Ангем

Зайцев Вадим

2010-02-24

1 Корни комплексных мно-в

Если $f(x) \in R[x], deg(f(x))$ может не иметь вещественных корней.
$x \in R \Rightarrow x^2 + 1 \neq 0 \forall x \in R$. Построим поле C как алгебра над R с крнем 1, i, при этом $i^2 + 1 = 0$.

1.1 Гемо. описание C и операции сложения и умножения:

$z = a + bi, a, b \in R$
Oxy - прямоугольная дек. с. координат на плоскости
— много-много картинок —

1.1.1 Определение

Число $r = \sqrt{a^a + b^2} = |z|$ наз. модулем компл. числа $z = a + bi$.

1.1.2 Определение

Угол φ между лучом Ox и z наз. аргументом z, обозн. $arg(z)$.
Тогда $z = +bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ - “тригонометрическая запись z.

Доказательство. Док. её единственность:
$r(cos(\varphi) + i\sin(varphi)) = r'(\cos(\varphi') + i\sin(\varphi'))$
$r, r' > 0$

$(r\cos(\varphi)) + i(r\sin(\varphi)) = (r'\cos(\varphi)) + i(r'\sin(\varphi))$
из еди. разложения по базису 1,i:
$r\cos(\varphi) = r'\cos(\varphi)$
$r\sin(\varphi) = r'\sin(\varphi)$
$r^2(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) = (r')^2(\cos(\varphi')^2 + \sin(\varphi')^2)$
$r^2 = (r')^2 \Rightarrow r = r'$, т.к. $r, r' > 0$
$\cos(\varphi) = \cos(\varphi')$
$\sin(\varphi)$. □

Отсюда вытекает гем. отношение уножение.

1.1.3 Лемма1

1)$|zz'| = |z||z'|$
2)$arg(zz') = arg(z) + arg(z')$

Доказательство. Тгда $zz' = rr'[(\cos(\varphi)\cos(\varphi') - \sin(\varphi)\sin(\varphi') + i(\cos(\varphi)\cos(\varphi') - \sin(\varphi)\sin(\varphi')] = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]$ - тригоном. запись zz'.
Из единств.: $|zz'| = rr' = |z||z'|$
$arg(z') \equiv \varphi + \varphi' = arg(z) + arg(z')(mod 2\pi)$.

□

1.1.4 Следствие 1:

$(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$

1.1.5 Следствие 2:

пусть $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)), r > 0$
тогда $\sqrt[n]{z} = \{\sqrt[n]{r} \cdot (\cos(\frac{\varphi+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi+2k\pi}{n}) \mid k = 0, 1, ..., n-1\}$

Доказательство. $z' = r'(\cos(\varphi') + i\sin(\varphi'), (z')^n = z.$
По форм. ...
$(r')^n = r$
$\sin(\varphi') \equiv \varphi(mod 2\pi)$
$\Rightarrow$
$r' = \sqrt[n]{r} > 0$
$n\varphi' - \varphi = 2k\pi, k \in Z$
$\varphi' = \frac{\varphi+2k\pi}{n}, r \in Z.$
ПУсть $\frac{\varphi_+2l\pi}{n} \equiv \frac{\varphi+2k\pi}{n})(mod 2\pi)$
$\frac{\varphi+2l\pi}{n} = \frac{\varphi+2k\pi}{n} + 2m\pi, m \in Z$

$strlekvniz$
$l = k + mn$
$l - k = mn$
$n|(l-k)$
l и k имеют одинако. остатки от деления на n. □

1.1.6 Лемма 2(ещё одна, простенькая):

1. $|z+w| \leq |z| + |w|$ (неравенство тре-ка)
2. $|z-w| \geq |z| - |w|, |z-w|$ - расст. от z до w.
3. если $z = a + b$, то для $-z- = a + bi$ верны сво-ва:
   $-z + w- = -z - + - w -$
   $- zw- = -z - \cdot - w -$
   $- -z - - = z$
   $- z- = z \Leftrightarrow z \in R.$

Доказательство. 1. picture

2. picture
3. picture
4. остальные доказать самим.

□

1.1.7 Теорема Даламбера-Гаусса:

Всякий комплексный многочлен степени ge 1 имеет комплексный корень.

Доказательство. $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} .. + a_n,$
$a_i \in C, a_n \neq 0.$
Выберем $r \in R \mid r > 1, r > |a_1| + \ldots + |a_n|.$
Пусть $|z| = r$, $z \in C$. Оценим расстояния от $f(z)$ до z^n:
$|f(z) - z^n| = |a_1z^{n-1} + \ldots + a_n| \leq (byLemma2and1) \leq |a_1| \cdot |z|^{n-1} + \ldots + |a_n| = r^{n-1}(|a_1| + \frac{|a_2|}{r} + \ldots + \frac{|a_n|}{r^{n-1}}) \leq (byr > 1) \leq r^{n-1}(|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|) = (byr < (|| + ... + ||)) = r^{n-1} \cdot r = r^n = |r^n| = |z^n - 0|$ Посмотрим на картику: Если Z пробегает окружность $|z| = r$ один раз против часовой стрелки, то z^n пробегает окружность с уравнением $|w| = r^n$ n раз против часовой стрелки.
picture
Т.к. расстояние от z^n до $f(x)$ меньше, чем расстояние от z^n до 0, то когда z пробегает окр |z|=r, один раз против час. стрелки, число f(z) n раз вслед за z^n обойдет начало координат O по нек. замкнутому пути
$\Gamma(r) = \{f(z) \mid |z| = r\}$ (где-то здесь используется непрерывность)
Если $r \to 0$, то $\Gamma(r)$ непрерывно деформируется к $\Gamma(0)$ (ввду непр. отображ. $z \to f(z)$. Но $\Gamma(0) = \{f(0) = a^n\} = \{a_n\} \neq \{0\}$. Тогда при деформировании $\Gamma(r)$ должен пройти через точку 0, т.е. $\exists z_0 \mid |z_0| < |a_1| + \ldots |a_n|$ и такое, что $f(z_0) = 0$. □

1.1.8 Следствие 1:

Всякий компл. многочлен степени $n \geq 1$, имеет вид $a_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n), a_0 \in C, a_0 \neq 0$

Доказательство. Применить теорему Безу и теорему Гаусса-Даламбера. $\square$

1.1.9 Следствие 2:

Всякий вещественный многочлен степени ≥ 1 разлагается в произведение вещественный многочленов степени 1 и 2.

Доказательство. ПУсть $f(x) \in R[z], deg(f) = n \geq 1$, Исп. индукцию по n:
При n=1 утв. очевидно.
ПУсть $n - 1 \Rightarrow n$:
Т.к. $R \in C$ как подполе, то $f(x) \in C[z]$ и по теореме f(x) имеет комплексный корень.
Случай 1. Корень из $\mathbb{R}$.
$\exists c \in R \mid f(c) = 0$, тоогда $f(x) = (x-c)q(x), q(x) \in R[z], deg(q(x)) = n - 1$. По предположению индукции q(x) - произведение вещественных многочленов степени 1 или 2. Случай 2. Корень $c = a + bi, b \neq 0, \quad a, b \in R$. $\square$