Аналитическая геометрия

Зайцев Вадим

2010-02-10

1 Многочлены

1.1 Алгебра многочленов

Обычно многочлен - это ф-ия вида:

$$x \longmapsto f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \ldots + a_nx^n \tag{1}$$

Над бесконечными полями это верно, но над конечными - неверно.
Напр., $\mathbb{Z}_2 = \{0; 1\}$:

$$x : \begin{cases} 0 \longmapsto 0 \\ 1 \longmapsto 1 \end{cases} \qquad x^2 : \begin{cases} 0 \longmapsto 0 \\ 1 \longmapsto 1 \end{cases} \qquad x^2 = x\,?\, o\_O$$

Обычно считают (1) для $f(x)$ единственной, т.е. степени $1, x, x^2, \ldots, x^n$ должны быть линейно независимы над полем.

1.1.1 Определение

Алгебра многочленов над полем K (от одной переменной) - это алгебра со счётным базисом $e_0, e_1, \ldots$ и таблицей умножения $e_i \cdot e_j = e_{i+j}\ \forall i, j \in \mathbb{Z}_+$(мно-во целых неотрицательных чисел).

1.1.2 Теорема

Алгебра многочленов над полем K - это ассоциативная, коммутативная алгебра с единицей $1 = e_0$ Если обозначить $x := e_1$, то всякий элеамент имеет единствкенную записаь $f(x) = \sum\limits_{i \geq 0} a_i \cdot x^j$, $a_i \in K$, при этом сложение и умножение многочленов определяется формулами:

$$\begin{aligned} (\sum_{i \geq 0} a_i \cdot x^i) + (\sum_{i \geq 0} b_i \cdot x^i) &= (\sum_{i \geq 0} (a_i + b_i) \cdot x^i) \\ (\sum_{i \geq 0} a_i \cdot x^i) \cdot (\sum_{j \geq 0} b_j \cdot x^j) &= \sum_{k \geq 0} (\sum_{i+j=k} (a_i \cdot b_j) \cdot x^k) \end{aligned} \tag{2}$$

Док-во:

1. **Ассоциативность:**
   Ассоциативность и коммутативность следует из ассоциативности и коммутативности для векторов базиса.
   $e_i \cdot e_j = e_{i+j} = e_{j+i} = e_j \cdot e_i$
   $(e_i\ cdote_j) \cdot e_k = e_{(i+j)+k} = e_j \cdot (e_j \cdot e_k)$
2. **Единвственность:**
   $e_0 \cdot e_i = e_i \cdot e_0 = e_{i+0} = e_i$, $\forall i$
   Если $x := e_1$, то $e_2 = e_1 \cdot e_1 = x \cdot x = x^2$; $\quad e_3 = e_2 \cdot e_1 = x^2 \cdot x = x^3$; $\quad etc \ldots \quad e_j = x^j$
   $a_0 \cdot e_0 + a_1 \cdot e_1 + \ldots + a_n \cdot e_n = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ - единств. запись.

Формулы (2) следуют из закона дистрибутивности (аксиом кольца и векторного про-ва).

1.1.3 Замечание 1:

Обозначение $K[x]$ для указанной алгебры многочленов.

1.1.4 Замечание 2:

Ф-лы (2) превращают $K[x]$ в кольцо, если K - кольцо.

1.1.5 Замечание 3:

Часто записывают коэффициенты многочлена в обратном порядке:

$$f(x) = a_0 \cdot x^n | a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_n,\ a_i \in K$$

При этом если $a_0 \neq 0$, то n - это степень многочлена $f(x)$, обозначается ст $f(x)$ или $deg f(x)$
$a_0 \cdot x^n$ - старший член, a_0 - старший коэффициент.
Если $f(x) \equiv 0$ (все коэффициенты равны 0), то степень многочлена не определена ($= -\infty$).

1.1.6 Лемма о степени:

Степень про-ия многочленов равна сумме степеней $(deg(f(x) \cdot g(x)) = deg(f(x)) + deg(g(x)))$.

Док-во: Пусть $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$
$f(x) = a_0 \cdot x^n +$ *младшие члены.* $g(x) = b_0 \cdot x^m +$ *младшие члены.*
$f(x) \cdot g(x) = a_0 \cdot b_0 \cdot x^{n+m} +$ *младшие члены.*
$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0 \Rightarrow a_0 \cdot b_0 \neq 0$ (т.к. в поле нет делителей 0).

1.1.7 Следствие:

Если $f(x)$, $g(x) \in K[x], K-$ поле. $deg(f(x) \cdot g(x) = 1)$, то $deg(f) = deg(g) = 0$, т.е. $f,\ g \in K \setminus \{0\}$.

Док-во: Имеем $f \neq 0, g \neq 0$.
По лемме $0 = deg(\overset{1=1\cdot x^0}{1}) = deg(f(x) \cdot g(x)) = \overset{\geq 0}{deg(f)} + \overset{\geq 0}{deg(g)} \Rightarrow deg(f) = deg(g) = 0$.

1.2 Деление с остатком

1.2.1 Теорема

Пусть K - поле, $f,\ g \in K[x], g \neq 0$. Тогда существуетединственные $q,\ r \in K[x] : \begin{cases} f = g \cdot q + r \\ r = 0 \text{ или } deg(r) < deg(g) \end{cases}$.
f - какбэ делимое, g - какбэ делитель, q - какбэ частное, r - какбэ остаток.

Док-во:

1. Единственность:
   Пусть $\begin{cases} f = g \cdot q_1 + r_1 \\ r_1 = 0 \text{ или } deg(r_1) < deg(g) \end{cases}$
   Тогда $g \cdot q_1 + r_1 = g \cdot q + r \Rightarrow g(q_1 - q) = r - r_1$.
   Если $q_1 \neq q$, то $q_1 - q \neq 0, g \neq 0$, то по лемме о степени $deg(r_1 - r) = deg(g) + deg(q_1 - q) \geq deg(g)$.
   Получаем противоречие со второй строкой док-ва. Значит $q_1 = q$, $r - r_1 = 0$, $r_1 = r$.

2. Существование: (докажем индукцией по $n = deg(f(x))$)

   (a) $deg(f(x)) < deg(g(x))$
   Тогда: $f(x) = g(x) \overset{q(x)}{0} + \overset{r(x)}{f(x)}$.

   (b) $deg(f(x)) \geq deg(g(x))$
   $\begin{matrix} f(x) = a_0 \cdot x^n + \text{мл. члены} \\ g(x) = b_0 \cdot x^m + \text{мл. члены} \end{matrix} \quad | \ n \geq m,\ a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0$
   Обозначим $f_1(x) = f(x) - g(x) \cdot \overset{\text{многочлен}}{\frac{a_0}{b_0} \cdot x^{n-m}}$, тогда $deg(f_1(x)) < deg(f(x)) = n$.
   По предположению индукции $\exists q_1(x), r(x) \mid \begin{cases} f_1 = g \cdot q_1 + r \\ r = 0 \text{ или } deg(r) < deg(g) \end{cases}$.
   Тогда $f = f_1 + g \cdot \left(\frac{a_0}{b_0} \cdot x^{n-m}\right) = g \cdot q_1 + r + g \cdot \frac{a_0}{b_0} \cdot x^{n-m} = g \cdot \overset{\text{это есть q}}{\left[q_1 + \frac{a_0}{b_0} \cdot x^{n-m}\right]} + r$.
   Идея док-ва состоит в том, чтобы последовательно исключать старшие члены.

1.3 Корни и значения

1.3.1 Определение:

Пусть $f(x) = a_0 \cdot x^n + \ldots + a_n \in K[x]$ и пусть $c \in K$, тогда $f(c) = a_0 \cdot c^n + \ldots + a_n$ называется **значением** $f(x)$ в точке $c \in K$. Если $f(c) = 0$, то c называется корнем или нулём $f(x)$.

1.3.2 Теорема Безу:

Пусть K - поле, $f(x) \in K[x], c \in K$, тогда остаток от деления $f(x)$ на $x - c$ равен $f(c)$. В частности, c - корень $f(x) \Leftrightarrow (x-c) \mid f(x)$ ($x - c$ делить $f(x)$ в $K[x]$).

Док-во: По теореме о делении с остатком (1.2.1): $f(x) = (x-c)q(x) + r, r \in K$.
Тогда $f(c) = \overset{=0}{(c-c)}\, q(c) + r = r$.

1.3.3 Определение

Если c - корень $f(x)$, то $f(x) = (x-c) \cdot q(x)$.
Возможно, что $q(c) = 0, \quad q(x) = (x-c)q_1(x), \quad f(x) = (x-c)^2 q(x)$.
Продолжая, получаем $f(x) = (x-c)^k h(x), \quad h(c) \neq 0, \quad k \geq 1$ - кратность корня c для многочлена $f(x)$.
Если $k = 1$, то c - "простой" корень.
Если $k > 1$, то c - "кратный" корень.

1.3.4 Следствие 1

Многочлен степени n имеет не более n корней с учётом кратности.

Док-во: Индукций по $n = deg(f(x)) \in K[x]$, где K - поле.
Если c - корень $f(x)$, то $f(x) = (x-c)^k h(x)$, $h(c) \neq 0$. Тогда $deg(h(x)) = n - k < n$, т.к. $k \geq 1$
По индукции $h(x)$ имеет не менее $n - k$ корней в K с учётом кратности. Тогда $f(x)$ имеет не менее n корней с учётом кратности.

1.3.5 Следствие 2

Пусть K - поле, в котором любой многочлен степени ≥ 1 имеет корень. Тогда любой многочлен степени $n \geq 1$ имеет вид $f(x) = a_0(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_n), \quad a_0 \in K, a_0 \neq 0$.

1.3.6 Следствие 3

Если $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ - все корни $f(x) = a_0 x^n + \dots a_n \in K[x]$, то верны ф-лы Виета:

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n = -\frac{a_1}{a_0}$$
$$c_1c_2 + c_2c_3 + \dots + c_{n-1}c_n = \frac{a_2}{a_0}$$
$$\dots$$
$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_3} = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}$$

Док-во Получается сравнением коэффициентов при x^{n-k} в равенстве

$$a_0 x^n + \dots + a_k x^{n-k} + \dots + a_n = a_0(x-c_1)\dots(x-c_n).$$

чтобы получить x^{n-k} нужно справа перемножить $(n-k)$ скобок, а коэффициентом будет произведение c_i в оставшихся скобках.

1.3.7 Следствие 4

Пусть K - поле $x_2, x_2, \dots, x_n$ - различные точки из K, $y_1, y_2, \dots, y_3$ - любые точки из K. Тогда $\exists!$ многочлен $f(x)$ степени $< n \mid f(x_k) = y_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$.
Т.е. f решает интерполяционную задачу:

x	x_1	x_2	x_3	$\dots$
$f(x)$	y_1	y_2	y_3	$\dots$

Док-во:

1. Единственность:
Если ещё один многочлен решет эту же интерполяционную задачу, то $h(x) = f(x) - g(x)$ имеет n корней $x_1, x_2, \dots, x_n$ и степень $< n$. Это возможно только при $h(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$.

2. Существование:
   Ф-ла Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$