

1.17.1 Разложение на примарные подпространства

Теорема 1.34. *В предыдущих обозначениях $V = \bigoplus_{i=1}^{s} V_i$, где V_i инвариантно относительно A, имеем $V_i = \operatorname{Ker} p_i^{h(p_i)}(A)$.*

$$h(p_i) = \min\{h \mid p_i^h(A)V = p_i^{h+1}(A)V\} \qquad h(p_i) \le k_i$$

Доказательство. Доказательство аналогично теореме о корневом разложении.

$$P := p_1(A) \quad \det P = 0$$

$$V > PV > P^2V > \cdots > P^hV = P^{h+1}V$$

$$V = \operatorname{Ker} p^h \oplus \operatorname{Im} P^h = V_1 \oplus W$$

V_1 — примарное подпространство. Далее по индукции: $W = V_2 \oplus V_3 \oplus \cdots$. □

Метод доказательства сводится к сужению оператора A.

$$A\colon V_i \to V_i$$

Опустив индексы, запишем:

$$V = \operatorname{Ker} p^k(V)$$

$$p(t) = t^m - c_1t^{m-1} - \cdots - c_m \qquad c_i \in K$$

$p(t)$ неразложим в $K[t]$.

1.17.2 Случай 1

$$V = \operatorname{Ker} p(A)$$

Определение 1.27. Подпространство U — минимальное A-инвариантное подпространство, если:

1. $AU \subseteq U$

2. $0 < W \leq U,\ AW \subseteq W \Rightarrow W = U$

Лемма 1.35. *Если U — минимальное A-инвариантное подпространство из V и W — инвариантно относительно A, $U \cap W \neq \{0\}$, то тогда $U \subseteq W$.*

Доказательство. Подпространство $U \cap W$ инвариантно относительно A. Значит

$$\{0\} < U \cap W \leq W$$

Так как U — минимальное A-инвариантное подпространство, то $U \cap W = U$, значит $U \subseteq W$. □

Лемма 1.36. *Пусть U — минимальное A-инвариантное подпространство, $U \subseteq V = \operatorname{Ker} p(A)$.*

$$p(t) = t^m - c_1 t^{m-1} - \cdots - c_m \qquad c_i \in K$$

$p(t)$ неразложим в $K[t]$. Пусть $v \in V$, $v \neq 0$. Тогда $v, Av, \ldots, A^{m-1}v$ — базис U.

Доказательство. Так как $p(A) = 0$, то:

$$A^m - c_1 A^{m-1} - \cdots - c_m E = 0$$

$$A^m = c_1 A^{m-1} + \cdots + c_m E$$

$$A^m v = c_1 A^{m-1} v + \cdots + c_m v$$

Следовательно $< v, Av, \ldots, A^{m-1}v >$ инвариантное относительно A подпространство и содержится в U — минимальном A-инвариантном подпространстве, то $U =< v, Av, \ldots, A^{m-1}v >$.

Докажем линейную независимость. Предположим, что:

$$\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i A^i v = 0 \qquad \exists \alpha_i \neq 0$$

Обозначим $q(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha t^i$. Тогда $q(t) \neq 0$ и $\deg q(t) < m = \deg p(t)$. Значит, $p(t) \perp q(t)$:

$$\exists r(t), s(t): \ p(t)r(t) + q(t)s(t) = 1$$

$$p(A)r(A) + q(A)s(A) = E$$

$$v = Ev = r(A)p(A)v + s(A)q(A)v = r(A) \cdot 0 + s(A) \cdot 0$$

Противоречие с выбором v показывает, что векторы системы $v, Av, \ldots, A^{m-1}v$ линейно независимы. □

Следствие. *При условии, что $V = \operatorname{Ker} p(A)$ всякое минимальное A-инвариантное подпространство U имеет вид $< v, Av, \ldots, A^{m-1}v >$ ($v \neq 0$). Если $p(t) = t - \lambda$, то $V = \operatorname{Ker}(A - \lambda E)$, $< u >= U$, $Au = \lambda u$, $u \neq 0$.*

Лемма 1.37. *Пусть $V = \operatorname{Ker} p(A)$, $p(t)$ неразложим в $K[t]$. Тогда:*

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_s$$

где U_i — минимальное A-инвариантное подпространство.

Доказательство. Пусть V — ненулевое пространство. Тогда выберем $v \in V$, $v \neq 0$. Получим, что:

$$U_1 =< v, Av, \cdots, A^{m-1}v >$$

Тогда U_1 — минимальное A-инвариантное подпространство. Если $V = U_1$, то все доказано.

Пусть $V > U_1$, выберем $u \in V_1$, $u \notin U_1$. Получим, что:

$$U_2 =< u, Au, \cdots, A^{m-1}u >$$

Тогда U_2 — минимальное A-инвариантное подпространство.

Если $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$, то по лемме 1.35 $U_2 \leq U_1$, $u \in U_1$. Противоречие.

Значит, $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ и $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$. Если $V_1 + V_2 = V$, то все доказано.

Предположим, что $V > U_1 + U_2$. Тогда:

$$\exists w \in V \setminus (U_1 \oplus U_2)$$

$$U_3 =< w, Aw, \ldots, A^{m-1}w >$$

U_3 — минимальное A-инвариантное подпространство и аналогично $(U_1 + U_2) \cap U_3 = \{0\}$.

$$U_1 + U_2 + U_3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$$

Продолжая, получим требуемое равенство. □

Следствие. *Если $V = \operatorname{Ker} p(A)$, то в некотором базисе V матрица A имеет клеточно-диагональный вид с клетками:*

$$\begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ c_m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Доказательство. Положим

$$f_1 = A^{m-1}v \quad f_2 = A^{m-2}v \qquad \dots \qquad f_m = v$$

□

1.17.3 Случай 2

$$V = \operatorname{Ker} p^k(A)$$

$$p(t) = t^m - c_1 t^{m-1} - \dots - c_m \in K[t]$$

$p(t)$ неразложим над K. Обозначим $N = p(A)$. Тогда $N^k = 0$, значит N нильпотентен.

Лемма 1.38. *Пусть в предыдущих обозначениях $v \in V$, $v \neq 0$, $N^h v = 0$, $N^{h-1}v \neq 0$. Тогда минимальное A-инвариантное подпространства из V, содержащее вектор v, имеет базис:*

$$\begin{matrix} v & Av & A^2v & \cdots & A^{m-1}v \\ Nv & NAv & NA^2v & \cdots & NA^{m-1}v \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ N^{h-1}v & N^{h-1}Av & N^{h-1}A^2v & \cdots & N^{h-1}A^{m-1}v \end{matrix} \tag{4}$$

Он называется ниль-блоком высоты h с началом v. Его первый столбец называется главным. Остальные получается от него движением по A.

Доказательство. Докажем линейную независимость.

Обозначим $w = N^{h-1}v \neq 0$. Тогда $w \in \operatorname{Ker} p(A)$:

$$p(A)w = Nw = N(N^{h-1})v = N^h v = 0$$

По лемме 1.36 первого этаж ниль-блока 4 линейно независим.

Но 4 — ниль-таблица относительно N. Значит система векторов 4 линейно независима.

Докажем максимальность.

Утверждается, что минимальное A-инвариантное подпространство U из V, содержащее v имеет вид:

$$U =< v, Av, A^2v, \dots >$$

Пусть $u \in U$. Тогда:

$$u = \sum \alpha_i A^i v \qquad \alpha_i \in K$$

Разложим многочлен:

$$f(t) = \sum_{\alpha \geq 0} \alpha_i t^i \in K[t]$$

по степеням многочлена $p(t)$:

$$f(t) = r_0(t) + r_1(t)p(t) + r_2(t)p^2(t) + \dots = \sum_{i \geq 0} r_i p^i \qquad \deg r_i(t) < \deg p(t)$$

Докажем при помощи индукции по степени p.

$$f = r_0 + hp \qquad \deg r_0 < \deg p \qquad \deg h < \deg f$$

По индукции:

$$h = \sum_{i \geq 1} r_i p^{i-1} \qquad \deg r_i < \deg p$$

Тогда:

$$f = r_0 + hp = r_0 + (\sum_{i \geq 1} r_i p^{i-1})p = \sum_{i \geq 0} r_i p^i$$

$$f(A) = \sum_{i \geq 0} r_i(A) p^i(A)$$

$$u = f(A)v = \sum_{i \geq 0} r_i(A) p^i(A) v = \sum_{i=0}^{h-1} r_i(A) N^i v$$

Таким образом, u представляется как линейная комбинация векторов ниль-блока 4. $\square$

Теорема 1.39. *Всякое примарное пространство V относительно линейного оператора A имеет базис, состоящий из ниль-блоков. Его вид задается только оператором A и пространством V_i. Тогда s_h — число ниль-блоков высоты h из такого базиса:*

$$s_h = \frac{r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1}}{m} \qquad r_i = \dim p^i(A)V$$

Доказательство. Докажем существование «фробениусова базиса».

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — некоторый базис V. Построим ниль-блок с началом $e_1, \dots, e_n$ и элементарными преобразованиями приведем его к требуемому виду «фробениусова базиса».

Здесь элемементарные преобразования ниль-блоков — это следующие преобразования:

1. Исключение нулевых векторов сдвигом ниль-блока вниз.

2. Прибавление к главному столбцу ниль-блока высоты h линейной комбинации из других столбцов высоты $\geq h$. Остальные столбцы получаются из главного A-сдвигом.

3. Умножение ниль-блока на ненулевой скаляр.

4. Перестройка блоков.

Сначала из ниль-блока с началом $e_1, \dots, e_n$ исключаем нулевые вектора.

Затем рассматриваем зависимость на первом этаже. Если на нем все векторы линейно независимы, то и все векторы линейно независимы и образуют требуемый базис.

Если векторы первого этажа линейно зависимы, то это означает, что сумма $U_1 + U_2 + \dots + U_s$ не является прямой суммой. U_i — линейная оболочка векторов первого этажа i-того блока.

$$\sum \alpha_i u_i + \sum \beta_j v_j + \sum \gamma_k w_k = 0 \qquad \exists \alpha_i \neq 0$$

$$u + v + w = 0$$

U_i — минимальное A-инвариантное подпространство. Значит:

$$U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j \neq \{0\}$$

Можно, считать, что U_i из блока минимальной высоты. По лемме 1.35 имеем:

$$U_i \subset \sum_{j \neq i} U_j$$

Аналогично элементарными преобразованиями можно получить нуль на первом этаже i-того блока. Тогда и все векторы первого этажа i-того блока нулевые. Их можно исключить элементарными преобразованиями.

Число векторов уменьшается. Процесс продолжается и останавливается, если все векторы первого этажа линейно независимы, то есть когда получится базис из ниль-блоков. Линейная оболочка сохранена.

Теперь рассмотрим вид.

Если заданы числа s_h, то легко найти размерности подпространств:

$$\begin{cases} r_0 = \dim V = m(s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \cdots) \\ r_1 = \dim NV = m(s_2 + 2s_3 + \cdots) \\ r_2 = \dim N^2 V = m(s_3 + 2s_4 + \cdots) \\ \quad \vdots \\ r_k = \dim p^k(A)V = \dim N^k V = m \sum\limits_{i=k} (i - k + 1) s_i \end{cases}$$

$$s_h = \frac{r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1}}{m}$$

$\square$

Следствие. *Пусть $V = \operatorname{Ker} p^k(A)$, где $p(t) = t^m - c_1 t^{m-1} - \cdots - c_m$ — неразложимый делитель $\chi_A(t)$. Тогда в подходящем базисе V матрица оператора A имеет клеточно-диагональный вид с клетками Фробениуса $F_h(p)$ по диагонали (размера $m \cdot h$), где:*

$$F_h(p) = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 \\ c_m & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & & c_1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & c_2 & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ & & & & c_m & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & & & & & c_1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & c_2 & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & & & & & & & & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & & & c_m & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 1.18.

$$p(t) = t - \lambda \qquad m = 1$$

$$F_h(p) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = J_h(\lambda)$$

Доказательство. Такой вид матрица A принимает во «фробениусовом базисе», если вектора ниль-блока занумеровать правильно: справа налево и снизу вверх. □

Пример 1.19.

$$p(t) = t^2 - 3t + 4 \qquad K = \mathbb{R} \qquad h = 2$$

$$\begin{pmatrix} v = f_4 & Av = f_3 \\ Nv = f_2 & ANV = f_1 \end{pmatrix}$$

$$N = p(A) = A^2 - 3A + 4E$$

$$A^2 = N + 3A - 4E$$

$$h = 2 \Rightarrow N^2 = 0 \qquad N^2 v = 0$$

Возьмем матрицу A в базисе f_1, f_2, f_3, f_4. Имеем:

$$Af_1 = A^2 Nv = (N + 3A - 4E)Nv = N^2 v + 3ANv - 4Nv = 3f_1 - 4f_2$$

$$Af_2 = ANv = f_1$$

$$Af_3 = A^2 v = (N + 3A - 4E)v = Nv + 3Av - 4v = f_2 + 3f_3 - 4f_4$$

$$Af_4 = Av = f_3$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = F_h(t^2 - 3t + 4)$$

Теорема 1.40. *Пусть A и B — линейные операторы пространства V над полем K (или матрицы). A и B подобны тогда и только тогда, когда:*

1. $\chi_B(t) = \chi_A(t)$

2. *Если $\chi_B(t) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i}(t)$, где p_i — различные неразложимые множители со старшим коэффициентом 1, то $\operatorname{rk} p_i^h(B) = \operatorname{rk} p_i^h(A)$ для всех $i = 1, \dots, s$ и всех $0 < h < k_i$.*

Доказательство. $\Rightarrow$. Если $B = C^{-1}AC$, то $\chi_B(t) = \chi_A(t)$. Кроме того:

$$p_i^h(B) = C^{-1}p_i^h(A)C$$

$$\operatorname{rk} p_i^h(B) = \operatorname{rk} p_i^h(A) \quad \forall i\ \forall h$$

$\Leftarrow$. Условия обеспечивают равенства форм Фробениуса для A и B.

$$C_1^{-1}AC_1 = F_A = F_B = C_2^{-1}BC_2$$

$$B = C_2C_1^{-1}AC_1C_2^{-1} = C^{-1}AC$$

$\square$

Следствие. *Существует алгоритм распозновання подобных матриц над $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. Проверим $\chi_B(t) = \chi_A(t)$. Разложим характеристический многочлен на неразложимые над $\mathbb{Q}$ множители с рациональными коэффициентами.

$$\chi_B(t) = \chi_A(t) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i}(t)$$

$p_i(t)$ неразложим в $\mathbb{Q}[t]$. Далее проверка:

$$\operatorname{rk} p_i^k(B) = \operatorname{rk} p_i^k(A)$$

Это возможно. $\square$

Следствие. *Если матрицы A и B из $M_n(K)$ (K — поле) подобны над полем $L \supset K$, то A и B подобны над K. В частности, A подобно B над $K \Leftrightarrow J_A = J_B$.*

Доказательство. Пусть $B = C^{-1}AC$, $C \in M_n(L)$, $\det C \neq 0$. Если $\chi_B(t) = \chi_A(t) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i}(t)$, где p_i неразложим над K.

$$p_i^k(B) = C^{-1}p_i^k(A)C$$

$$\operatorname{rk} p_i^k(B) = \operatorname{rk} p_i^k(A) \quad \forall i \forall k$$

$A \sim B$ над K по теореме 1.40. $\square$

2 Линейные операторы евклидовых и эрмитовых пространств

Определение 2.1. Пусть $K = \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$); V — векторное пространство над K. Отображение $V \times V \to K$ вида $(a, b) \mapsto (a, b) \in K$ называется скалярным произведением на V, если:

1. $$(a, b) = \begin{cases} (b, a) \Leftarrow K = \mathbb{R} \\ \overline{(b, a)} \Leftarrow K = \mathbb{C} \end{cases}$$

2. $(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$

3. $(a, \lambda b) = \lambda(a, b)$

4. $\mathbb{R} \ni (a, a) \geq 0$, причем $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

$\forall a, b, c \in V\ \forall \lambda \in K$. Если еще $\dim V < \infty$, то V называется евклидовым при $K = \mathbb{R}$ и эрмитовым при $K = \mathbb{C}$.

Простейшие следствия:

1. $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$

2. $$(\lambda a, b) = \overline{\lambda}(a, b) = \begin{cases} \lambda(a, b) \Leftarrow \lambda \in \mathbb{R} \\ \overline{\lambda}(a, b) \Leftarrow \lambda \in \mathbb{C} \end{cases}$$

3. $$\left(\sum_i \alpha_i a_i, \sum_j \beta_j b_j \right) = \sum_i \sum_j \overline{\alpha_i} \beta_j (a_i, b_j)$$

4. $(a, 0) = (0, a) = 0\ \forall a$

Пример 2.1. 1. *Из аналитической геометрии: $K = \mathbb{R}$, V — геометрические вектора.*

$$(a, b) = |a||b| \cos \varphi$$

2. *Из алгебры: $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$ — евклидово пространство.*

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow (a, b) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Если же $K = \mathbb{C}$, а $V = \mathbb{C}^n$ — эрмитово пространство.

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} b_i$$

3. *Функциональные пространства.* $C_{[p;q]} = \{$*непрерывные функции на отрезке* $[p;q]$ *с вещественными значениями*$\}$

$$(f, g) = \int_p^q f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

$$(f, g) = \int_p^q k(t)f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

где $k(t)$ *— положительная функция на* $[p;q]$.

$$V < C[p;q] \qquad \dim V < \infty$$

2.1 Длина и угол

Определение 2.2. Пусть V — евклидово (эрмитово) пространство, a — его вектор. Тогда длина (или норма) вектора a — это число:

$$\|a\| := \sqrt{(a, a)} \in \mathbb{R}_+$$

Ясно, что норма удовлетворяет свойствам:

$$\|a\| \geq 0 \qquad \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$$

Чтобы определить угол, необходимо доказать следующую теорему.

Теорема 2.1. *В евклидовом (эрмитовом) пространстве верны следующие утверждения:*

1. *Неравенство Коши-Буняковского:*

$$|(a, b)| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда a и b линейно зависимы.

2. *Неравенство треугольника:*

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

3. Тождество параллелограмма:

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\| + 2\|b\|$$

Доказательство. 1. Если $b = 0$, то утверждение верно. Пусть $b \neq 0$ и пусть: $c = a - \frac{(b,a)}{(b,b)}b$. Тогда:

$$(b,c) = (b,a) - (b, \frac{(b,a)}{(b,b)}b) = 0$$

$\frac{(b,a)}{(b,b)}b = \operatorname{pr}_b a$ — ортогональная проекция a на направление вектора b. $c = a - \frac{(b,a)}{(b,b)}b =: \operatorname{ort}_b a$ — ортогональная составляющая вектора a относительно вектора b.

Теперь:

$$0 \leq (c,c) = (a - \frac{(b,a)}{(b,b)}b, c) = (a,c)$$

$$(a, a - \frac{(b,a)}{(b,b)}b) = (a,a) - \frac{(b,a)}{(b,b)}(a,b)$$

$$(a,a)(b,b) \geq (b,a)(a,b)$$

$$\|a\|^2 \cdot \|b\|^2 \geq |(a,b)|^2$$

$$\|a\| \cdot \|b\| \geq |(a,b)|$$

Равенство $\Leftrightarrow c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{(b,a)}{(b,b)}b$ — вектора линейно зависимы.

2.

$$\begin{aligned}\|a+b\|^2 &= (a+b, a+b) = (a,a) + (a,b) + (b,a) + (b,b) \\ &= \|a\|^2 + 2\Re(a,b) + \|b\|^2 \leq \|a\|^2 + 2\|a\|\|b\| + \|b\| = (\|a\| + \|b\|)^2\end{aligned}$$

Осталось извлечь квадратный корень.

3.

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + (a,b) + (b,a) + \|b\|^2$$

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 - (a,b) - (b,a) + \|b\|^2$$

Просуммируем и получим требуемое равенство.

□

Следствие.

$$\exists\varphi: \quad -\pi \le \varphi \le \pi \qquad \cos\varphi = \frac{(a,b)}{\|a\|\cdot\|b\|}$$

Если геометрия евклидова, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то это единственное число и называется углом между a и b.

Следствие. *Скалярное произведение можно выразить через длины векторов и операции сложения векторов и умножения на скаляр.*

Доказательство. Пусть V — евклидово пространство. Тогда:

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2(a,b) + \|b\|^2$$

$$(a,b) = \frac{\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2}{2}$$

Это первое поляризационное тождество.

Пусть V — эрмитово пространство. Тогда:

$$\|a+b\|^2 = \|a\| + (a,b) + (b,a) + \|b\|^2 \tag{5}$$

Заменим b на ib. Тогда:

$$\|a+ib\|^2 = \|a\| + i(a,b) - i(b,a) + \|b\|^2 \tag{6}$$

Умножим 5 на i и прибавим 6.

$$i\|a+b\|^2 + \|a+ib\|^2 = (1+i)\|a\|^2 + 2i(a,b) + \|b\|^2(1+i)$$

$$(a,b) = \frac{i\|a+b\|^2 + \|a+ib\| - (1+i)(\|a\|^2 + \|b^2\|)}{2i}$$

Это второе поляризационное тождество. □

Определение 2.3. Вектора a и b называется ортогональными, если $(a,b) = 0$. Обозначается $a \perp b$.

Следствие (Теорема Пифагора)**.**

$$a \perp b \Rightarrow \|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

Доказательство.

$$\|a+b\|^2 = (a+b, a+b) = \|a\|^2 + \|b\|^2 + (a,b) + (b,a) = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

□

2.2 Ортогональные и ортонормированные системы

Определение 2.4. Система векторов $a_1, \ldots, a_s$ называется ортогональной, если $(a_i, a_j) = 0\ \forall i \neq j$ и $a_i \neq 0\ \forall i$.

Система называется нормированной, если $\|a_i\| = 1\ \forall i$.

Система называется ортонормированной, если она одновременно ортогональна и нормирована.

$$(a_i, a_j) = \begin{cases} 0 \Leftarrow i \neq j \\ 1 \Leftarrow i = j \end{cases}$$

Теорема 2.2. *Всякая линейно независимая система векторов $a_1, \ldots, a_s$ евклидова (эрмитова) пространства перестраивается в линейно эквивалентную ортогональную систему $b_1, \ldots, b_s$ при помощи процедуры ортогонализации Грамма-Шмидта.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \\ b_2 &= a_2 - \operatorname{pr}_{b_1} a_2 \\ b_3 &= a_3 - \operatorname{pr}_{b_1} a_3 - \operatorname{pr}_{b_2} a_3 \\ &\vdots \\ b_k &= a_k - \sum_{i<k} \operatorname{pr}_{b_i} a_k \end{aligned} \tag{7}$$

$$\operatorname{pr}_b a = \frac{(b, a)}{(b, b)} b$$

Докажем индукцией по k. Необходимо доказать, что:

1. $b_i \perp b_k \qquad i < k$
2. $b_k \neq 0$
3. $< b_1, \ldots, b_k > = < a_1, \ldots, a_k >$

При $k = 1$ утверждения верны. Индукционный переход: $k - 1 \Rightarrow k$. По индукционному предположению имеем:

1. $b_i \perp b_j \qquad i, j < k \qquad i \neq j$
2. $b_i \neq 0 \qquad j < k$
3. $< b_1, \ldots, b_{k-1} > = < a_1, \ldots, a_{k-1} >$

Проверим первый пункт. Пусть $i < k$. Тогда:

$$(b_i, b_k) = \left(b_i, a_k - \sum_{j<k} \frac{(b_j, a_k)}{(b_j, b_j)} b_j \right) = (b_i, a_k) - \sum_{j<k} \frac{b_j, a_k}{b_j, b_j} (b_i, b_j)$$

$$= (b_i, a_k) - \frac{(b_i, a_k)}{(b_i, b_i)(b_i, b_i)} (b_i, b_i) = 0$$

Проверим второй пункт:

$$b_k = 0 \Rightarrow a_k < b_1, \dots, b_{k-1} >=< a_1, \dots, a_{k-1} >$$

Значит, a_k выражается через $a_1, \dots, a_{k-1}$. Противоречие с линейной независимостью $a_1, \dots, a_k$.

Проверим третий пункт. В силу определения b_k верно:

$$< b_1. \dots, b_{k-1}, b_k >=< b_1, \dots, b_{k-1}, a_k >=< a_1, \dots, a_{k-1}, a_k >$$

□

Следствие. *Любое подпространство евклидова (эрмитова) пространства имеет ортонормированный базис.*

Доказательство. Пусть $U \leq V$ — евклидово (эрмитово) пространство. Пусть $a_1, \dots, a_k$ — базис U.

Преобразуем $a_1, \dots, a_k \to b_1, \dots, b_k$ методом ортогонализации Грамма-Шмидта. Далее пусть

$$c_j = \frac{b_j}{\|b_j\|} \qquad j = 1, \dots, k$$

Тогда:

$$U =< a_1, \dots, a_k >=< b_1, \dots, b_k >=< c_1, \dots, c_k >$$

$c_1, \dots, c_k$ — ортонормированный базис в силу того, что $b_i \perp b_j$ при $i \neq j$, $b_j \neq 0$, $b_i \neq 0$. □

2.3 Изоморфизм евклидовых (эрмитовых) пространств

Лемма 2.3. *Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонороминный базис евклидова (эрмитова) пространства V. Пусть:*

$$a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \qquad b = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \qquad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

Тогда:

$$(a, b) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} \beta_j \qquad \|a\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2$$

Доказательство. Имеем:

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow i \neq j \\ 1 & \Leftarrow i = j \end{cases}$$

Тогда:

$$(a, b) = \left(\sum_i \alpha_i e_i, \sum_j \beta_j e_j \right) = \sum_{i,j} \overline{\alpha_i} \beta_j (e_i, e_j) = \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} b_j$$

$$\|a\|^2 = (a, a) = \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} \alpha_j = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2$$

□

Определение 2.5. Изоморфизм евклидовых (эрмитовых) пространств V и V' — это изоморфизм векторных пространств $a \leftrightarrow a'$ между V и V' с дополнительным свойством:

$$\begin{cases} a \leftrightarrow a' \\ b \leftrightarrow b' \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (a', b') \ \forall a, b \in V$$

Теорема 2.4. *Евклидовы (эрмитовы) пространства размерности n изоморфны стандартному евклидову (эрмитову) пространству $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C})$. Два евклидовых (эрмитовых) пространства изоморфны $\Leftrightarrow$ их размерности равны.*

Доказательство. Пусть $\dim V = n$, V — евклидово (эрмитово) пространство. Выберем ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства V. Установим соответствие между V и $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$.

$$a = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Тогда это соответствие — изоморфизм векторных пространств V и $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$. Дополнительное свойство изоморфизма евлидовых (эрмитовых) пространств следует из леммы 2.3

$$V \simeq V' \Leftrightarrow \dim V = \dim V'$$

□

2.4 Ортогональное разложение и проекторы

Определение 2.6. Пусть X — подмножество евклидова (эрмитова) пространства V и $X \neq \emptyset$. Его ортогональное дополнение $X^{\perp}$ задано следующим образом:

$$X^{\perp} = \{v \in V \mid v \perp u \ \forall u \in X\}$$

Лемма 2.5. *Пусть $U =< a_1, \dots, a_s >$ — линейная оболочка системы векторов евклидова (эрмитова) пространства V. Тогда:*

$$v \in U^{\perp} \Leftrightarrow v \perp a_j \ \forall j$$

Доказательство. $\Rightarrow$. Если $v \in U^{\perp}$, то $v \perp a_j \ \forall j$ в силу того, что $a_j \in U$.
$\Leftarrow$.

$$v \perp a_j \ \forall j \Rightarrow v \perp u \forall u$$

$$u = \sum_j \alpha_j a_j$$

$$(v, u) = \left(v, \sum_j \alpha_j a_j\right) = \sum_j \alpha_j (v, a_j) = 0$$

□

Теорема 2.6. *Пусть U — подпространство евклидова (эрмитова) пространства V. Тогда:*

1. *$U^{\perp}$ — подпространство.*
2. *$V = U \oplus U^{\perp}$*
3. *$(U^{\perp})^{\perp} = U$*

Доказательство.

1. Проверим замкнутость $U^{\perp}$ относительно линейной комбинации. Пусть $v, w \in U^{\perp}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Тогда $\forall u \in U$:

$$(\alpha v + \beta w, u) = \overline{\alpha}(v, u) + \overline{\beta}(w, u) = \overline{\alpha} 0 + \overline{\beta} 0 = 0$$

$$\alpha v + \beta w \in U^{\perp}$$

2. Очевидно, что $U \cap U^{\perp} = \{0\}$. Действительно, пусть $v \in U \cap U^{\perp}$. Тогда $v \perp v$, значит $(v, v) = 0$, поэтому $v = 0$.

   Пусть $e_1, \dots, e_k$ — ортонормированный базис U. Пусть $v \in V$, тогда:

$$v' := \sum_{j=1}^{n} (e_j, v) e_j$$

$$v'' := v - v' \qquad v' \in U$$

Докажем, что $v'' \in U^{\perp}$.

По лемме 2.5 достаточно проверить, что $v'' \perp e_i$ $\forall i = 1, \ldots, k$. Имеем:

$$(e_i, v'') = (e_i, v - \sum (e_j, v)e_j) = (e_i, v) - \sum_{j=1}^{k} (e_j, v)(e_i, e_j)$$
$$= (e_i, v) - (e_i, v)(e_i, e_i) = 0$$

Таким образом:

$$v = v' + v'' \qquad v' \in U \quad v'' \in U^{\perp} \quad \forall v \in V$$

Значит, $V = U + U^{\perp}$, а ввиду доказанного $V = U \oplus U^{\perp}$.

Ввиду доказанного $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$ $\forall U \leq V$. Имеем: $U \leq (U^{\perp})^{\perp}$. Сравним размерности:

$$\dim (U^{\perp})^{\perp} = \dim V - \dim U^{\perp} = \dim V - (\dim V - \dim U) = \dim U$$

$\square$

Определение 2.7. Пусть $v = v' + v''$, $v' \in U$, $v'' \in U^{\perp}$. Вектор v' — это ортогональная проекция v на U. Обозначается $v' = \operatorname{pr}_U v$. Вектор v'' — это ортогональная составляющая v относительно U. Обозначается $v'' = \operatorname{ort}_U v$.

Следствие. *$pr_U v = \sum (e_j, v)e_j$, где $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис U, а (e_j, v) — коэффициенты Фурье. Отображение $v \mapsto \operatorname{pr}_U v$ называется ортопроектором V на U. Он является линейным оператором.*

2.5 Метрика и расстояние до подпространств

Определение 2.8. Метрика на множестве X — это отображение $d\colon X \times X \to R$ со свойствами:

1. $d(x, y) \geq 0 \qquad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ $\forall x, y, z \in X$ — неравенство треугольника.

Пара (X, d) называется метрическим пространством, а его элементы называют точками.

Определение 2.9. Пара (X,d) — метрическое пространство. Пусть $A, B \subset X,\ A \neq \emptyset,\ B \neq \emptyset$. Имеем:

$$d(A,B) := \inf\{d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Теорема 2.7. *Пусть V — евклидово (эрмитово) пространство. Тогда:*

1. *$d(x,y) = \|x-y\|$ — метрика на V. Она называется евклидовой (эрмитовой).*

2. *Пусть $U < V$. Тогда $d(a,U) = \|\operatorname{ort}_U a\|$.*

Доказательство.

$$\|x-y\| \geq 0 \qquad \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$$

$$\|x-y\| = \|y-x\|$$
$$\|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-x\|$$

$$a = a' + a'' \qquad a' \in U \quad a'' \in U^{\perp} \qquad a' = \operatorname{pr}_U a \quad a'' = \operatorname{ort}_U a$$

Тогда:

$$\|a-u\|^2 = \|a'+a''-u\|^2 = \|(a'-u)+a''\|^2 = \|a'-u\|^2+\|a''\|^2 \geq \|a''\|^2\ \forall u \in U$$

Равенство $\Leftrightarrow u = a' = \operatorname{pr}_U a$.

$$d(a,U) = \inf\{\|a-u\| \mid u \in U\} = \|a''\| = \|\operatorname{ort}_U a\|$$

□

Замечание 2.1. Пусть $L = c + U$ — линейное многообразие. Доказать, что:

$$d(a,L) = \|\operatorname{ort}_U(a-c)\|$$

Доказательство. Оставляется читателю в качестве упражнения. □

2.6 Сопряженные линейные отображения

Определение 2.10. Пусть $a_1, \dots, a_s$ — система векторов евклидова (эрмитова) пространства V.

$$G_a = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_s) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots \\ (a_s, a_1) & \dots & (a_s, a_{s-1}) & (a_s, a_s) \end{pmatrix}$$

Матрица G_a — это матрица Грамма системы $a_1, \dots, a_s$. $\det G_a$ — определитель Грамма.

Лемма 2.8.

$$\det G_a = 0 \Leftrightarrow a_1, \dots, a_s \textit{ линейно зависимы.}$$

Доказательство. $\Leftarrow$. Пусть $\sum \lambda_j a_j = 0$ и $\exists \lambda_j \neq 0$. Тогда:

$$0 = (a_i, 0) = \left(a_i, \sum \lambda_j a_j\right) = \sum \lambda_j (a_i, a_j) \ \forall i$$

Это означает линейную зависимость столбцов с коэффициентами λ_j, значит $\det G_a = 0$.

$\Rightarrow$. Пусть $\det G_a = 0$. Тогда столбцы линейно зависимы.

$$\sum_{j=1}^{s} \lambda_j (a_i, a_j) = 0 \quad \forall i \quad \exists \lambda_j \neq 0$$

Умножим на $\overline{\lambda_i}$ и просуммируем по i:

$$\sum_i \overline{\lambda_i} \left(a_i, \sum_j \lambda_j a_j \right) = 0$$

$$\left(\sum_i \lambda_i a_i, \sum_j \lambda_j a_j \right) = 0$$

$$\sum \lambda_j a_j = 0 \quad \exists \lambda_j \neq 0$$

Значит $a_1, \dots, a_s$ линейно зависимы. □

Лемма 2.9 (Рисса). *Для любой линейной функции $f \colon V \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) на евклидовом (эрмитовом) пространтве V:*

$$\exists! z \in V \ : \ f(x) = (z, x) \quad \forall x \in V$$

Доказательство. Докажем существование. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис V и пусть $z := \sum_{i=1}^n \overline{f(e_i)} e_i$. Если $x = \sum x_j e_j$, то:

$$(z, x) = \sum \overline{\overline{f(e_j)}} x_j = \sum x_j f(e_j) = f\left(\sum x_j e_j\right) = f(x)$$

Докажем единственность.

$$(z, x) = (z', x) \quad \forall x \in V$$

$$(z - z', x) = 0 \quad \forall x \in V$$

Пусть $x = z - z'$, тогда:

$$(z - z', z - z') = 0 \Leftrightarrow z - z' = 0 \Leftrightarrow z = z'$$

□

Определение 2.11. Пусть $A\colon V \to W$ — линейные отображения евклидовых (эрмитовых) пространств V и W. Линейное отображение $A*\colon W \to V$ называется сопряженным (относительно скалярного произведения), если:

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \qquad (y, Ax) = (A^* y, x) \qquad \forall x \in V \ \forall y \in W$$

Теорема 2.10. *Для любого линейного отображения $A\colon V \to W$ евклидовых (эрмитовых) пространств сопряженное линейного отображение $A^*\colon W \to V$ существует и единственно.*

Если $e_1, \dots, e_n$ — некоторый базис V, $f_1, \dots, f_s$ — базис W, то:

$$(A^*)_e^f = G_e^{-1} \overline{A_f^e}^T G_f$$

Доказательство. Докажем существование и единственность A^*.

Пусть $y \in W$, $v \in V$ и $\varphi(x) = (y, Ax)$. Тогда $\phi\colon V \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ — линейное отображение. По лемме Рисса (2.9) $\exists! z \in V \ : \ z = z(\varphi) \quad \varphi(x) = (z, x)$ $\forall x \in X$. Так как φ зависит от A и y, то обозначим $z = z(\varphi) = A^* y$. Тогда $A^*\colon W \to V$ — линейное отображение и:

$$(y, Ax) = \varphi(x) = (z, x) = (A^* y, x) \quad \forall x \in V \ \forall y \in W$$

Теперь докажем единственность A^*. Пусть $y, y' \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$. Тогда:

$$\begin{aligned}(A^*(\lambda y + y'), x) &= (\lambda y + y', Ax) = \overline{\lambda}(y, Ax) + (y', Ax) \\ &= \overline{\lambda}(A^* y, x) + (A^* y', x) = (\lambda A^* y + A^* y', x) \quad \forall x \in V\end{aligned}$$

$$A^*(\lambda y + y') = \lambda A^* y + A^* y' \qquad \forall y, y' \in V$$

Значит, A^* — линейное преобразование. По лемме Рисса (2.9) имеем:

$$(z, x) = (z', x)$$

Единственность A^* следует из леммы Рисса.

Найдем вид матрицы A^*.

$$Ae_j = \sum_i a_{ij} f_i \qquad A_f^e = (a_{ij})$$

$$A^* f_j = \sum_k a_{kj} e_k \qquad (A^*)_e^f = (a_{kj})$$

$$(e_i, A^* f_j) = \left(e_i, \sum_k a_{kj}^* e_k\right) = \sum_k a_{kj}^* (e_i, e_k)$$

$$(Ae_i, f_j) = \sum_k \overline{a_{ki}} (f_k, f_j)$$

$$G_e (A^*)_e^f = (\overline{A_f^e})^T G_f$$

$$(A^*)_e^f = G_e^{-1} (\overline{A_f^e})^T G_f$$

□

Следствие. *Если $e_1, \ldots, e_k$ — ортонормированный базис V, а $f_1, \ldots, f_s$ — ортонормированный базис W, то:*

$$(A^*)_e^f = (\overline{A_f^e})^T$$

Доказательство. В данном случае G_e и G_f — единичные матрицы. □

Следствие.

$$(A + B)^* = A^* + B^*$$
$$(AB)^* = B^* A^*$$
$$(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$$
$$(A^*)^{-1} = (A^- 1)^*$$
$$(A^*)^* = A$$

Доказательство. Доказательство следует из предыдущего следствия и свойств матриц. □

2.7 Самосопряженные операторы

Определение 2.12. Вещественная (комплексная) матрица A называется симметрической (эрмитовой), если: $A^T = A$ ($\overline{A}^T = A$). Все симметрические вещественные матрицы — эрмитовы.

Теорема 2.11. *Для линейного оператора A евклидова (эрмитова) пространства V следующие утверждения равносильны:*

1. $(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall x, y \in V$
2. $A^* = A$
3. *Матрица A симметрическая (эрмитова) во всяком ортонормированном базисе V.*
4. *Матрица A симметрическая (эрмитова) во некотором ортонормированном базисе V.*

Такой оператор A называют симметрическим (эрмитовым) или самосопряженным.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$.

$$(A^*y, x) = (y, Ax) = (Ay, x) \qquad \forall x \in V$$

По лемме Рисса (2.9):

$$A^*y = Ay \quad \forall y \Rightarrow A^* = A$$

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — произвольный ортонормированный базис V. Тогда:

$$\overline{A}_e^T = (A^*)_e = A_e$$

$3 \Rightarrow 4$. Очевидно.

$4 \Rightarrow 1$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — такой ортонормированный базис V, что A_e — симметрическая (эрмитова) матрица. Если $x, y \in V$, то:

$$x = \sum x_i e_i \qquad y = \sum y_i e_i$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i = \begin{pmatrix} \overline{x_1} & \ldots & \overline{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \overline{x}_e^T y_e$$

Отсюда:

$$(Ax, y) = \overline{(Ax)}_e^T y_e = \overline{(A_e x_e)}^T y_e = \overline{x}_e^T \overline{A}_e^T y_e$$
$$= \overline{x}_e^T A_e y_e = \overline{x}_e^T (Ay)_e = (x, Ay)$$

□

Лемма 2.12. *Пусть A — самосопряженный оператор евклидова (эрмитова) пространства V и U — A-инвариантное подпространство из V. Тогда:*

1. *$A\,|_U$ — самосопряженный оператор.*
2. *$W = U^\perp \Rightarrow AW \subseteq W$.*

Доказательство. Первый пункт леммы следует из тождества:

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall x, y \in U \subseteq V$$

Докажем второй пункт. Пусть $u \in U$, $v \in W$. Тогда:

$$(u, Aw) = (\underbrace{Au}_{\in U}, w) = 0$$

$$Aw \perp U \Rightarrow Aw \in W$$

□

Теорема 2.13. *Спектр самосопряженного оператора евклидова (эрмитова) пространства является вещественным, а пространство имеет ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора.*

Доказательство. Докажем, что $\operatorname{Sp} A \subset R$. Пусть $A\colon V \to V$, $A^* = A$, V — эрмитово.

По теореме об алгебраической замкнутости $\mathbb{C}$ имеем $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{C}$. Пусть $\lambda \in \operatorname{Sp} A$. Тогда:

$$\exists v \in V \ : \ v \neq 0, \ Av = \lambda v$$

в силу того, что V — эрмитово. Отсюда:

$$(Av, v) = (v, Av)$$

$$(\lambda v, v) = (v, \lambda v)$$

$$\overline{\lambda}(v, v) = \lambda(v, v) \qquad (v, v) > 0$$

$$\overline{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}$$

Тогда спектр эрмитовых матриц — вещественный, спектр вещественных матриц — вещественный, спектр самосопряженного оператора в евклидовом пространстве — вещественный.

Так как $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}$, то для $\lambda \in \operatorname{Sp} A$ всегда существует собственное подпространство:

$$V_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda E)$$

$$\begin{cases} V_\lambda \perp V_{\lambda'} \Leftarrow \lambda \neq \lambda' \\ V = \bigoplus\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} V_\lambda \end{cases}$$

Имеем при $\lambda, \lambda' \in \operatorname{Sp} A$, $\lambda \neq \lambda'$.

$$Av = \lambda v \qquad v \neq 0$$

$$Av' = \lambda' v' \qquad v' \neq 0$$

Тогда:

$$(Av, v') = (v, Av')$$

$$(\lambda v, v') = (v, \lambda' v') \qquad \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$$

$$\lambda(v, v') = \lambda'(v, v')$$

$$(\lambda - \lambda')(v, v') = 0$$

$$\lambda \neq \lambda' \Rightarrow v \perp v' \Rightarrow V\lambda \perp V_{\lambda'}$$

Тогда:

$$U = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} V_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} V_\lambda$$

Если $U < V$, то $W = U^\perp > \{0\}$.

$$AU \subseteq U \Rightarrow AW \subseteq W$$

$A\mid_W$ — самосопряженный оператор. Значит, $\operatorname{Sp}(A\mid_W) \subset \operatorname{Sp} A$.

$$\lambda \in \operatorname{Sp}(A\mid_W) \quad w \neq 0 \Rightarrow Aw = \lambda w \quad w \in V_\lambda \qquad V_\lambda \cap W = \{0\}$$

$w = 0$ — противоречие. Следовательно, $V = U = \bigoplus V_\lambda$. Выберем в каждом V_λ ортонормированный базис. Их объединение — требуемый ортонормированный базис V. $\square$

Следствие. *Всякая симметрическая (эрмитова) матрица ортогонально (унитарно) подобна диагональной:*

$$\overline{A}^T = A \Rightarrow \exists Q \ : \ Q^{-1} = \overline{Q}^T \qquad Q^{-1}AQ = D$$

Доказательство. Пусть $V = \mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) — координатное евклидово (эрмитово) пространство. A — симметрическая (эрмитова) матрица порядка n. $\mathcal{A}\colon x \mapsto Ax$ $(x \in V)$ — линейный оператор на V. Тогда $\mathcal{A}_e = A$ в стандартном базисе $e_1, \ldots, e_n$ из $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$. Так как $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис V, то оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен по теореме 2.11.

По теореме 2.13 существует ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_n$, составленный из собственных векторов A:

$$Af_j = \lambda_j f_j \qquad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

Отсюда:

$$Af = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 \ldots & \ddots & 0 \ldots \\ 0 \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

С другой стороны:

$$A_f = Q^{-1} A_e Q$$

где $Q\colon e \to f$ — матрица перехода между ортогональными базисами, значит Q — ортогональна (унитарна).

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$, тогда $Q = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ (координаты векторов по столбцам). Тогда:

$$\overline{Q}^T Q = (\overline{f_i}^T \cdot f_j) = ((f_i, f_j)) = E$$

Значит, $Q^{-1} = \overline{Q}^T$. □

Следствие (о спектральном разложении)**.** *Всякие самосопряженный оператор A имеет спектральное разложение:*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Rightarrow \mathcal{A} = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}} \lambda P_\lambda$$

$$P_\lambda^2 = P_\lambda \quad P_\lambda^* = P_\lambda \quad P_\lambda \circ P_{\lambda'} = 0 \ (\lambda \neq \lambda') \qquad \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}} P_\lambda = E$$

Доказательство. По теореме 2.13 имеем:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} V_\lambda \qquad V_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda E)$$

Пусть P_λ — ортопроектор V на V_λ.

$$V = \sum_\lambda v_\lambda \qquad v_\lambda \in V_\lambda \qquad P_\lambda v = v_\lambda$$

Также заметим, что P_λ — проектор, а значит $P_\lambda^2 = P_\lambda$.

Проверим $P_\lambda^* = P_\lambda$. Пусть $w = \sum_\lambda w_\lambda$, где $w_\lambda \in V_\lambda$. Тогда:

$$(P_\lambda v, w) = (v_\lambda, w) = \left(v_\lambda, \sum_{\lambda'} w_{\lambda'}\right) = \sum_{\lambda'} (v_\lambda, w_{\lambda'}) \\ = (v_\lambda, w_\lambda) = (v, w_\lambda) = (v, P_\lambda w)$$

$$P_\lambda P_{\lambda'} = 0 \Leftarrow V_\lambda \perp V_{\lambda'} \quad \lambda \neq \lambda'$$

$$Ev = v = \sum v_\lambda = \sum P_\lambda v = \left(\sum P_\lambda\right) v \qquad \forall v \in V$$

Это выполнено для всех v, а значит $E = \sum P_\lambda$.

$$Av = A\left(\sum v_\lambda\right) = \sum A v_\lambda = \sum \lambda v_\lambda = \sum \lambda P_\lambda v = \left(\sum \lambda P_\lambda\right) v \qquad \forall v \in V$$

□

Следствие. *Обратное утвеждение тоже верно. Доказательство единственности спектрального разложения оставляется читателю в качестве упражнения.*

2.8 Кососимметрические и косоэрмитовы операторы

Определение 2.13. Матрица вещественная (комплексная) называется кососимметрической (косоэрмитовой), если:

$$A^T = -A \qquad (\overline{A}^T = -A)$$

Теорема 2.14. *Для линейного оператора A евклидова (эрмитова) пространства V следующие утверждения равносильны:*

1. $(Ax, y) = -(x, Ay) \quad \forall x, y \in V$
2. $A^* = -A$

3. Матрица A — косая в любом ортонормированном базисе V.

4. Матрица A — косая в некотором ортонормированном базисе V.

Такой оператор называется кососимметрическим (косоэрмитовым).

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Имеем:

$$(x, A^*y) = (Ax, y) = (x, -Ay) \quad \forall x \in V$$

Тогда по лемме Рисса:

$$A^*y = -Ay \quad \forall y \in V \Rightarrow A^* = -A$$

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — любой ортонормированный базис V. Имеем:

$$(A^*)_e = (\overline{A_e})^T \qquad (A^*)_e = (-A)_e = -A_e$$

$3 \Rightarrow 4$. Тривиально. $4 \Rightarrow 1$. Пусть A_e — кососимметрическая матрица для некоторого ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n$. Тогда:

$$\begin{aligned}(Ax, y) = \overline{(Ax)}_e^T y_e = (\overline{A_e x_e})^T y_e = \overline{x_e}^T \overline{A_e}^T y_e \\ = \overline{x_e}^T(-A_e) y_e = -\overline{x_e}^T (Ay)_e = -(x, Ay)\end{aligned}$$

□

Следствие.

$$A^* = -A \Leftrightarrow Ax \perp x \quad \forall x \in V$$

Доказательство. $\Rightarrow$.

$$(Ax, x) = -(x, Ax) = (-Ax, x) \Rightarrow (Ax, x) = 0 \Leftrightarrow Ax \perp x$$

$\Leftarrow$. Пусть $Ax \perp x$ $\forall x \in V$. Тогда

$$\forall x, y \in V \quad A(x + y) \perp (x + y)$$

$$\begin{aligned}0 = (Ax + Ay, x + y) = (Ax, x) + (Ax, y) + (Ay, x) + (Ay, y) \\ = (Ax, y) + (Ay, x) = (Ax, y) + (x, Ay) = 0 \Rightarrow (Ax, y) = -(x, Ay)\end{aligned}$$

□

Лемма 2.15. *Пусть A — косой оператор евклидова (эрмитова) пространства V и U — инвариантное подпространство из V относительно A. Тогда:*

1. $A\,|_U$ *— косой.*

2. если $W = U^\perp$*, то* $AW \subseteq W$*.*

Доказательство. 1. Следует из того, что A — косой оператор:

$$(Ax, y) = -(x, Ay) \quad \forall x, y \in U \subseteq V$$

2. Пусть $u \in U$, $w \in W$. Тогда:

$$(u, Aw) = -(\underbrace{Au}_{\in U}, w) = 0 \quad \forall u \in U$$

Это означает, что $Aw \perp u$. Значит, $Aw \in W$.

$$Aw \perp U \Rightarrow Aw \in W = U^\perp$$

□

Теорема 2.16. *1. Пусть* A *— косоэрмитов оператор в эрмитовом пространстве* V*. Тогда* $\operatorname{Sp} A \subseteq \mathbb{R}_i$ *(чисто мнимые числа) и пространство* V *имеет ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора* A*.*

2. Пусть A *— кососимметрический оператор в евклидовом пространстве* V*. Тогда* $\operatorname{Sp} A$ *чисто мним и симметричен на* $\mathbb{R}_i$ *относительно нуля. Пространство* V *имеет ортонормированный базис, в котором матрица* A *принимает клеточно-диагональный вид с клетками:* $\left(\begin{smallmatrix} 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{smallmatrix}\right)$ $(\beta > 0)$*. Такая матрица и базис называются каноническими относительно* A*.*

Доказательство. 1. Пусть V — эрмитово пространство. Тогда $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{C}$. Если $\lambda \in \operatorname{Sp} A$, то $\exists u \in V,\ u \neq 0 :\ Au = \lambda u$. Отсюда:

$$(Au, u) = -(u, Au) \Rightarrow (\lambda u, u) = -(u, \lambda u)$$

$$\overline{\lambda}(u, u) = -\lambda(u, u) \qquad (u, u) > 0 \Rightarrow \overline{\lambda} = -\lambda$$

$$\lambda = \alpha + \beta i \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha - \beta i = -\alpha - \beta i$$

$$\alpha = -\alpha \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow u = \beta i \in \mathbb{R}_i \Rightarrow \operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}_i$$

2. По доказанному $\operatorname{Sp} A$ косоэрмитовой матрицы чисто мним. Спектр кососимметрической матрицы тоже чисто мним. Он симметричен относительно нуля, так как $\chi_A(t) \in \mathbb{R}[x]$.

   Если V — эрмитово пространство, то по доказанному оно представимо в виде суммы $V_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda E)$, ортогональных при различных λ.
$$\left.\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ Aw &= \lambda' w \\ \lambda &\neq \lambda' \end{aligned}\right\} \Rightarrow v \perp w$$

   Действительно:
$$(Av, w) = -(v, Aw) \qquad (\lambda u, w) = -(v, \lambda' w)$$
$$\overline{\lambda}(v, w) = -\lambda'(v, w)$$

   Если $(v, w) \neq 0$, то $\overline{\lambda} = -\lambda'$. Если $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_i$, то $-\lambda = -\lambda'$ и $\lambda = \lambda'$. При $\lambda \neq \lambda'$ имеем:
$$(v, w) = 0 \Rightarrow v \perp w$$

   В итоге:
$$U = \sum V_\lambda = \bigoplus^{\perp} V_\lambda \leq V$$

   Если $U < V$, то $W = U^\perp > 0$. Кроме того, W инвариантен относительно A и $A\,|_W$ — косой оператор. Существует $w \neq 0,\ w \in W,\ Aw = \lambda w$. Тогда $w \in V_\lambda \cap W = \{0\}$. Противоречие. Значит, $U = V = \bigoplus^\perp V_\lambda$. Объединение ортонормированных базисов V_λ даст ортонормированный базис V.

   Пусть V — евклидово пространство. Так как $\chi_A(t) \in \mathbb{R}[t]$ и $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}_i$, то:
$$\chi_A(t) = \pm t^k \prod_{\beta > 0 \beta i \in \operatorname{Sp} A} (t - \beta_i)^{k(\beta i)} (t + \beta i)^{k(\beta i)} = \pm t^k \prod_{\beta i \in \operatorname{Sp} A} (t^2 + \beta^2)^{k(\beta i)}$$
$$V = \operatorname{Ker} A^k \oplus (\oplus \operatorname{Ker}(A^2 + \beta^2 E)^{k(\beta i)}) \tag{8}$$

   Покажем, что $\operatorname{Ker} A^k = \operatorname{Ker} A$. Действительно, если есть корневой вектор, отвечающий собственному значению 0 и высоты > 1, то существует корневой вектор высоты 2:
$$\exists A^2 u = 0 \qquad Au \neq 0$$
$$0 = (A^2 u, u) = -(Au, Au) = 0 \Rightarrow Au = 0$$

Противоречие. Значит, $\operatorname{Ker} A^k = \operatorname{Ker} A$. Можно выбрать ортонормированный базис из $\operatorname{Ker} A$.

Пусть $\beta > 0$. Тогда:

$$\operatorname{Ker}(A^2 + \beta^2 E)^{k(\beta i)} = \operatorname{Ker}(A^2 + \beta^2 E)$$

в силу того, что A^2 — самосопряженная.

$$(A^2)^* = (A^*)^2 = (-A)^2 = A^2$$

Для самосопряженных операторов все корневые векторы имеют высоту 1. Пусть:

$$u \in \operatorname{Ker}(A^2 + \beta^2 E) \quad u \neq 0 \quad \|u\| = 1$$

Тогда:

$$A^2 u = -\beta^2 u \qquad v = \frac{Au}{\beta}$$

Тогда $v \perp u$ по доказанному.

С другой стороны:

$$\|v\|^2 = (v, v) = \frac{1}{\beta^2}(Au, Au) = -\frac{1}{\beta^2}(u, A^2 u) = -\frac{1}{\beta^2}(u, -\beta^2 u) = (u, u) = 1$$

$$Au = \beta v$$

$$Av = A\left(\frac{Au}{\beta}\right) = \frac{A^2 u}{\beta} = -\beta u$$

$$A_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

Ясно, что $< u, v > \subset \operatorname{Ker}(A^2 + \beta^2 E)$. Если $U < \operatorname{Ker}(A^2 + \beta^2 E)$, то по лемме $U^\perp \cap \operatorname{Ker}(A^2 + \beta^2 E)$ имеет меньшую размерность, а значит инвариантно относительно A. Можно считать по индукции, что оно имеет канонический базис относительно A. Заметим также, что слагаемые суммы 8 ортогональны. Значит можно использовать индукцию по $\dim V$

$\square$

Пример 2.2.

$$A\colon x \mapsto Ax \qquad x \in \mathbb{R}^3 \qquad V = \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = -t^3 - 3 = -t(t^2+3)$$
$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} A \oplus^{\perp} \operatorname{Ker}(A^2+3E)$$
$$\left(\frac{E}{A}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
$$w = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v = \frac{Au}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} Au = \sqrt{3}v \\ Av = -\sqrt{3}u \\ Aw = 0 \end{cases}$$
$$A_{(u,v,w)} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следствие. *Всякая кососимметрическая (косоэрмитова) матрица ортогонально (унитарно) подобна канонической кососимметрической (косоэрмитовой) матрице.*

Доказательство. Доказательство аналогично соответствующему доказательству следствия для самосопряженных операторов. □

Следствие. *Евклидово пространство относительно кососимметрического оператора распадается в ортогональную сумму прямых и плоскостей, причем на каждой прямой из суммы оператор действует как нулевой, а на каждой плоскости из суммы — как поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ с коэффициентом подобия $\beta > 0$.*

$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.9 Ортогональные и унитарные операторы

Определение 2.14. Вещественная (комплексная) матрица называется ортогональной (унитарной), если:

$$A^{-1} = A^T \qquad (A^{-1} = \overline{A}^T)$$

Ортогональная матрица всегда унитарна.

Теорема 2.17. *Для линейного оператора A евклидова (эрмитова) пространства V следующие утверждения равносильны:*

1. $\|Ax\| = \|x\| \quad \forall x \in V$
2. $(Ax, Ay) = (x, y) \quad \forall x, y \in V$
3. $A^{-1} = A^*$
4. *Матрица A ортогональна (унитарна) в любом ортонормированном базисе V.*
5. *Матрица A ортогональна (унитарна) в некотором ортонормированном базисе V.*
6. *Оператор A переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис.*
7. *Оператор A переводит некоторый ортонормированный базис в ортонормированный базис.*

Такой линейный оператор называется ортогональным (унитарным).

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$ ввиду поляризационных тождеств. Например, в евклидовом пространстве:

$$(x, y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

$$(Ax, Ay) = \frac{\|Ax + Ay\|^2 - \|Ax\|^2 - \|Ay\|^2}{2} = \frac{\|x + y\| - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} = (x, y)$$

Аналогично в эрмитовом пространстве.

$2 \Rightarrow 3$. Имеем:

$$(A^*Ax, y) = (Ax, Ay) = (x, y) \qquad \forall x, y$$

По лемме Рисса:

$$A^*Ax = x \quad \forall x \Rightarrow A^*A = E \Leftrightarrow A^{-1} = A^*$$

$3 \Rightarrow 4$. В любом ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства V имеем:

$$(A_e)^{-1} = (A^{-1})_e = (A^*)_e = \overline{A_e}^T$$

$4 \Rightarrow 5$. Очевидно.

$5 \Rightarrow 6$. Пусть в ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрица A_e ортогональна (унитарна). Докажем сначала, что $(Ax, Ay) = (x, y) \quad \forall x, y \in V$. Действительно:

$$(Ax, Ay) = (\overline{Ax})_e^T \cdot (Ay)_e = \overline{(A_e x_e)}^T A_e y_e = \overline{x_e}^T (\overline{A_e}^T A_e) y_e = \overline{x_e}^T y_e = (x, y)$$

Теперь если $f_1, \ldots, f_n$ — любой ортонормированный базис V, то:

$$(Af_i, Af_j) = (f_i, f_j) = \begin{cases} 0 & \text{когда } i \neq j \\ 1 & \text{когда } i = j \end{cases}$$

Значит, $Af_1, \ldots, Af_n$ — ортонормированный базис V.

$6 \Rightarrow 7$. Очевидно.

$7 \Rightarrow 1$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $Ae_1, \ldots, Ae_n$ — ортонормированный базис V. Пусть $x = \sum x_j e_j$. Тогда $Ax = \sum x_j Ae_j$. Отсюда:

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum |\lambda_j|^2} = \|x\|$$

$\square$

Следствие. *Пусть A — ортогональный (унитарный) оператор евклидова (эрмитова) пространства V. Пусть $b \in V$ — любой вектор. Тогда отображение:*

$$x \mapsto Ax + b = f(x)$$

сохраняет расстояния между точками евклидова (эрмитова) метрического пространства V, а значит является изометрией.

Доказательство. Пусть $x, x' \in V$. Тогда:

$$\|f(x) - f(x')\| = \|(Ax + b) - (Ax' + b)\| = \|A(x - x')\| = \|x - x'\|$$

$\square$

Следствие. *Верно и обратное: любая изометрия имеет такой вид.*

Доказательство. Оставляется читателю в качестве упражнения. $\square$

Лемма 2.18. *Пусть A — ортогональный (унитарный) оператор евклидова (эрмитова) пространства V. Пусть U — A-инвариантное подпространство из V. Тогда:*

1. *$A|_U$ — ортогональный (унитарный) оператор.*
2. *Если $W = U^\perp$, то $AW \subseteq W$.*

Доказательство. 1. Следует из свойства сохранения расстояний:

$$\|Au\| = \|u\| \quad \forall u \in U \subseteq V$$

2. Очевидно, что $AU = U$. Пусть $u \in V$ и $Au = 0$.

$$0 = \|Au\| = \|u\| \Rightarrow u = 0$$

Значит, $\mathrm{Ker}(A\mid_U) = \{0\}$. Предположим, что $u \in U$, $w \in W$. Тогда:

$$(Aw, Au) = (w, u) = 0 \Rightarrow Aw \perp Au$$

$$AU = U \Rightarrow AW =\subseteq W$$

$\square$

Теорема 2.19. *1. Пусть A — унитарный оператор эрмитова пространства V. Тогда $\mathrm{Sp}\, A$ состоит из единичных векторов из множества:*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Пространство V имеет ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов относительно оператора A.

2. Пусть A — ортогональный оператор евклидова пространства V. Тогда $\mathrm{Sp}\, A$ лежит на единичной окружности $\mathbb{C} \ni |z| = 1$ и симметричен относительно вещественной оси. Пространство V имеет ортонормированный базис, в котором матрица оператора A имеет клеточно-диагональный вид: (± 1), $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, причем $\sin\varphi > 0$. Такие базис и матрица называются каноническими для ортогонального оператора.

Доказательство. 1. Найдем $\mathrm{Sp}\, A$. Пусть V — эрмитово пространство. Тогда $\mathrm{Sp}\, A \subset \mathbb{C}$. Если $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$, то существует $v \in V$ такой, что: $Av = \lambda v$ и $v \neq 0$. Тогда:

$$(Av, Av) = (v, v) = (\lambda v, \lambda v) = \overline{\lambda}\lambda(v, v)$$

$$\overline{\lambda}\lambda = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$$

$$\mathrm{Sp}\, A \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = S'$$

Это означает, что спектр унитарной матрицы лежит в S'. Тогда спектр ортогонального матрицы также лежит в S' и симметричен относительно $\mathbb{R}$ из $\mathbb{C}$. Это же верно и для ортогонального оператора.

2. Найдем канонический базис. Используем аддитивное разщепление:

$$A = \frac{A + A^*}{2} + \frac{A - A^*}{2}$$

$$S := \frac{A + A^*}{2} \qquad T := \frac{A - A^*}{2}$$

Тогда $S^* = S$ и $T^* = -T$. В силу того, что $A^* = A^{-1}$, верно $ST = TS$. По теореме о самосопряженных операторах:

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \operatorname{Sp} S \subset \mathbb{R}}^{\perp} V_\alpha$$

$$V_\alpha = \operatorname{Ker}(S - \alpha E)$$

V_α инвариантно относительно T.

$$T(S - \alpha E) = (S - \alpha E)T$$

Если V — эрмитово пространство, то V_α имеет ортонормированный базис из собственных векторов относительно T в силу того, что $T^* = -T$. Объединяя базисы V_α по всем α, получим ортонормированный базис V, состоящий из собственных векторов относительно A:

$$\begin{cases} f_j \in V_j \\ Tf_j = (i\beta)f_j \qquad \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$Af_j = (S + T)f_j = \alpha f_j + (i\beta)f_j = (\alpha + i\beta)f_j$$

Пусть V — евклидово пространство. Тогда V_α имеет канонический ортонормированный базис относительно T.

$$\begin{cases} f_j \in V_\alpha \\ Tf_j = 0 \end{cases} \Rightarrow Af_j = \alpha f_j \Rightarrow \|Af_j\| = \|f_j\| \Rightarrow |\alpha| = 1 \quad \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

$$u, v \in V_\alpha \qquad \begin{cases} Tu = \beta v \\ Tv = -\beta u \end{cases} \qquad u \perp v \qquad \|u\| = \|v\| = 1$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$Au = (S + T)u = \alpha u + \beta v$$
$$Av = (S + T)v = -\beta u + \alpha v$$

$$A_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Если $U =< u, v >$, то $AU \subseteq U$.

$$\operatorname{Sp}(A\mid_U) \subset \operatorname{Sp} A \subset S'$$

$$\begin{vmatrix} \alpha - t & -\beta \\ \beta & \alpha - t \end{vmatrix} = t^2 - (2\alpha)t + \alpha^2 + \beta^2 = 0$$

$$t = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - (\alpha^2 + \beta^2)} = \alpha \pm i\beta$$

$$\alpha = \cos\varphi \qquad \beta = \sin\varphi > 0$$

$$A_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

□

Следствие. *Всякая ортогональная (унитарная) матрица ортогонально (унитарно) подобна канонической ортогональной (унитарной) матрице.*

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & & & & & & & \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & \cos\varphi_s & -\sin\varphi_s & & & & & & \\ & & & \sin\varphi_s & \cos\varphi_s & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix} \qquad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Следствие. *Евклидово пространство относительно любого ортогонального оператора разлагается в ортогональную сумму прямых и плоскостей, причем на каждой прямой из суммы оператор действует тождественно $x \mapsto x$ или центрально симметрично $x \mapsto -x$, а на каждой плоскости из суммы — как поворот на угол φ $(0 < \varphi < \pi)$.*

2.10 Нормальные операторы

Определение 2.15. Вещественная (комплексная) матрица A называется нормальной, если $AA^T = A^T A$ ($A\overline{A}^T = \overline{A}^T A$)

Теорема 2.20. *Для линейного оператора A евклидова пространства (эрмитова) V следующие утверждения равносильны:*

1. $\|A^*x\| = \|Ax\| \quad \forall x \in V$
2. $(A^*x, A^*y) = (Ax, Ay) \quad \forall x, y \in V$
3. $A^*A = AA^*$
4. *Матрица A нормальная в любой ортонормированном базисе V.*
5. *Матрица A нормальная в некотором ортонормированном базисе V.*
6. *Для любого ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n$ пространства V:*
$$(A^*e_i, A^*e_j) = (Ae_i, Ae_j) \quad \forall i, j$$
7. *Для некоторого ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n$ пространства V:*
$$(A^*e_i, A^*e_j) = (Ae_i, Ae_j) \quad \forall i, j$$

Такой оператор называется нормальным.

Доказательство. Аналогично доказательству соответствующей теоремы об ортогональных (унитарных) операторах. □

Теорема 2.21. 1. *Линейный оператор A эрмитова пространства V нормальный $\Leftrightarrow$ V имеет ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов относительно A.*

2. *Линейный оператор A евклидова пространства V нормальный $\Leftrightarrow$ V имеет ортонормированный базис, в котором матрица оператора является канонической нормальной матрицей, то есть клеточно-диагональной с клетками $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)$, (α), где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. $\Leftarrow$. Если в некотором ортонормированном базисе матрица A имеет вид: $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ или $\mathrm{Diag}\left((\alpha), \left(\begin{smallmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right), \ldots\right)$, то такая матрица нормальна. Для матрицы $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ это очевидно: сопряженная матрица будет также диагональной. Рассмотрим второй случай:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & 0 \\ 0 & \beta^2+\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & 0 \\ 0 & \beta^2+\alpha^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$. Пусть $A^*A = AA^*$. Используем аддитивное расщепление:

$$A = \frac{A+A^*}{2} + \frac{A-A^*}{2}$$

$$S := \frac{A+A^*}{2} \qquad T := \frac{A-A^*}{2}$$

$$S^* = S \qquad T^* = -T \qquad ST = TS$$

По основной теореме о самосопряженных операторах имеем:

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{Sp}\, S \subset \mathbb{R}}^{\perp} V_\alpha \qquad V_\alpha = \mathrm{Ker}(S - \alpha E)$$

Так как $S(T - \alpha E) = (S - \alpha E)T$, то V_α — инвариантно относительно T. $T\,|_{V_\alpha}$ — косой оператор.

Если V — эрмитово пространство, то V_α имеет ортонормированный базис из собственных векторов относительно T. Объединение всех таких базисов по $\alpha \in \mathrm{Sp}\, S$ и дает ортонормированный базис V, состоящий из собственных векторов относительно $A = S + T$. В этом базисе матрица A диагональна.

Если V — евклидово пространство, то V_α имеет канонический ортонормированный базис относительно T. Если w из такого базиса и $Tw = 0$, а $Aw = \alpha w$. Значит $Aw = (\,\alpha\,)$.

Если $u, v \in V_\alpha$, $u \perp v$, $\|u\| = \|v\| = 1$ и:

$$Tu = \beta v$$
$$Tv = -\beta u$$

то тогда:

$$Au = (S+T)u = \alpha u + \beta v$$
$$Av = (S+T)v = -\beta u + \alpha v$$

$$A_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Объединение таких базисов V_α относительно T по всем $\alpha \in \mathrm{Sp}\, A$ дает требуемый ортонормированный базис. $\square$

2.11 Сингулярные числа и сингулярное разложение

Теорема 2.22. *Пусть $A\colon V \to W$ — линейное отображение евклидовых (эрмитовых) пространств. Тогда:*

1. *Существуют вещественные числа $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, ортонормированный базис $v_1, \dots, v_n$ пространства V и ортонормированный базис $w_1, \dots, w_s$ пространства W такие, что:*

$$Av_j = \begin{cases} \sigma_j w_j & \Leftarrow j \leq r = \operatorname{rk} A \\ 0 & \Leftarrow j > r \end{cases}$$

   Такие числа и базисы называются сингулярными относительно A.

2. *Сингулярные числа задаются отображением A однозначно, причем $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$, где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n$ — собственные числа оператора A^*A.*

Замечание 2.2. Сингулярные числа — это набор $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 = \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_m$, где $m = \min\{\dim V, \dim W\}$.

Доказательство теоремы. Докажем существование сингулярных чисел и сингулярного базиса. Имеем: $V \xrightarrow{A} W \xrightarrow{A^*} V$. Значит $A^*A\colon V \to V$ — линейный оператор. Кроме того, $(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$ — самосопряженный оператор. По основной теореме о самосопряженных операторах $\mathrm{Sp}(A^*A) \subset \mathbb{R}$. Если $\lambda \in \mathrm{Sp}(A^*A)$, то:

$$\exists v \in V \quad v \neq 0 \quad A^*Av = \lambda v \quad \|\lambda\| = 1$$

Тогда:

$$\lambda = \lambda(v, v) = (v, \lambda v) = (v, A^*Av) = (Av, Av) \geq 0 \qquad \mathrm{Sp}(A^*A) \subset \mathbb{R}_+$$

$$\mathrm{Sp}(A^*A) \ : \ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n$$

Кроме того, существует ортонормированный базис $v_1, \dots, v_n$ пространства V:

$$A^*Av_j = \lambda_j v_j \quad \forall j$$

Отсюда:

$$(Av_i, Av_j) = (v_i, A^*Av_j) = (v_i, \lambda_j v_j) = \begin{cases} \lambda_j & \Leftarrow i = j \leq r \\ 0 & \Leftarrow i \neq j \lor i = j > r \end{cases}$$

Пусть $w_j = \frac{Av_j}{\|Av_j\|} = \frac{Av_j}{\sqrt{\lambda_j}}$ при $j \le r$. Тогда $w_1, \dots, w_r$ — ортонормированная система в W. Включим его ортонормированный базис W:

$$w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_s$$

Отсюда:

$$Av_j = \begin{cases} \sqrt{\lambda_j} w_j & \Leftarrow j \le r \\ 0 & \Leftarrow j > r \end{cases}$$

Таким образом $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \dots, \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}$ — искомые сингулярные числа.

Докажем единственность сингулярных чисел. Пусть даны некоторые числа $\sigma_1 \ge \dots \ge \sigma_r > 0$ и ортонормированные базисы $v_1, \dots, v_n$, $w_1, \dots, w_s$, удовлетворяющие условию теоремы:

$$Av_j = \begin{cases} \sqrt{\lambda_j} w_j & \Leftarrow j \le r \\ 0 & \Leftarrow j > r \end{cases}$$

Вычислим вектор $A^* w_j$ через коэффициенты Фурье в базисе $v_1, \dots, v_n$.

$$(v_i, A^* w_j) = (Av_i, w_j) = \begin{cases} (\sigma_i w_i, w_j) = \sigma_i & \Leftarrow i = j \le r \\ (0, w_j) = 0 \Leftarrow i \ne j \vee i = j > r \end{cases}$$

Следовательно:

$$A^* w_j = \sum_{i=1}^{n} (v_i, A^* w_j) v_i = \begin{cases} \sigma_j v_j & \Leftarrow j \le r \\ 0 & \Leftarrow j > r \end{cases}$$

Таким образом, сингулярный базис и сингулярные числа для A и A^* совпадают. Теперь:

$$A^* A v_j = \begin{cases} A^*(\sigma_j w_j) = \sigma_j^2 v_j & \Leftarrow j \le r \\ A^* 0 = 0 & \Leftarrow j > r \end{cases}$$

$$A^* A = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Sp}(A^* A) \ : \ \sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \ge \cdots \sigma_r^2 > 0 = \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n$$

$$\sigma_j = \sqrt{\lambda_j} \quad \forall j \le m$$

□

Следствие. *Всякая вещественная (комплексная) матрица A порядка $s \times n$ имеет сингулярное разложение $A = Q\Sigma P^{-1}$, где P и Q — ортогональные (унитарные) матрицы порядка n и s соответственно, $\Sigma = (A^*A)$ — диагональная матрица порядка $s \times n$ (смотри доказательство теоремы).*

Доказательство. Пусть $V = \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ — соответственно евклидово (эрмитово пространство). $W = \mathbb{R}^s$ $(\mathbb{C}^s)$ — такое же пространство. $\mathcal{A}\colon x \mapsto Ax$, $x \in V$ — линейное отображение пространства V в пространство W. По теореме существует ортонормированный базис $v_1, \ldots, v_n$ пространства V и $w_1, \ldots, w_s$ — ортонормированный базис пространства W такие, что:

$$Av_j = \begin{cases} \sqrt{\lambda_j} w_j & \Leftarrow j \leq r \\ 0 & \Leftarrow j > r \end{cases}$$

Положим по определению:

$$P = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \qquad Q = (w_1, w_2, \ldots, w_s)$$

Тогда P и Q — ортогональные (унитарные) матрицы. Кроме того:

$$\begin{aligned} AP = A(v_1, \ldots, v_n) &= (Av_1, \ldots, Av_n) \\ &= (\sigma_1 w_1, \ldots, \sigma_r w_r, 0, \ldots, 0) = (w_1, \ldots, w_s)\Sigma = Q\Sigma \end{aligned}$$

$$A = Q\Sigma P^{-1} = Q\Sigma \overline{P}^T$$

□

2.12 Полярное разложение

Теорема 2.23. *Всякий линейный оператор A евклидова (эрмитова) пространства V имеет полярное разложение: $A = RS$, где R — ортогональный (унитарный) оператор, а S — самосопряженный оператор.*

Доказательство. По теореме о сингулярных числах и базисе (2.22) существует ортонормированные базисы $v_1, \ldots, v_n$ и $w_1, \ldots, w_n$ пространства

V, а также числа $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ такие, что:

$$\begin{cases} v_1 \xrightarrow{A} \sigma_1 w_1 \\ \vdots \\ v_r \xrightarrow{A} \sigma_r w_r \\ v_{r+1} \xrightarrow{A} 0 \\ \vdots \\ v_n \xrightarrow{A} 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 \xrightarrow{R} w_1 \\ \vdots \\ v_r \xrightarrow{R} w_r \\ v_{r+1} \xrightarrow{R} w_{r+1} \\ \vdots \\ v_n \xrightarrow{R} w_n \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 \xrightarrow{S} \sigma_1 v_1 \\ \vdots \\ v_r \xrightarrow{S} \sigma_r v_r \\ v_{r+1} \xrightarrow{S} 0 \\ \vdots \\ v_n \xrightarrow{S} 0 \end{cases}$$

Тогда имеем $A = RS$. $S^* = S$ в силу того, что матрица S в ортонормированном базисе является вещественно-диагональной, а R — ортогональна (унитарна) в силу того, что переводит некоторый ортонормированный базис в ортонормированный базис. □

Замечание 2.3. Имея сингулярное разложение можно легко получить полярное: $A = QP^{-1}P\Sigma P^{-1}$, где $R = QP^{-1}$, а $S = P\Sigma P^{-1}$. Проверка требуемых свойств полярного разложения тривиальна.

Замечание 2.4. Оператор S в полярном разложении A определяется однозначно.

Доказательство.

$$A = RS \Rightarrow A^* = S^* R^* = SR^{-1}$$

$$AA^* = SR^{-1}RS = S^2 \Rightarrow S =_? \sqrt{AA^*} \quad \operatorname{Sp} S \subset \mathbb{R}_+$$

Дальнейшее доказательство оставляется читателю в качестве упражнения. □

2.13 Сингулярные числа и норма отображения

Определение 2.16. Пусть $A\colon V \to W$ — линейное отображение евклидовых (эрмитовых) пространств. Число:

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

называется нормой линейного отображения A, согласованной со скалярным произведением.

Теорема 2.24. *1.*

$$\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$$
$$\|Ax - Ay\| \le \|A\|\|x - y\|$$

2.

$$\|A\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| < \infty$$

3.

$$\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$$

4.

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\|$$

5.

$$\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$$

6.

$$Av = \lambda v \quad v \ne 0 \Rightarrow |\lambda| \le \|A\|$$

7.

$$\|A\| \ge 0 \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

Доказательство. 1. По определению имеем:

$$\|A\| = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ge \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$
$$\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$$
$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \le \|A\|\|x - y\|$$

2.

$$\|A\| = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\ne 0} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| \qquad y = \frac{x}{\|x\|}$$

Функция $y \mapsto \|Ay\|$ непрерывная функция на единичной сфере (компакт), значит достигает своего максимума.

3. При $\|x\| = 1$:

$$\|A+B\| = \sup\|(A+B)x\| \le \sup(\|Ax\|+\|Bx\|) \le \sup\|Ax\|+\sup\|Bx\| = \\ = \|A\| + \|B\|$$

4. При $\|x\| = 1$:

$$\|AB\| = \sup\|A(Bx)\| \leq \sup(\|A\|\|Bx\|) = \|A\| \sup\|Bx\| = \|A\|\|B\|$$

5. При $\|x\| = 1$:

$$\|\lambda A\| = \sup\|\lambda(Ax)\| = |\lambda| \sup\|Ax\| = |\lambda|\|A\|$$

6.
$$Av = \lambda v \quad v \neq 0 \Rightarrow |\lambda| = \frac{\|Av\|}{\|v\|} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$$

7. Очевидно.

$\square$

Теорема 2.25. *Норма линейного отображения евклидовых (эрмитовых) пространств совпадает с максимальным сингулярным числом отображения:*

$$\|A\| = \sigma_1 \qquad \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sigma_1 \Leftrightarrow A^*Ax = \sigma_1^2 x$$

Доказательство. Пусть $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots$ — сингулярные числа отображения $A\colon V \to W$, а $v_1, \ldots, v_n$ и $w_1, \ldots, w_s$ — сингулярные ортонормированные базисы. Тогда:

$$Av_j = \begin{cases} \sigma_j w_j & \Leftarrow j \leq r = \operatorname{rk} A \\ 0 & \Leftarrow j > r \end{cases}$$

Пусть $x \in V$. Тогда $x = \sum s_j v_j$, $x_j \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$.

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A v_j = \sum_{j\leq r} x_j \sigma_j w_j$$

Так как $w_1, \ldots, w_s$ — ортонормированный базис W, то:

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum_{j\leq r} |x_j|^2 \sigma_j^2} \leq \sqrt{\sum_{j\leq r} |x_j|^2 \sigma_1^2} = \sigma_1 \sqrt{\sum_{j\leq r} |x_j|^2} \leq \sigma_1 \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} = \sigma_1 \|x\|$$

Так как $v_1, \ldots, v_n$ — ортонормированный базис. Следовательно, при $x \neq 0$:

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sigma_1$$

Равенство $\Leftrightarrow x_j = 0$ при $\sigma_j < \sigma_1 \Leftrightarrow A^*Ax = \lambda_1 x$ и $\lambda_1 = \sigma_1^2$. $\square$

Следствие. $\|A^*\| = \|A\|$

Доказательство. $\|A\| = \sigma_1 = \|A^*\|$ $\square$

Следствие. *Норма нормального оператора равна его спектральному радиусу, то есть максимумальному модулю собственного значения оператора.*

Доказательство. Пусть V — эрмитово пространство, $A\colon V \to V$ — нормальный оператора. Тогда существует ортонормированный базис $v_1, \ldots, v_s$ пространства V такой, что:

$$Av_j = \lambda_j v_j \quad \forall j$$

Отсюда:

$$Av = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$(A^*)_v = \overline{A_v}^T = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_2} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \overline{0} \\ 0 & \ldots & 0 & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$A^* v_j = \overline{\lambda_j} v_j \quad \forall j$$

$$A^* A v_j = \overline{\lambda_j} \lambda_j v_j = |\lambda_j|^2 v_j \quad \forall j$$

Рассмотрим базис такой, что:

$$|\lambda_1|^2 \geq |\lambda_2|^2 \geq \cdots \geq |\lambda_n|^2$$

Тогда:

$$\|\mathcal{A}\| = \sigma_1 = \sqrt{|\lambda_1|^2} = |\lambda_1| = \rho(\mathcal{A})$$

Теперь пусть V — евклидово пространство, $A\colon V \to V$ — нормальный оператор. Тогда существует ортонормированный базис $v_1, \ldots, v_n$ пространства V такой, что:

$$A_v = \operatorname{Diag}\left(\ldots, \left(\begin{smallmatrix} \alpha \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right), \ldots\right) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \beta > 0$$

$$(A^*)_v = (A_v)^T = \operatorname{Diag}\left(\ldots, \left(\begin{smallmatrix} \alpha \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{smallmatrix}\right), \ldots\right)$$

$$(A^* A)_v = \operatorname{Diag}\left(\ldots, \left(\begin{smallmatrix} \alpha^2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \alpha^2+\beta^2 & 0 \\ 0 & \beta^2+\alpha^2 \end{smallmatrix}\right), \ldots\right)$$

$$\alpha \in \operatorname{Sp} A \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha + \beta i \in \operatorname{Sp} A \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \beta > 0$$

Следовательно:

$$\|\mathcal{A}\| = \sigma_1 = \max\left\{\sqrt{\alpha^2}, \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \mid \mathbb{R} \ni \alpha \in \operatorname{Sp} A \vee \alpha + \beta i \in \operatorname{Sp} A\right\} = \rho(\mathcal{A})$$

$\square$

2.14 Углы между подпространствами евклидова пространства

Определение 2.17. Угол φ между векторами x и y (ненулевыми) определяется равенством:

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|} \qquad 0 \le \varphi \le \pi$$

Обозначение: $\varphi(x,y)$. Ясно, что если $v = \frac{x}{\|x\|} \qquad v = \frac{y}{\|y\|}$, то $\varphi(x,y) = \varphi(v,w)$.

Определение 2.18. Пусть V и W — подпространства евклидова пространства X. Тогда серия углов

$$\varphi_1 \le \varphi_2 \le \dots \le \varphi_m \qquad m = \min\{\dim V, \dim W\}$$

определяется так:

$$\varphi_1 = \min\{\varphi(x,y) \mid x \in V,\ x \ne 0;\ y \in W,\ y \ne 0\}$$

$$\varphi_1 = \varphi(v_1, w_1) \qquad v_1 \in V \quad w_1 \in W \quad \|v_1\| = \|w_1\| = 1$$

$$\varphi_2 = \min\{\varphi(x,y) \mid x \in V \cap v_1^\perp,\ x \ne 0;\ y \in W \cap w_1^\perp,\ y \ne 0\}$$

$$\varphi_2 = \varphi(v_2, w_2) \qquad v_2 \in V \cap v_1^\perp \quad w_2 \in W \cap w_1^\perp \quad \|v_2\| = \|w_2\| = 1$$

$$\varphi_3 = \min\{\varphi(x,y) \mid x \in V \cap < v_1, v_2 >^\perp,\ x \ne 0;\ y \in W \cap < w_1, w_2 >^\perp,\ y \ne 0\}$$

И так далее...

Теорема 2.26. *Пусть V и W — ненулевые подпространства евклидова пространства X. Пусть $P : V \to W$ — сужение на V ортогонального проецирования X на W.*

Пусть $\varphi_1 \le \varphi_2 \le \dots \le \varphi_m$ — серия углов между V и W. Тогда $\cos\varphi_2 \ge \cos\varphi_2 \ge \dots \ge \cos\varphi_m$ — сингулярные числа отображения P.

В частности, $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ зависят полностью от V и W. Наборы векторов $v_1, \dots, v_m$ и $w_1, \dots, w_m$ из определения серии углов могут быть включены в сингулярные базисы V и W относительно P.

Лемма 2.27 (О трех перпендикулярах)**.** *Пусть* $x = x' + x''$, $x' \in W$, $x'' \in W^{\perp}$. *Тогда:*

$$\forall y \in W \quad x \perp y \Leftrightarrow x' \perp y$$

Доказательство.

$$(x, y) = (x' + x'', y) = (x', y) + (x'', y) = (x', y)$$

□

Лемма 2.28. *Пусть* $x = x' + x''$, $x' \in W$, $x'' \in W^{\perp}$. *Тогда:*

$$\min\{\varphi(x, y) \mid y \in W\} = \varphi(x, x')$$

Доказательство. Если $x' = 0$, то есть $x \perp W$, то:

$$\varphi(x, y) = \frac{\pi}{2} \quad \forall y \in W$$

По определению $\varphi(x, 0) = \frac{\pi}{2}$. Пусть $x' \neq 0$. Тогда:

$$\cos\varphi(x, y) = \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|} = \frac{(x', y)}{\|x\|\|y\|} \leq \frac{\|x'\|\|y\|}{\|x\|\|y\|} = \frac{(x', x)}{\|x\|\|x'\|} = \cos\varphi(x, x')$$

$$\|x'\|^2 = (x', x') = (x', x' + x'') = (x', x)$$

Отсюда $\varphi(x, y) \geq \varphi(x, x')$, так как cos на $[0; \pi]$ убывает. Равенство $\Leftrightarrow$ $y = \alpha x'$, $\alpha > 0$. □

Лемма 2.29. *Пусть:*

$$\min\{\varphi(x, y) \mid 0 \neq x \in V,\ 0 \neq y \in W\} = \varphi(v, w)$$

$$v \in V, w \in W \qquad \|v\| = \|w\| = 1$$

Тогда:

$$P(V \cap v^{\perp}) \subseteq w^{\perp}$$

Здесь P *— ортогональное проецирование* V *в* W *из условия теоремы 2.26.*

Доказательство. Если $V \perp W$ в пространстве X, то утверждение очевидно. Пусть V и W неортогональны. Тогда $\varphi(v, w) < \frac{\pi}{2}$. По лемме 2.28 $Pv = \alpha w$, $\alpha > 0$. Кроме того $Qw = \alpha v$, $\alpha > 0$, где Q — ортогональное процирование W в V. По лемме 2.27:

$$x \perp w \Leftrightarrow x' \perp w \Leftrightarrow x \perp \alpha v \Leftrightarrow x \perp v$$

Это и означает, что:

$$x \in V \quad x \perp v \Rightarrow Px \perp w$$

□

Доказательство теоремы. Используем индукцию по $\dim V + \dim W$.

$$\varphi_1 — \min \qquad v_1 \in V \quad w_1 \in W \quad \|v_1\| = \|w_1\| = 1$$

Пусть $\|x\| = 1$ и $x \in V$. Тогда:

$$\varphi(x, Px) — \min \Leftrightarrow \|Px\| — \max$$

$$\max\{\|Px\| \mid \|x\| = 1\} = \|P\| = \sigma_1$$

Пусть $\sigma_1 = \|P\| = \|Px\|$, $v_1 \in V$, $\|v_1\| = 1$. Следовательно:

$$\sigma_1 = 0 \Rightarrow V \perp W$$
$$\sigma_1 > 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi(v_1, Pv_1) < \frac{\pi}{2}$$

Пусть $Pv_1 = \sigma_1 w_1$, $\|w_1\| = 1$. Тогда v_1 и w_1 — первые векторы сингулярных базисов V и W, а $\sigma_1 = \cos\varphi_1$ — первое сингулярное число. Далее используем индукцию ввиду леммы 2.29. $\square$

Следствие. *Пусть V и W — подпространства евклидова пространства X, $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис V, $f_1, \dots, f_s$ — ортонормированный базис W.*

$$a_{ij} = (f_i, e_j) \qquad A = (a_{ij}) \quad 1 \le i \le s \quad 1 \le j \le n$$

Пусть $\sigma_1 \ge \dots \ge \sigma_m$ — сингулярные числа матрицы A. Тогда:

$$\varphi_1 = \arccos\sigma_1 \le \dots \le \varphi_m = \arccos\sigma_m$$

серия углов между V и W.

Доказательство. Пусть pr_W — ортопроектор X на W. Тогда:

$$\mathrm{pr}_W(x) = \sum_{i=1}^{s}(f_i, x)f_i$$

Пусть $P = \mathrm{pr}_W|_V \colon V \to W$. Тогда $Pe_j = \sum_{i=1}^{s}(f_i, e_j)f_i$. Следовательно, $P_f^e = ((f_i, e_j))$, где $1 \le i \le s$ и $1 \le j \le n$. Сингулярные числа P совпадают с сингулярными числами матрицы $P_f^e = A$, поскольку отображения $v \leftrightarrow v_e$ и $w \leftrightarrow w_f$ — изоморфизмы V на $\mathbb{R}^n$ и W на $\mathbb{R}^s$ как евклидовых пространств. Осталось использовать теорему 2.26 $\square$

3 Билинейные и квадратичные формы

3.1 Определения, примеры, матрица формы

Определение 3.1. Пусть V — векторное пространство над полем K. Тогда билинейная форма f на V — это отображение $f\colon V \times V \to K$, потому что она линейна по каждому аргументу при фиксированном другом.

$$\begin{cases} f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x,z) + \beta f(y,z) & \forall \alpha, \beta \in K\ \forall x, y, z \in V \\ f(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f(x,y) + \beta f(x,z) & \forall \alpha, \beta \in K\ \forall x, y, z \in V \end{cases}$$

Пример 3.1. *1. Скалярное произведение на евклидовом пространстве.*

2. V — евклидово пространство, $A\colon V \to V$ — любой линейные оператор. $f(x,y) = (x, Ay)$.

3. Пусть $V = K^2$.

$$f(x,y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

4. $V = K^n$, $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица из $M_n(K)$.

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

5. Интеграл на пространстве $C[p;q]$:

$$I(x,y) = \int_p^q a(t)x(t)y(t)\mathrm{d}t$$

Определение 3.2. Пусть f — билинейная форма на пространстве V, $e_1, \dots, e_n$ — некоторый базис V, $a_{ij} = f(e_i, e_j)$. Тогда матрица $A_e = (a_{ij})$ называется матрицей билинейной формы f в базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства V. Матрица и базис задают однозначно форму f. Пусть $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_j e_j$. Тогда:

$$f(x,y) = f\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\right) = \sum_i \sum_j x_i y_j f(e_i, e_j)$$

$$= \sum_i x_i \left(\sum_j a_{ij} y_j\right) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_e^T A_e y_e$$

$$f(x, y) = x_e^T A_e y_e \tag{9}$$

Матрица A_e может быть любой квадратной матрицей порядка n над полем K.

Что происходит с матрицей A_e при замене базиса? Пусть $e'_1, \ldots, e'_n$ — новый базис V. $C\colon e \to e'$ — матрица перехода. Тогда $x_e = Cx_{e'}$, $y_e = Cy_{e'}$. Отсюда:

$$f(x, y) = x_e^T A_e y_e = x_{e'}^T C^T A_e C y_{e'} = x_{e'}^T A_{e'} y_{e'}$$

$$A_{e'} = C^T A_e C \qquad C\colon e \to e' \quad \det C \neq 0 \tag{10}$$

Определение 3.3. Ранг билинейной формы — ранг её матрицы в некотором базисе.

Теорема 3.1. *Ранг матрицы билинейной формы — её инвариант, то есть величина, не зависящая от выбора базиса, а зависящая лишь от самой формы.*

Доказательство.

$$\operatorname{rk} A_{e'} = \operatorname{rk}(C^T A_e C) = \operatorname{rk} A_e \Leftarrow \det C \neq 0$$

□

Определение 3.4. Форма называется вырожденной, если её матрица вырождена.

Теорема 3.2. *Билинейная форма f на пространстве V вырождена $\Leftrightarrow$ её правое ядро $\{y \in V \mid f(x, y) = 0 \ \forall x \in V\}$ ненулевое $\Leftrightarrow$ её левое ядро $\{x \in V \mid f(x, y) = 0 \ \forall y \in V\}$ ненулевое.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис V, A_e — матрица f в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Тогда $\det A_e = 0 \Leftrightarrow$ столбцы A_e линейно зависимы $\Leftrightarrow \exists y_e \neq 0 :$ $A_e y_e = 0 \Leftrightarrow \exists y_e \neq 0 \ \forall x_e \in V \ x_e^T(A_e y_e) = 0 \Leftrightarrow \exists y \neq 0 \forall x \in V \ f(x, y) = 0$. Пусть $x_e^T z = 0$. $x = (1, 0, \ldots, 0)$. Тогда:

$$x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n = 0 \Rightarrow z_1 = 0$$

Аналогично и $z_n = 0$. Аналогично для левого ядра. □

Определение 3.5. Билинейная форма называется симметрической, если $f(x, y) = f(y, x) \ \forall x, y \in V$.

Определение 3.6. Билинейная форма называется кососимметрической, если $f(x, y) = -f(y, x) \ \forall x, y \in V$.

Теорема 3.3. *1. Билинейная форма f симметрична (кососимметрична) $\Leftrightarrow$ её матрица в некотором (равносильно, в любом) базисе пространства симметрична (кососимметрична).*

2. Над полем характеристики, отличной от 2, всякая билинейная форма однозначно разлагается в сумму симметрической и кососимметрической форм.

Доказательство. 1. $\Rightarrow$. Пусть f — симметрическая билинейная форма. Тогда $a_{ij} = f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i) = a_{ji}$. Значит $A_e^T = A_e$.

Пусть f — кососимметрическая билинейная форма. Тогда $a_{ij} = f(e_i, e_j) = -f(e_j, e_i) = -a_{ji}$. Значит $A_e^T = -A_e$.

$\Leftarrow$. Пусть $A_e^T = \pm A_e$. Тогда:

$$f(x,y) = x_e^T A_e y_e = (x_e^T A_e y_e)^T = y_e^T A_e^T x_e = y_e^T(\pm A_e)x_e = \pm y_e^T A_e x_e = \\ = \pm f(y,x)$$

2. Пусть $f(x,y) = g(x,y) + h(x,y)$. $g(x,y)$ симметрична, $h(x,y)$ кососимметрична. Тогда:

$$f(y,x) = g(y,x) + h(y,x) = g(x,y) - h(x,y)$$

$$f(x,y) = g(x,y) + h(x,y)$$
$$f(y,x) = g(x,y) - h(x,y)$$
$$g(x,y) = \frac{f(x,y) + f(y,x)}{2}$$
$$h(x,y) = \frac{f(x,y) - f(y,x)}{2}$$

Легко проверить, что это и есть требуемое разложение.

□

Определение 3.7. Квадратичная форма q на пространстве V над полем K — это отображение $q\colon V \to K$ такое, что существует билинейная форма $f\colon V \times V \to K$ такая, что: $q(x) = f(x,x)\ \forall x \in V$.

Форма f — билинейный прообраз для q.

В координатах $q(x) = x_e^T A_e x_e = \sum a_{ij} x_i x_j$ — квадратичный однородный многочлен от n переменных.

Можно ли по $q(x)$ восстановить $f(x,y)$ однозначно? Нет!

Пример 3.2.

$$f(x,y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \text{ — \textit{ненулевой многочлен}}$$

$$q(x) = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in K^2$$

Замечание 3.1. Однозначно восстанавливается по $q(x)$ симметрическая часть её билинейного прообраза над полем характеристики, отличной от 2.

$$q(x) = f(x,x) \Rightarrow q(x+y) = f(x+y,x+y) = f(x,x)+f(y,y)+f(x,y)+f(y,x)$$

$$g(x,y) = \frac{f(x,y)+f(y,x)}{2} = \frac{1}{2}(q(x+y)-q(x)-q(y))$$

Это означает, что существует взаимно однозначное соответствие между квадратичными формами и симметрическими билинейными формами над полем характеристики, отличной от 2.

Матрица квадратичной формы в базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства V — это матрица соответствующая симметрической билинейной формы в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Пример 3.3.

$$V = \mathbb{R}^2 \qquad q(x) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2$$

Найдем матрицу q в стандартном базисе $e_1 = \binom{1}{0}$, $e_2 = \binom{0}{1}$.

$$q(x) \leftrightarrow f(x,y) = x_1y_1 - 3x_1y_2 + 2x_2y_2 \text{ — \textit{билинейный прообраз}}$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{A_e + A_e^T}{2} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \text{ — \textit{матрица} } q(x)$$

3.2 Приведение квадратичной формы (симметрической билинейной формы) к каноническому виду

Определение 3.8. Пусть квадратичная форма q в базисе $e_1, \ldots, e_n$ имеет вид:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 \quad \lambda_i \in K$$

Тогда такой вид и базис называются каноническими.

Теорема 3.4 (Лагранжа)**.** *Над полем характеристики, отличной от* 2*, всякую квадратичную форму можно привести к каноническому виду в подходящем базисе пространства.*

Доказательство. Нам достаточно доказать для симметрической матрицы A: $A^T = A$, $A \in M_n(K)$, $1 + 1 \neq 0$. Найдем невырожденную матрицу $C \in M_n(K)$, $\det C \neq 0$ такую, что:

$$C^T AC = D$$

Используем индукцию по n. Можно считать, что $A \neq 0$.

Случай 1. Существует $a_{ii} \neq 0$. Перенумеровкой базиса добъемся, чтобы $a_{11} = \alpha \neq 0$. Ищем C как произведение трансвекций. Это означает, что надо привести A к диагональному виду элементарными преобразованиями строк и столбцов, сохраняющих симметричность матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \dots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta & \dots & \dots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Подберем такое γ, что: $\alpha\gamma + \beta = 0$. Значит, $\gamma = -\frac{\beta}{\alpha}$.

$$A \to T_{i1}(\gamma) A T_{1i}(\gamma)$$

В итоге:

$$A \to \dots \to \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & * & * \\ \vdots & * & A' & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

A' симметрична и имеет порядок $(n-1)$. Далее по индукции.

Случай 2. Все $a_{ii} = 0$. Однако существует $a_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$. Считаем, что $\alpha = a_{i2} =\neq 0$, $1 + 1 \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \dots \\ \alpha & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2\alpha & \alpha & \dots \\ \alpha & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем случай 1. □

Пример 3.4. *Пусть* $q(x) = 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ *— квадратичная форма на* $\mathbb{R}^3$*. Тогда в стандартном базисе* $\mathbb{R}^3$*:* $q(x) = x^T Ax$*.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем замену $x = Cy$ такую, что $C^TAC = D$ — диагональная:

$$\left(\frac{A}{E}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\frac{D}{C}\right)$$

$$C^TAC = D \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x = Cy$$

Тогда:

$$q(y) = 2(y_1^2 - y_2^2 - y_3^2)$$
$$x_1 = y_1 - y_2 - y_3$$
$$x_2 = y_1 + y_2 - y_3$$
$$x_3 = y_3$$

Следствие. *Всякое пространство над полем характеристики, отличной от 2, относительно любой симметрической билинейной формы f имеет так называемый ортогональный базис:*

$$v_1, \ldots, v_n \ : \ f(v_i, v_j) = 0 \quad i \neq j$$

Доказательство. Доказательство следует из теоремы Лагранжа 3.4:

$$\text{симметрическая } f(x, y) \leftrightarrow q(x)$$

$$f(x, y) = x^TAy \qquad q(x) = x^TAx \qquad A^T = A$$

□

Следствие. *Всякая квадратичная форма в подходящем базисе имеет нормальный вид:*

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 \qquad k + \ell \leq n$$

Доказательство. По теореме Лагранжа 3.4:

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_k x_k^2 - \lambda_{k+1} x_{k+1}^2 - \cdots - \lambda_{k+\ell} x_{k+\ell}^2 \qquad \lambda_j > 0 \; \forall j = 1, \ldots, k+\ell$$

$$y_j = \begin{cases} \sqrt{\lambda_j} x_j & \Leftarrow j \leq k + \ell \\ x_j & \Leftarrow j > k + \ell \end{cases}$$

Такая замена невырождена и приводит $q(x)$ к нормальному виду. □

3.3 Вещественные квадратичные формы

Определение 3.9. Пара (k, ℓ) называется сигнатурой (или типом) вещественной квадратичной формы:

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2$$

где k — положительный индекс инерции, а ℓ — отрицательный индекс инерции.

Определение 3.10. Вещественная квадритчная форма $q(x)$ на вещественном пространстве V называется положительно определенной (отрицательно определенной), если:

$$q(x) > 0 \ \forall x \in V \quad x \neq 0$$

$$(q(x) < 0 \ \forall x \in V \quad x \neq 0)$$

Определение 3.11. Вещественная квадритчная форма $q(x)$ на вещественном пространстве V называется положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной), если:

$$q(x) \geq 0 \ \forall x \in V \quad x \neq 0$$

$$(q(x) \leq 0 \ \forall x \in V \quad x \neq 0)$$

Теорема 3.5. *Сигнатура канонического вида вещественной квадратичной формы — инвариант формы.*

Доказательство. Пусть в базисе $e_1, \ldots, e_n$ вещественного векторного пространства V квадратичная форма $q(x)$ имеет вид:

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2$$

Пусть $V_k =< e_1, \ldots, e_k >$, $W =< e_{k+1}, \ldots, e_n >$. Тогда $q \mid_{V_k}$ — положительно определенная форма, а $q \mid_W$ — отрицательно определенная форма.

$$k = \max\{\dim U \mid U \leq V, q \mid_U \text{ положительно определена}\}$$

Ясно, что этот максимум больше k, так как $\dim V_k = k$, а $q \mid_{V_k}$ положительно определена.

Пусть теперь $U \leq V$, $q \mid_U$ положительно определена. Тогда $U \cap W = \{0\}$.

$$q(x) \geq 0 \quad q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$q(x) \leq 0 \quad q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) \leq \dim V$$

$$\dim U + n - k \leq n$$

$$\dim U \leq k$$

$$\max\{\dim U \mid U \leq V, q\mid_U \text{ положительно определена}\} \leq k$$

Следовательно k — инвариант. Тогда $\ell = \operatorname{rk} A - k$. $\square$

Определение 3.12. Пусть A — матрица порядка n, а A_k — её подматрица, заданная первыми k строками и k столбцами матрицы A. $\delta_k = \det A_k$ (угловой минор порядка k матрицы A).

Теорема 3.6. *Пусть все угловые миноры $\delta_k = \det A_k$ для матрицы A квадратичной формы $q(x)$ над полем характеристики, отличной от 2. Тогда в каноническом базисе $q(x)$ имеет вид:*

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

$$\lambda_k = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} \qquad k = 1, \dots, n \qquad \delta_0 := 1$$

Доказательство. Используем индукцию по числу переменных.

$$A \xrightarrow[\text{1 рода}]{\text{элем. преобраз.}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & * \\ 0 & \ddots & 0 & * \\ 0 & 0 & \lambda_{n-1} & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \qquad \lambda_k = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} \quad k < n$$

Преобразуем элементарными преобразованиями первого рода:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & * \\ 0 & \ddots & 0 & * \\ 0 & 0 & \lambda_{n-1} & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

$$\delta_n = \det A = \det A' = \det D = \lambda_1 \cdots \lambda_n = \frac{\delta_1}{\delta_0}\frac{\delta_2}{\delta_1} \cdots \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}}\lambda_n \Rightarrow \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} = \lambda_n$$

$\square$

Следствие. *Отрицательный индекс инерции вещественной квадратичной формы $q(x) = x^T A x$ (где $\delta_k = \det A_k \neq 0\ \forall k$) равен числу перемен знаков в последовательности $1, \delta, \delta_2, \dots, \delta_n$.*

Следствие (Критерий Сильвестера)**.** *Вещественная квадратичная форма* $q(x) = x^T Ax$, $A^T = A$, *является положительно определенной* $\Leftrightarrow$ $\delta_k > 0\ \forall k$.

Доказательство. $\Leftarrow$ следует из предыдущего следствия.

$\Rightarrow$. Достаточно заметить, что $\delta_k \neq 0\ \forall k$, если $q(x)$ — положительно определенная форма. Если $\exists k\ \delta_k = 0$, то $q\ |_{V_k}$ вырождена, где $V_k =< e_1, \dots, e_k >$, $A_e = A$ Тогда существует $x \in V_k$, $x \neq 0$, $q(x) = 0$. Противоречие с положительно определенностью формы. □

3.4 Приведение к главным осям

Теорема 3.7. *Для любой квадратичной формы* $q(x)$ *на евклидовом пространстве* V*:*

1. *существует единственный самосопряженный оператор* $A\colon V \to V$ *такой, что:*
$$q(x) = (x, Ax) \quad \forall x \in V$$

2. *существует ортонормированный базис* $v_1, \dots, v_n$ *пространства* V, *в котором*
$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots x_n^2 \qquad \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in \operatorname{Sp} A$$

Координатные оси $\mathbb{R}v_1, \dots, \mathbb{R}v_n$ *называются главными осями относительно квадратичной формы* $q(x)$.

Доказательство. 1. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — некоторый ортонормированный базис V, а A_e — матрица квадратичной формы $q(x)$ в этом базисе:
$$q(x) = x_e^T A_e x_e \quad \forall x \in V \qquad A_e^T = A_e$$

Покажем существование A. Пусть A — линейный оператор пространства V с матрицей A_e в базисе $e_1, \dots, e_n$. Тогда A — самосопряженный оператор.
$$q(x) = x_e^T A_e x_e = x_e^T (Ax)_e = (x, Ax) \quad \forall x \in V$$

Покажем единственность A. Предположим, что существует еще один линейный оператор B с теми же свойствами:
$$(x, Ax) = (x, Bx) \quad \forall x \in V$$

$$A, B\colon V \to V \qquad A^* = A \quad B^* = B$$
$$(x, Ay) = (x, By) \quad \forall x, y \in V$$
$$(x, (A - B)y) = 0 \quad \forall x, y \in V$$

Пусть $x = (A - B)y$. Тогда:

$$(A - B)y = 0 \quad \forall y \in V \Rightarrow Ay = By \quad \forall y \in V$$

2. Так как $A^* = A$, то существует ортонормированный базис пространства V такой, что:

$$Av_j = \lambda_j v_j \qquad \lambda_j \in \mathbb{R} \quad \forall j \Rightarrow x = \sum x_j v_j$$

$$q(x) = (x, Ax) = \left(\sum_i x_i v_i, \sum_j x_j \lambda_j v_j \right)$$
$$= \sum_i \sum_j x_j x_i \lambda_j (v_i, v_j) = \sum_j x_j^2 \lambda_j$$

□

3.5 Действие квадратичной формы на единичной сфере в евклидовом пространстве

Теорема 3.8. *Максимум квадратичной формы $q(x)$ на единичной сфере $\|x\| = 1$ в евклидовом пространстве V равна наибольшему собственному значению λ самосопряженного оператора A: $q(x) = (x, Ax)$. Он достигается на собственном векторе, отвечающем собственному значению λ оператора A. Аналогично и для минимума квадратичной формы $q(x)$.*

$$q(x) = (x, Ax) \qquad A^* = A \qquad \operatorname{Sp} A = \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$$
$$\max_{\|x\|=1} q(x) = \lambda_1 \qquad \|x\| = 1 \Rightarrow (q(x) = \lambda_1 \Leftrightarrow Ax = \lambda_1 x)$$

Доказательство. В главных осях $\mathbb{R}v_1, \dots, \mathbb{R}v_n$ имеем:

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) = \lambda_1 \qquad \|x\| = 1$$

$$q(x) = \lambda_1 \Leftrightarrow x_i = 0 \wedge \lambda_i < \lambda_1 \forall i > 1 \Leftrightarrow Ax = \lambda_1 x$$

□

3.6 Теорема Куранта-Фишера

Теорема 3.9. *Пусть A — самосопряженный оператор евклидова пространства V.*

$$\operatorname{Sp} A \ : \ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \qquad n = \dim V$$

$$q(x) = (x, Ax) \Rightarrow \lambda_k = \max_{\substack{U \leq V \\ \dim U = k}} \min_{\substack{x \in U \\ \|x\|=1}} q(x) = \min_{\substack{U \leq V \\ \dim U = n+1-k}} \max_{\substack{x \in U \\ \|x\|=1}} q(x)$$

Доказательство. Пусть $v_1, \dots, v_n$ — ортонормированный базис V, $Av_j = \lambda_j v_j$. Пусть $V_k =< v_1, \dots, v_k >$. Тогда по теореме об экстремумах квадратичной формы 3.8:

$$\lambda_k = \min_{\substack{x \in V_k \\ \|x\|=1}} q(x) \leq \max_{\substack{U \leq V \\ \dim U = k}} \min_{\substack{x \in U \\ \|x\|=1}} q(x)$$

С другой стороны, если $U \leq V$ — произвольное и $\dim U = k$, то для $W =< v_k, v_{k+1}, \dots, v_n >$, $\dim W = n + 1 - k$ имеем $U \cap W = \{0\}$ при $\|x\| = 1$. Тогда по теореме об экстремумах квадратичной формы 3.8:

$$\min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} q(x) \leq \max_{\substack{q \in W \\ \|x\|=1}} q(x) := \lambda_k$$

Отсюда:

$$\max_{\substack{U \leq V \\ \dim U = k}} \min_{\substack{x \in U \\ \|x\|=1}} q(x) \leq \lambda_k$$

Получаем требуемое равенство.

Теперь докажем второе равенство. Заменим $A \to -A$, а $q(x) \to q'(x) = -q(x)$. Тогда $\operatorname{Sp}(-A) \ : \ \lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \dots \geq \lambda'_n$.

$$\lambda'_k = -\lambda_{n+1-k}$$

Кроме того:

$$\min(-f(x)) = -\max f(x) \qquad \max(-g(x)) = -\min g(x)$$

В силу определения через $\max\min$:

$$-\lambda_k = \lambda'_{n+1-k} = \max_{\substack{U \leq V \\ \dim U = n+1-k}} \min_{\substack{x \in U \\ \|x\|=1}} (-q(x)) = \max(-\min(q(x))) =$$

$$= -\min_{\substack{U \leq V \\ \dim U = n+1-k}} \max_{\substack{x \in U \\ \|x\|=1}} q(x)$$

$\square$

3.7 Перемежаемость собственных значений квадратичной формы и её сужения

Теорема 3.10. *Пусть $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ — собственные значения для квадратичной формы (это собственные значения соответствующего самосопряжённого оператора) $q(x)$ на евклидовом пространстве V размерности n.*

Пусть $V' \leq V$, коразмерности 1 и пусть $\lambda'_1 \geq \ldots \geq \lambda'_n$ — собственные значения сужения $q(x)$ на V'. Тогда они перемежаются:

$$\lambda_1 \geq \lambda'_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda'_{n-1} \geq \lambda_n$$

Доказательство. Ввиду maxmin-формулы:

$$\lambda_k = \max_{\substack{U \leq V \\ \dim U = k}} \min_{\substack{x \in U \\ \|x\|=1}} q(x) \geq \max_{\substack{U \leq V' \\ \dim U = k}} \min_{\substack{x \in U \\ \|x\|=1}} q(x) = \lambda'_k$$

Ввиду minmax-формулы:

$$\lambda'_k = \min_{\substack{U \leq V' \\ \dim U = n-k}} \max_{\substack{x \in U \\ \|x\|=1}} q(x) \geq \min_{\substack{U \leq V \\ \dim U = n-k}} \max_{\substack{x \in U \\ \|x\|=1}} q(x) = \lambda_{k+1}$$

В итоге, имеем:

$$\lambda_k \geq \lambda'_k \geq \lambda_{k+1}$$

□

Следствие. *Пусть A — вещественная симметричная матрица, A' получилась из A удалением i-й строки и i-го столбца.*

Тогда спектры A и A' перемежаются.

Доказательство.

$$V' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0\}$$

□

Следствие. *Пусть $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$ и Φ — эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ с уравнением:*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = 1$$

и полуосями длиной $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$.

Пусть Φ' — сечение Φ гиперплоскостью V':

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$$

Тогда полуоси Φ и Φ' перемежаются.

3.8 Кососимметрические билинейные формы

Определение 3.13. Кососимметрическая билинейная форма

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \begin{vmatrix} x_{2i-1} & y_{2i-1} \\ x_{2i} & y_{2i} \end{vmatrix}$$

называется канонической, а при $\beta_i = 1\ \forall i$ нормальной.

Теорема 3.11. *Всякая кососимметрическая билинейная форма на векторном пространстве V над полем характеристики, отличной от 2, имеет нормальный вид.*

Доказательство. Достаточно найти для матрицы $A \in M_n(K)$, $A^T = -A$, матрицу C $(\det C \neq 0)$:

$$C^T A C = A_{normal} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & -1 & & & \\ & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Приведем A элементарными преобразованиями строк и столбцов к нормальному виду, сохраняя кососимметричность. Можно считать, что $A \neq 0$. Тогда можно считать, что $\alpha = a_{21} \neq 0$.

$$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \dots \\ \alpha & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & -\beta & \dots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & -\gamma & \dots \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \gamma & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ & 0 & * \end{pmatrix} \sim A_{normal}$$

В первом преобразовании домножаем на $-\beta$, во втором — на γ. $\square$

Следствие. *Две кососимметрические билинейные формы от n переменных над полем характеристики, отличной от 2, эквиваленты ($\exists C$: $\det C \neq 0$ $A' = C^T AC$) $\Leftrightarrow \operatorname{rk} A' = \operatorname{rk} A$.*

Теорема 3.12. *Для всякой кососимметрической билинейной формы на евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором форма принимает канонические вид.*

Доказательство. $f(x, y) = x^T Ay$ и $A^T = -A$ в ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$. По теореме о косых операторах существует ортогональная матрица Q такая, что:

$$Q^{-1}AQ = A_{canonical} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_1 & & & & & & \\ \beta_1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & -\beta_n & & & \\ & & & \beta_n & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Но $Q^{-1} = Q^T$. Значит, $Q^T AQ = A_{canonical}$. □

Следствие. *Если* $\operatorname{Sp} A = \{\pm i\beta_1, \ldots, \pm i\beta_m, 0, \ldots, 0\}$ *и* $\beta_k > 0$ $\forall k$, *то:*

$$f(x, y) = x^T Ay \to \sum_{k=1}^{m} \beta_k \begin{vmatrix} x_{2k-1} & y_{2k-1} \\ x_{2k} & y_{2k} \end{vmatrix}$$

3.9 Пары квадратичных форм

Пусть $q_1(x)$ и $q_2(x)$ — две квадратичные формы на вещественном пространстве V, причем $q_1(x)$ положительно определена. Тогда существует базис V, в котором обе формы принимают канонический вид.

Доказательство. Введем на V скалярное произведение относительно квадратичной формы q_1:

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2}(q_1(x + y) - q_1(x) - q_1(y))$$

Тогда $f_1(x, y)$ — действительно скалярное произведение: f_1 симметрична, билинейна и положительно определена.

$$x \neq 0 \Rightarrow f_1(x, x) = q_1(x) > 0$$

Пространство $(V, f_1(x,y))$ — евклидово пространство. Значит, существует ортонормированный базис V, относительно которого $f_1(x,y)$ квадратичная форма q_2 принимает канонический вид:

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \Rightarrow q_2(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2$$

С другой стороны:

$$q_1(x) = f_1\left(\sum_i \lambda_i v_i, \sum_j \lambda_j v_j\right) = \sum_i \sum_j x_i x_j f_1(v_i, v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

$$f_1(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow i \neq j \\ 1 & \Leftarrow i = j \end{cases}$$

$\square$

Замечание 3.2. Критерия эквивалентности билинейных форм нет. Пока нет и для пар квадратичных форм.

Замечание 3.3. Теория билинейных форм обобщается на теорию полилинейных функций или тензоров:

$$T\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{q} \to K$$

Тензор — это полилинейная функция от p векторных и q ковекторных аргументов в поле скаляров. V^* — сопряженное пространство (или пространство линейных функционалов).

Примеры тензоров: $(1,1)$ — линейный оператор, а $(2,0)$ — билинейная форма.

4 Линейные группы и алгебры

4.1 Смежные классы подгрупп

Определение 4.1. Пусть G — мультипликативная группа. Подмножество $H \subseteq G$ называется подгруппой, если

1. $HH = \{ab \mid a, b \in H\} \subseteq H$
2. $H^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in H\} \subseteq H$

3. $H \ni e$

Определение 4.2. Множества

$$aH = \{ah \mid h \in H\}$$

$$Ha = \{ha \mid h \in H\}$$

называются соответственно левым и правым смежными классами подгруппы H группы G с представителем $a \in G$

Теорема 4.1. *1. Левые (правые) смежные классы подгруппы разбивают группу.*

2. Любые два левых (правых) смежных класса данной подгруппы равномощны

3. Число левых смежных классов совпадает с числом правых. Это число называется индексом подгруппы H в группе G и обозначается $|G : H|$

Доказательство. 1. Введём на группе G отношение левой смежности на подгруппе H:

$$a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$$

Это отношение эквивалентности. Проверим это:

$$a \sim a, \text{ так как } a^{-1}a = e \in H$$

$$a \sim b \Rightarrow b \sim a, \text{ так как } a^{-1}b \in H \Rightarrow b^{-1}a = \left(a^{-1}b\right)^{-1} \in H$$

$$a \sim b \sim c \Rightarrow a \sim c, \text{ так как } a^{-1}b, b^{-1}c \in H \Rightarrow a^{-1}c = a^{-1}bb^{-1}c \in H$$

Рассмотрим класс эквивалентности, содержащий элемент $a \in G$:

$$\tilde{a} = \{x \in G \mid a \sim x\} = \{x \in G \mid a^{-1}x = h \in H\} = \{ah \mid h \in H\} = aH$$

Классы эквивалетности разбивают группу, а значит и левые смежные классы разбивают. Для правых классов аналогично:

$$a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$$

и т.д.

2. Достаточно доказать, что H и aH равномощны.

Установим соответствие: $h \leftrightarrow ah$ — взаимно-однозначно.

Аналогично, для H и Ha: $h \leftrightarrow ha$

3. Соответствие $x \leftrightarrow x^{-1}$ — взаимно-однозначно на группе G

$$aH \leftrightarrow (aH)^{-1} = H^{-1}a^{-1} = Ha^{-1} \text{ — взаимнооднозначно}$$

$\square$

Следствие (Теорема Лагранжа)**.** *Для конечной группы G и её подгруппы H имеет место равенство:*

$$|G| = |H| \cdot |G : H|$$

4.2 Действие группы на множестве

Определение 4.3. На непустом множестве X задано действие группы G ($G : X$), если задано отображение:

$$G \times X \to X \qquad (g, x) \mapsto gx \in X$$

1. $$(gh)x = g(hx), \forall g, h \in G \quad \forall x \in X$$

2. $$ex = x, \forall x \in X$$

Пример 4.1. *1.*
$$G : X, H \leq G \Rightarrow H : X$$

2.
$$X = \{1, \ldots, n\}, G = S_n \Rightarrow G : X$$

3.
$$X = V \text{ — векторное пространство над полем } K, G = GL(V) \Rightarrow G : X$$

4.
$$G : X, \quad Y \text{ — фиксированное множество}, \Phi = \{\phi\colon X \to Y \mid \phi \text{ — функция}\}$$

Тогда $G : \Phi$ по правилу: $(g \circ \phi)(x) := \phi(g^{-1}x) \quad \forall x \in X$

Проверим:

$$\begin{aligned}((gh) \circ \phi)(x) &= \phi((gh)^{-1}x) = \phi((h^{-1}g^{-1})x) \\ &= \phi(h^{-1}(g^{-1}x)) = (h \circ \phi)(g^{-1}x) = [g \circ (h \circ \phi)](x)\end{aligned}$$

$$(e \circ \phi)(x) = \phi(e^{-1}x) = \phi(x)$$

5. *$X = G, (g, x) \mapsto gx$ — левое регулярное действие группы G на себе.*

6. *$X = G, (g, x) \mapsto xg^{-1}$ — правое регулярное действие группы G на себе.*

7. *$X = G, (g, x) \mapsto gxg^{-1}$ — действие сопряжения группы G.*

8. *G — группа, $H \le G$, $X = GH = \{aH \mid a \in G\}$ — множество левых смежных классов.*

   Тогда $G : X$ по правилу: $(g, aH) \mapsto gaH$ — левое регулярное действие на смежных классах G по H.

Определение 4.4. Пусть $G : X$.

Множество
$$Orb(x) = \{gx \mid g \in G\} \subseteq X$$
называется G-орбитой элемента x.

Определение 4.5. Пусть $G : X$

Множество
$$Stab(x) = \{g \in G \mid gx = x\} \le G$$
называется стабилизатором элемента x в группе G.

Теорема 4.2. *Пусть группа G действует на множестве X. Тогда*

1. *G-орбиты разбивают X.*

2. *Стабилизаторы точек одной орбиты сопряжены в группе G.*

3. *Мощность орбиты равна индексу стабилизатора точки орбиты:*
$$|Orb(x)| = |G : Stab(x)|$$

Доказательство. 1. Введём на X отношение эквивалентности:
$$x \sim y \Leftrightarrow \exists y \in G \colon gx = y$$

Проверим, что это эквивалентность:
$$x \sim x, \text{ так как } e \in G, ex = x$$
$$x \sim y \Rightarrow y \sim x, \text{ так как } gx = y \Rightarrow g^{-1}y = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = ex = x$$

$$x \sim y \sim z \Rightarrow x \sim z, \text{ так как } \exists g, h \in G \colon gx = y, hy = z$$
$$\Rightarrow \quad hg \in G, \quad (hg)x = h(gx) = hy = z$$

Рассмотрим классы эквивалентности:

$\tilde{x} = \{y \in X \mid y \sim x\} = \{y \in X \mid \exists g \in G \colon y = gx\} = \{gx \mid g \in G\} = Orb(x)$

Значит орбиты разбивают множество X

2. Пусть $y = gx, H = Stab(x) \leq G$. Тогда

$$(gHg^{-1})y = gHx = gx = y$$

$$gHg^{-1} \subseteq Stab(g) = H'$$

Но $x = g^{-1}y$, поэтому аналогично:

$$g^{-1}H'(g^{-1})^{-1} \subseteq H$$

Имеем:

$$g^{-1}H'g \subseteq H \Leftrightarrow H' \subseteq gHg^{-1} \Rightarrow H' = gHg^{-1}$$

3.

$$gx = g'x \Leftrightarrow x = g^{-1}g'x \Leftrightarrow g^{-1}g' \in Stab(x) = H \Leftrightarrow gH = g'H$$

Следовательно количество элементов из $Orb(x)$ равно количеству классов подгруппы H, т.е. индексу H.

□

Следствие. *Пусть $G : X$, G — конечная группа. Тогда:*

$$|G| = |Orb(x)| \cdot |Stab(x)|$$

Доказательство.

$$|Orb(x)| = |G : Stab(x)| = \frac{|G|}{|Stab(x)|}$$

□

Определение 4.6. Пусть группа G действует на множествах X и X'. Эти действия изоморфны, если существует взаимно-однозначное соответствие $x \leftrightarrow x'$ между X и X', такое что $x \leftrightarrow x' \Leftrightarrow gx \leftrightarrow gx'$.

Теорема 4.3. *Пусть действие группы G на множестве X транзитивно, т.е. $\forall x, y \in X \exists g \in G \colon y = gx$ (орбита одна).*

Тогда действие G на X изоморфно действию G на множестве левых смежных классов $G/_H$, где $H = Stab(x), x \in X$.

Доказательство. Имеем

$$X = Orb(x) = \{gx \mid g \in G\}$$

Зададим соответствие между X и $G/_H$ по правилу: $ax \leftrightarrow aH$.

$$ax = bx \Leftrightarrow x = a^{-1}bx \Leftrightarrow a^{-1}b \in Stab(x) = H \Leftrightarrow aH = bH$$

Кроме того,

$$ax \leftrightarrow aH \Rightarrow (ga)x = g(ax) \leftrightarrow g(aH) = (ga)H$$

$\square$

Определение 4.7. Пусть $G : X$ и $g \in G$.

Тогда $Fix(g) = \{x \in X \mid gx = x\}$ — множество неподвижных точек элемента g.

Теорема 4.4 (Бернсайда)**.** *Пусть конечная группа G действует на конечном множестве X.*

Тогда число G-орбит:

$$|X/_G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|$$

Доказательство. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — все G-орбиты. Пусть

$$F = \{(g, x) \mid gx = x, g \in G, x \in X\}$$

Тогда

$$|F| = \sum_{g\in G}|Fix(g)| = \sum_{x\in X}|Stab(x)| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in X_i}|Stab(x)|$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{|G|}{|X_i|}\cdot|X_i| = n|G|$$

$$n = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|$$

$\square$

4.3 Гомоморфизмы групп, нормальные подгруппы и фактор-группы

Определение 4.8. Отображение $\phi\colon G \to G'$ групп G, G' называется гомоморфизмом, если:

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \quad \forall a, b \in G$$

Следствие. *1.* $b = e$ *Получаем:*

$$\phi(a) = \phi(a)\phi(e) \Rightarrow e' = \phi(e) \text{ — \textit{единица группы} } G'$$

2. $b = a^{-1}$ *Получаем:*

$$e' = \phi(e) = \phi(a)\phi(a^{-1}) \Rightarrow [\phi(a)]^{-1} = \phi(a^{-1})$$

Пример 4.2. *1.*

$$G = S_n \text{ — \textit{группа подстановок} }, G' = \langle\{\pm1\}, \cdot\rangle$$

$$\phi\colon \pi \mapsto \operatorname{sgn}\pi \text{— \textit{гомоморфизм.}}$$

2.

$$G = GL_n(K), K \text{ — \textit{поле} }, G' = K^* = \langle K \setminus \{0\}, \cdot\rangle$$

$$\phi\colon A \to \det A \text{ — \textit{гомоморфизм.}}$$

Определение 4.9. Пусть $\phi\colon G \to G'$ — гомоморфизм групп. Множества:

$$\operatorname{Im}\phi = \{\phi(a) \mid a \in G\} \subset G'$$

$$\operatorname{Ker}\phi = \{a \in G \mid \phi(a) = e'\} \subset G$$

называются образом и ядром гомоморфизма ϕ.

$\operatorname{Im}\phi \leq G'$

Доказательство.

$$\phi(a), \phi(b) \in \operatorname{Im}\phi \Rightarrow \phi(a)\cdot\phi(b) = \phi(ab) \in \operatorname{Im}\phi$$

$$\phi(a) \in \operatorname{Im}\phi \Rightarrow [\phi(a)]^{-1} = \phi(a^{-1}) \in \operatorname{Im}\phi$$

$$e' = \phi(e) \in \operatorname{Im}\phi$$

□

$\operatorname{Ker}\phi \leq G$

Доказательство.

$$\phi(a) = \phi(b) = e' \Rightarrow \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = e'e' = e'$$

$$\phi(a) = e' \Rightarrow \phi(a^{-1}) = [\phi(a^{-1})] = (e')^{-1} = e'$$

$$\phi(e) = e' \Rightarrow e \in \operatorname{Ker}\phi$$

□

Лемма 4.5. *Для подгруппы $N \leq G$ следующие условия равносильны:*

1. $a \in N \Rightarrow gag^{-1} \in N, \forall g \in G$
2. $gNg^{-1} \subseteq N, \forall g \in G$
3. $gNg^{-1} = N, \forall g \in G$
4. $gN = Ng, \forall g \in G$

Такая подгруппа назывется нормальной. $N \lhd G$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$

$$gNg^{-1} = \{gag^{-1} \mid a \in N\} \subset N$$

$2 \Rightarrow 3$

$$gNg^{-1} \subset N, \forall g \in G$$

g заменим на g^{-1}:

$$g^{-1}Ng \subset N \Rightarrow N \subset gNg^{-1} \Rightarrow gNg^{-1} = N$$

$3 \Rightarrow 4$ очевидно
$4 \Rightarrow 1$ Пусть $gN = Ng$, тогда:

$$\forall a \in N \exists a' \in N\colon ga = a'g \Rightarrow gag^{-1} = a' \in N$$

□

Следствие. $\operatorname{Ker}\phi \lhd G$

Доказательство.

$$\phi(a) = e' \Rightarrow \phi(gag^{-1}) = \phi(g)\phi(a)\phi(g^{-1}) = e'$$

□

Теорема 4.6. *Пусть $N \lhd G$ — нормальная подгруппа группы G. Тогда:*

1. *Множество $G/_N$ всех левых смежных классов подгруппы N образует группу относительно умножения смежных классов.*

   Эта группа называется фактор-группой группы G по подгруппе N

2. *Отображение $\phi\colon G \to G/_N$ по правилу:*
$$\phi(a) = \tilde{a} = aN$$
   является гомоморфизмом групп с ядром N и образом $G/_N$.

3. *Если $\phi\colon G \to G'$ — произвольный гомоморфизм групп, то*
$$G/_{\operatorname{Ker}\phi} \simeq \operatorname{Im}\phi$$

Доказательство. 1. Имеем
$$aN \cdot bN = a(Nb)N = a(bN)N = abNN = abN$$

Ассоциативность
$$(aNbN)cN = (ab)cN = a(bc)N = aN(bNcN)$$

Единица
$$eN = N \text{ — единица, так как } aN \cdot eN = (ae)N = aN; eNaN = aN$$

Обратный
$$aNa^{-1}N = aa^{-1}N = eN = N$$

2.
$$\phi(ab) = \tilde{ab} = abN = aNbN = \tilde{a}\tilde{b} = \phi(a)\phi(b)$$

По теореме о смежных классах (4.1):
$$\operatorname{Ker}\phi = \{a \in G \mid aN = eN = N\} = N$$
$$\operatorname{Im}\phi = \{\phi(a) \mid a \in G\} = \{aN \mid a \in G\} = G/_N$$

3. Пусть $N := \operatorname{Ker}\phi \lhd G$

   Установим соответствие между $G/_N$ и $\operatorname{Im}\phi$ по правилу:
$$aN \leftrightarrow \phi(a)$$
   Тогда:
$$aN = bN \Leftrightarrow a^{-1}b \in N = \operatorname{Ker}\phi \Leftrightarrow \phi(a^{-1}b) = e' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\phi(a))^{-1}\phi(b) = e' \Leftrightarrow \phi(a) = \phi(b)$$
   Значит соответствие взаимно-однозначное. Более того:
$$aN \leftrightarrow \phi(a), bN \leftrightarrow \phi(b) \Rightarrow aNbN = abN \leftrightarrow \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$
   Т.е. соответствие - изоморфизм.

□

Всегда у группы есть тривиальные нормальные подгруппы: $\{e\}$ и G Если же $\{e\} < N < G$, то G в некотором роде построена из двух "меньших"групп: N и $G/_N$

Определение 4.10. Группа G называется простой, если она имеет ровно две нормальные подгруппы: единичную и всю группу.

4.4 Центр и коммутант

Определение 4.11. Множество
$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa, \forall x \in G\}$$
называется центром группы G

Теорема 4.7. *1.*
$$Z(G) \lhd G$$
2.
$$Z(G) = G \Leftrightarrow G \text{ — абелева}$$

Доказательство. 1. Пусть $a, b \in Z(G)$

   Тогда $\forall x \in G$
$$(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = x(ab) \Rightarrow ab \in Z(G)$$
$$ax = xa \Rightarrow xa^{-1} = a^{-1}x \Rightarrow a^{-1} \in Z(G)$$
$$e \in Z(G) \text{ — очевидно}$$
   Нормальность:
$$a \in Z(G), g \in G \Rightarrow gag^{-1} = agg^{-1} = a \in Z(G)$$

2. Очевидно

∎

Определение 4.12. Элемент

$$aba^{-1}b^{-1} =: [a, b]$$

называется коммутатором элементов a и b группы G

$$ab = aba^{-1}b^{-1}ba = [a, b] \cdot ba$$

Определение 4.13. Подгруппа группы G, порождённая всеми коммутаторами, называется коммутантом группы G:

$$[G, G] = \langle [a, b] \mid a, b \in G \rangle$$

Теорема 4.8. *1.*

$$[G, G] \lhd G$$

2.

$$G/_N \text{ — абелева} \Leftrightarrow [G, G] \subseteq N$$

Доказательство. 1. Нормальность

$$g[a, b]g^{-1} = gaba^{-1}b^{-1}g^{-1} = gag^{-1} \cdot gbg^{-1} \cdot (gag^{-1})^{-1} \cdot (gbg^{-1})^{-1} = \\ = [gag^{-1}, gbg^{-1}] \in [G, G]$$

2.

$$G/_N \text{ — абелева} \Leftrightarrow aNbN = bNaN \forall a, b \Leftrightarrow abN = baN \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Nab = Nba \Leftrightarrow Naba^{-1}b^{-1} = N \Leftrightarrow N[a, b] = N \Leftrightarrow [a, b] \in N \forall a, b \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [G, G] \subseteq N$$

∎

Определение 4.14. Группа G называется разрешимой, если цепочка последовательных коммутантов достигает единицы:

$$G^{(0)} := G$$

$$G^{(i+1)} := [G^{(i)}, G^{(i)}] \quad i \geq 0$$

Тогда

$$G \rhd G^{(1)} \rhd \ldots \rhd G^{(k)} = \{e\}$$

Если $k < \infty$, то разрешима.

$$G^{(i)}/_{G^{(i+1)}} \text{ — абелева группа } \forall i$$

4.5 Прямые произведения

Определение 4.15. Пусть A и B — мультипликативные группы. Тогда множество

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

образует группу относительно покомпонентного умножения:

$$(a, b)(a', b') = (aa', bb')$$

Она называется прямым произведением групп A и B.

Теорема 4.9. *Пусть $A, B \lhd G$, причём $A \cap B = \{e\}, AB = G$. Тогда $G \simeq A \times B$*

Доказательство. Пусть $g \in G$. Тогда $g = ab, a \in A, b \in B$.

Установим соответствие по правилу:

$$g \leftrightarrow (a, b)$$

Взаимнооднозначность:

$$a, a' \in A \quad b, b' \in B$$

$$ab = a'b' \Leftrightarrow (a')^{-1}a = b'b^{-1} \in A \cap B = \{e\} \Leftrightarrow (a')^{-1}a = e, b'b^{-1} = e \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a' = a, b' = b$$

Изоморфность:

$$(ab)(a'b') = a(ba')b' = a([b, a']a'b)b' \Rightarrow [b, a'] = ba'b^{-1}(a')^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow [b, a'] \in A(A \lhd G), [b, a'] \in B(B \lhd G)$$

$$[b, a'] \in A \cap B = \{e\} \Rightarrow [b, a'] = e \Rightarrow (ab)(a'b') = (aa')(bb') \leftrightarrow (aa', bb')$$

□

Замечание 4.1. Если G — конечно-порождённая абелева группа, то:

$$G \simeq Z_{d_1} \times \ldots \times Z_{d_k} \times Z \times \ldots \times Z$$

$$d_i \mid d_{i+1}$$

Пример 4.3.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \ |\lambda| = |\mu| = 1 \right\}$$

$G \simeq S^1 \times S^1$, где S^1 — единичная сфера в $\mathbb{C}$, а G — тор.

4.6 Матричное описание групп SO_2 и SU_2

Теорема 4.10.

$$SO_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T,\ \det A = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in \mathbb{R} \right\} \simeq S'$$

SO_2 — абелева группа.

Доказательство. Доказательство тривиально. $\square$

Теорема 4.11.

$$SU_2 = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T,\ \det A = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\} \simeq S^3$$

SU_2 — неабелева группа, её центр $\{\pm E\}$.

Доказательство. Пусть $A = \left(\begin{smallmatrix} z & u \\ w & v \end{smallmatrix}\right) \in SU_2$. Пусть $\det A = 1$, $A^{-1} = \overline{A}^T$.

$$\begin{pmatrix} v & -u \\ -w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{z} & \overline{w} \\ \overline{u} & \overline{v} \end{pmatrix} \Rightarrow v = \overline{z} \quad u = -\overline{w}$$

$$A = \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \det A = z\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + |w|^2 = 1$$

Тогда:

$$SU_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \mid |z|^2 + |w|^2 = 1,\ z, w \in \mathbb{C} \right\}$$

Геометрически, если $z = x_1 + ix_2$, $w = x_3 + ix_4$, то:

$$|z|^2 + |w|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

это будет уравнение сферы S^3 в $\mathbb{R}^4$. Найдем центр SU_2. Пусть матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{smallmatrix}\right)$ из центра SU_2. Тогда:

$$\begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix}$$

Получаем на месте $(2;1)$: $iw = -iw$, значит $w = 0$.

Тогда $A = \left(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{smallmatrix}\right)$ и $|z| = 1$. Далее:

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix}$$

Получаем на месте $(2;1)$: $z = \overline{z}$, значит $z \in \mathbb{R}$, $|z| = 1$, $z = \pm 1$. Таким образом $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ или $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. $\square$

4.7 Простота группы SO_3

Определение 4.16. Элемент a группы G называется инволюцией, если $a^2 = e$, $a \neq e$.

Пример 4.4.

$$G = S_n \quad a = (i\ j) \qquad a = (i\ j)(k\ l)$$

$$G = GL_2(\mathbb{R}) \qquad a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{— *повороты на* } \pi$$

Лемма 4.12 (Эйлера)**.** *Группа SO_3 ортогональных операторов трехмерного евклидова пространства с определителем 1 состоит в точности из поворотов пространства на некоторый угол вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат.*

Доказательство. В каноническом базисе v_1, v_2, v_3 пространства $\mathbb{R}^3$ ортогональный оператор с определителем 1 имеет матрицу:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом эта матрица задает поворот в $\mathbb{R}^3$ вокруг оси $\mathbb{R}v_3$ на угол φ, где $0 \leq \varphi \leq \pi$. □

Лемма 4.13. *Элемент A из SO_3 является инволюцией $\Leftrightarrow$ -1 лежит в $\operatorname{Sp} A$.*

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть A задает поворот в $\mathbb{R}^3$ на угол φ, $0 < \varphi \leq \pi$. Тогда A^2 — поворот $\mathbb{R}^3$ на угол 2φ. $(0 < \varphi \leq 2\pi)$

$$A^2 = E \Rightarrow 2\varphi = 2\pi \Rightarrow \varphi = \pi$$

$$Av_1 = -v_1 = -1 \cdot v_1 \Rightarrow -1 \in \operatorname{Sp} A$$

$\Leftarrow$. Пусть $-1 \in \operatorname{Sp} A$. По лемме 4.12:

$$1 \in \operatorname{Sp} A \Leftarrow \exists u : \ Au = u \neq 0$$

$$-1 \in \operatorname{Sp} A \Leftarrow \exists v : \ Av = -v \neq 0$$

Значит A — поворот на угол π — инволюция. □

Лемма 4.14. *Любой элемент из SO_3 является произведением двух подходящих инволюций.*

Доказательство. В каноническом базисе:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad 0 \le \varphi < \pi$$

□

Лемма 4.15. *Любые две инволюции из SO_3 сопряжены в SO_3.*

Доказательство. По лемме 4.12 всякая инволюция из SO_3 сопряжена с канонической инволюцией.

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{canonical} \qquad Q \in O_3(\mathbb{R})$$

Пусть $\det Q = 1$, тогда A сопряжена с канонической в группе SO_3.

Если же $\det Q = -1$, то заменим Q на $(-Q)$. Тогда $\det(-Q) = 1$, $-Q$ — ортогональная матрица.

$$(-Q)^{-1}A(-Q) = Q^{-1}AQ = A_{canonical}$$

Отношение сопряженности в группе — это отношение эквивалентности:

$$Q^{-1}AQ = A_{canonical} = B_{canonical} = P^{-1}BP$$

$$B = PQ^{-1}AQP^{-1} = C^{-1}AC \qquad C = QP^{-1} \in SO_3$$

□

Теорема 4.16. *Группа SO_3 вращений трехмерного евклидова пространства является простой группой.*

Доказательство. Пусть $N \lhd SO_3$, N неединична. Надо доказать, что $N = SO_3$. Существует $R \in N$, R — поворот $\mathbb{R}^3$ на угол φ ($0 < \varphi \le \pi$). Если $\varphi = \pi$, то R — инволюция, $R \in N$, $C^{-1}RC \in N$ $\forall C \in SO_3$. Значит все инволюции лежат в SO_3, а тогда лежат и их произведения. Ввиду леммы 4.14 $N = SO_3$.

Пусть теперь $0 < \varphi < \pi$. Если $0 < \varphi \le \frac{\pi}{2}$, то существует такое $k \in \mathbb{N}$ (по лемме Архимеда), что $\frac{\pi}{2} < k\varphi \le \pi$. Тогда $R^k \in N$, R^k — поворот $\mathbb{R}^3$ на угол φ.

$$\frac{\pi}{2} < k\varphi \le \pi$$

. Можно заменить R^k на R и считать, что $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

В силу того, что $R \in SO_3$ существует u такой, что $Ru = u$ и v такой, что $(v, Rv) < 0$ (φ — тупой угол) и $Rv \perp Ru = u$.

Докажем это: найдем вектор $a \neq 0$ такой, что $a \perp Ra$. Ищем a в форме $a = \lambda u + v$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$Ra = \lambda Ru + Rv = \lambda u + Rv$$

$$(a, Ra) = (\lambda u + v, \lambda u + Rv) = \lambda^2(u, u) + (v, Rv) = 0$$

$$\lambda = \sqrt{-\frac{(v, Rv)}{(u, u)}} \in \mathbb{R}$$

Обозначим $b = Ra$. Пусть I — поворот $\mathbb{R}^3$ на угол π вокруг $\mathbb{R}a =< a >$. Тогда I — это инволюция. Поэтому RIR^{-1} — инволюция.

$$RIR^{-1} \neq 0 \Leftrightarrow I \neq E$$

$$(RIR^{-1})^2 = RI^2R^{-1} = RER^{-1} = E$$

Кроме того, RIR^{-1} — поворот $\mathbb{R}^3$ вокруг $\mathbb{R}b =< b >$.

$$(RIR^{-1})b = (RIR^{-1})RA = RIA = Ra = b$$

$$J = IRIR^{-1} = IR\underbrace{(I^{-1}R^{-1})}_{\in N}$$

$I^{-1}R^{-1} = IR^{-1}$ так как $I^{-1} = I$.

$$Jb = IRIR^{-1}b = Ib = -b$$

$$-1 \in \operatorname{Sp} J \Rightarrow J \text{ — инволюция} \qquad J \in N \Rightarrow N = SO_3$$

$\square$

4.8 Кватернионы

Определение 4.17. Алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ — это вещественная четырехмерная алгебра с базисом $1, i, j, k$ и таблицей умножения (столбец — левый множитель, строка — правый множитель):

*	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \qquad ij = k \qquad ji = k \qquad jk = -kj = i \qquad ki = -ik = j$

Теорема 4.17. *Алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ ассоциативная, некоммутативная алгебра с делением с мультипликативной нормой элементов.*

Доказательство. Некоммутативность алгебры: $ij \neq ji$. Ассоциативность покажем при помощи изоморфизма с подалгеброй алгебры $M_2(\mathbb{C})$. Пусть:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E$$

$$IJ = -JI = K \qquad JK = -KJ = I \qquad KI = -IK = J$$

Кроме того, E, I, J, K линейно независимы над $\mathbb{R}$.

$$aE + bI + cJ + dK = \begin{pmatrix} a - bi & -c + di \\ c + di & a + bi \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$$

$$q = a + bi + cj + dk \leftrightarrow aE + bI + cJ + dK \in M_2(\mathbb{C})$$

Алгебра $\mathbb{H}$ изоморфна подалгебре алгебры $M_2(\mathbb{C})$. Значит $\mathbb{H}$ — ассоциативная алгебра.

Докажем свойство обратимости ненулевых элементов. Зададим элемент из $\mathbb{H}$ с помощью матрицы:

$$M(q) = \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \qquad z = a + bi \qquad w = c + di$$

$$M(q)^{-1} = \frac{1}{\det M(q)} \begin{pmatrix} \overline{z} & \overline{w} \\ -w & z \end{pmatrix}$$

$$\det M(q) = z\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + |w|^2$$

$$\det M(q) = 0 \Leftrightarrow z = w = 0 \Leftrightarrow q = 0$$

$$(a + b + c + d)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}(a - bi - cj - dk)$$

□

Определение 4.18. Зададим норму кватерниона $q \in \mathbb{H}$:

$$\|q\| = \sqrt{\det M(q)} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Тогда:

$$q \neq 0 \Rightarrow q^{-1} = \frac{1}{\|q\|^2}\overline{q}$$

где $\overline{q} = a - bi - cj - dk$ — сопряженный кватернион. Кроме того:

$$\|qq'\| = \|q\|\|q'\|$$

Доказательство.

$$\|qq'\|^2 = \det M(qq') = \det M(q)M(q') = \det M(q)\det M(q') = \|q\|\|q'\|$$

□

Следствие (Формула Эйлера для четырех квадратов)**.**

$$\|q\|^2\|q'\|^2 = \|qq'\|^2$$

Следствие. *Кватернионы нормы* 1 *образуют группу* S^3*, изоморфную группе* SU_2.

Доказательство.

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$$

$$S^3 \ni q \leftrightarrow M(q) = \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \qquad \det M(q) = |z|^2 + |w|^2 = 1$$

□

Определение 4.19. Пусть $\mathbb{H} = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ — алгебра кватернионов. Обозначим: $\mathbb{R} = \mathbb{R}1$.

$$\mathbb{R}_+ = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \geq 0\}$$

$$\mathbb{R}_- = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq 0\}$$

$$\mathbb{R}^3 =< i, j, k >= \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$$

$\mathbb{R}$ — множество скалярных или вещественных кватернионов. $\mathbb{R}^3$ — множество векторных или чисто мнимых кватернионов.

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$$

$$q \in \mathbb{H} \Rightarrow q = \alpha + v \qquad \alpha \in \mathbb{R} \quad v \in \mathbb{R}^3$$

$$q' \in \mathbb{H} \Rightarrow q' = \alpha' + v' \qquad \alpha' \in \mathbb{R} \quad v' \in \mathbb{R}^3$$

Введем произведение qq' (i, j, k — ортонормированный базис):

$$qq' = (\alpha + v)(\alpha' + v') = \alpha\alpha' + \alpha v' + \alpha' v + vv'$$

$$v = xi + yj + zk \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$v' = x'i + y'j + z'k \qquad x', y', z' \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} vv' &= -(v,v') + (yz' - z'y)i + (zx' - z'x)j + (xy' - yx')k \\ &= -(v,v') + \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} k = -(v,v') + [v,v'] \end{aligned}$$

где (v,v') — скалярное произведение, а $[v,v']$ — векторное произведение.

В итоге:

$$qq' = \underbrace{\alpha\alpha' - (v,v')}_{\text{скалярная часть}} + \underbrace{\alpha v' + \alpha' v + [v,v']}_{\text{векторная часть}}$$

Определение 4.20. Централизатор кватерниона — это множество:

$$Z(q) = \{q' \in \mathbb{H} \mid qq' = q'q\}$$

Определение 4.21. Центр алгебры $\mathbb{H}$ — множество:

$$Z(\mathbb{H}) = \{q \in \mathbb{H} \mid qq' = q'q \forall q' \in \mathbb{H}\}$$

Теорема 4.18. *Пусть $\mathbb{H} \ni q = \alpha + v$ — некоторый кватернион. Тогда:*

1. $Z(q) = \mathbb{R} + \mathbb{R}v$, $v \neq 0$
2. $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$, $v \neq 0$
3. $q \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow q^2 \in \mathbb{R}_-$, $v \neq 0$
4. $q \in \mathbb{R} \Leftrightarrow q^2 \in \mathbb{R}_+$

Доказательство. 1. Пусть $q' = \alpha' + v'$. Тогда:

$$qq' = q'q \Leftrightarrow [v,v'] = [v',v] = -[v,v'] \Leftrightarrow [v,v'] = 0 \Leftrightarrow v' = \lambda v \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$q' = \alpha' + \lambda v \in \mathbb{R} + \mathbb{R}v$$

2. Выберем линейно независимые векторы v и v' из $\mathbb{R}^3$. Тогда:

$$Z(\mathbb{H}) \subseteq Z(v) \cap Z(v') = (\mathbb{R} + \mathbb{R}v) \cap (\mathbb{R} + \mathbb{R}v') = \mathbb{R}$$

Обратное включение очевидно.

3.
$$q^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2\alpha v = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee v = 0$$
$$\alpha = 0 \Rightarrow q = v \Rightarrow q^2 = -(v,v) \in \mathbb{R}_-$$

4.
$$v = 0 \Rightarrow q = \alpha \Rightarrow q^2 = \alpha^2 \in \mathbb{R}_+$$

□

4.9 Кватернионы и группа вращений евклидова пространства SO_3

Теорема 4.19. *Пусть* $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ *— алгебра кватернионов и* $s \in \mathbb{H}$, $\|s\| = 1$. *Тогда:*

1. *Оператор* $R_s \colon q \mapsto sqs^{-1}$, $q \in \mathbb{R}^3$, *является ортогональным оператором на пространстве* $\mathbb{R}^3$ *(с ортонормированным базисом* i, j, k*)*

2. *Отображение* $R \colon S^3 \to O_3$ *по правилу* $R \colon s \mapsto R_s$ *является гомоморфизмом из группы* S^3 *в группу* O_3 *с ядром* $\{\pm 1\}$ *и образом* SO_3.

3. *Если* $s = \alpha + v$, $v \neq 0$, *то* R_s *— поворот* $\mathbb{R}^3$ *вокруг оси* $\mathbb{R}v$ *на угол* 2φ, *где* $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\alpha}{\|v\|}$, $0 < \varphi < \pi$.

Доказательство. R_s — линейное отображение:

$$R_s(\lambda q + q') = s(\lambda q + q')s^{-1} = \lambda(sqs^{-1}) + sq's^{-1} = \lambda R_s q + R_s q'$$

R_s — линейный оператор на $\mathbb{R}^3$:

$$q \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow q^2 \in \mathbb{R}_-$$

$$sqs^{-1} \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow (sqs^{-1})^2 \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow sq^2s^{-1} \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow q^2 \in \mathbb{R}_-$$

R_s — ортогональный оператор.

$$\|sqs^{-1}\| = \|s\|\|q\|\|s^{-1}\| = \|q\| \quad \forall q$$

Надо проверить, что:

$$R_{ss'} = R_s R_{s'} \quad \forall s, s' \in S^3$$

$$R_{ss'}(q) = (ss')q(ss')^{-1} = s(s'q(s')^{-1})s^{-1} = R_s(R_s'(q)) \quad \forall q \in \mathbb{R}^3$$

Непрерывность следует из правила умножения кватернионов.

Найдем ядро:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} R = \{s \in S^3 \mid R_s = E\} &= \{s \in S^3 \mid sqs^{-1} = q \ \forall q \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{s \in S^3 \mid sq = qs \ \forall q \in \mathbb{R}^3\} = \mathbb{R} \cap S^3 = \{\pm 1\} \end{aligned}$$

Образ равен SO_3, если доказать пункт 3.

Рассмотрим первый случай.

Пусть $s = \alpha + v$, $v \neq 0$, $\|s\| = 1$.

$$s = \alpha + v \leftrightarrow M(s) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \underbrace{\cos\varphi}_{\alpha} + i \underbrace{\sin\varphi}_{v} \qquad \sin\varphi > 0 \text{ иначе } v \mapsto -v$$

Заметим, что:

$$q \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow M(q) = \begin{pmatrix} ix_3 & x_1 + ix_2 \\ -x_1 + ix_2 & -ix_3 \end{pmatrix} \qquad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

$M(q)$ — косоэрмитова матрица, потому что $\overline{M(q)}^T = -M(q)$.

Таким образом, $\mathbb{R}^3$ — пространство чисто мнимых кватернионов изображается как пространство косоэрмитовых матриц. Теперь:

$$sqs^{-1} =\leftrightarrow M(s)M(q)M(s^{-1}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\lambda} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & \lambda^2 w \\ -\overline{\lambda^2 w} & \overline{z} \end{pmatrix}$$

Отсюда имеем, что $z = ix_3$ не меняется. $w = x_1 + ix_3 \mapsto \lambda^2 w$ — на плоскости (x_1, x_2) поворачивается на угол 2φ. Используем правило умножения комплексных чисел. $v = ix_3$ и есть $\mathbb{R}v$.

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\alpha}{\|v\|}$$

Рассмотрим более общий второй случай.

Пусть $s = \alpha + v \in S^3$, $v \neq 0$. Тогда:

$$s \mapsto M(s) \in SU_2$$

Всякая унитарная матрица унитарно подобна диагональной. Существует унитарная матрица C такая, что:

$$C^{-1}M(s)\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix} \qquad \det M(s) = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = 1$$

$$\lambda = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Можно считать, что $\det C = 1$. Иначе заменим C на $\frac{C}{\sqrt{\det C}}$.

Итак, $\det C = 1$. Тогда существует кватернион $c \in S^3$ такой, что $C = M(c)$. Теперь:

$$M(s) = CDC^{-1} = M(c)M(\lambda)M(c^{-1}) = M(c\lambda c^{-1}) \qquad s = c\lambda c^{-1}$$

Тогда $R_s = R_c \underbrace{R_\lambda}_{\in SO_3} R_c^{-1}$. $\det R_s = 1$, R_s — поворот.

Неподвижный вектор:

$$R_s v = svs^{-1} = \underbrace{(\alpha + v)}_{s} v \underbrace{(\alpha - v)}_{s^{-1}} = v$$

Угол поворота R_s совпадает с углом поворота R_λ и равен 2φ.

$$A \sim \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tr} A = 1 + 2\cos\varphi \qquad \cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$$

Осталось доказать, что:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\alpha}{\|v\|}$$

$$\operatorname{tr} M(s) = 2\alpha = \operatorname{tr} D = 2\cos\varphi \Rightarrow \alpha = \cos\varphi$$

$$1 = \|s\| = \alpha^2 + \|v\|^2$$

$$\|v\|^2 = 1 - \alpha^2 = 1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi \Rightarrow \|v\| = \sin\varphi$$

$\square$