Ангем

Зайцев Вадим

2010-03-03

1 Линейные отображеия векторных пространств

....

1.1 Примеры

1. Напр. угловое движения (изметрии) повороты вокруг O, отражения относ. прямых, прох. через O.
2. Алгебраический пример. k - любое, n, S - любое натуралонь, $V = k^S, A = (a_y)$ - матр. порядка s x n и пусть $A : x \to Ax$.
   image
   Это - линейное отображеия по сво-ву матрицы.
3. $V = W$ - про-во мн-в отображен. t.
   $D : f(x) \to f'(t)$ -
   $D(f + y) = Df + Dy, D(\lambda f) = \lambda D(f)$
   Или $D : f(t) \to \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k f}{dt^k}$
   Ещё: $I : f(t) \to \int_0^t g(s)f(s)ds$ - линейное интегр. операция. (вроде бы).

1.2 Задание образом базиса и матрицей

1.2.1 Теорема (о свободе)

Пусть V и W - век. про-ва над полем K, $e_1, ..., e_n$ - базис V, $a_1, ...a_n$ - любой набор вект. из W. Тогда сущ. ед лин. отобр. $A : V \to W$, такое что $Ae_j = a_j, \forall j = 1 \ldots n$.

Доказательство.

1. Едниственность:
   Если $\forall j \quad Ae_j = a_j$ и A - линейно, то $\forall x \in V, x = \sum x_j e_j, x_j \in K$, имеем $Ax = A(\sum x_j e_j) = \sum x_j(Ae_j) = \sum x_j a_j$.
   Т.о. A - единственно.
2. Существование:
   Зададим отображение A формулой $x = \sum x_j a_j \Rightarrow Ax = \sum x_j a_j$. Линейность A: Если $y = \sum y_j e_j$, то $x+y \sum(x_j+y_j)e_j, A(x+y) \sum(x_j+y_j)a_j = \sum x_j a_j+\sum y_j a_j = Ax+Ay$. Если $\lambda \in K$, то $\lambda x = \sum(\lambda x_j)e_j, A(\lambda x) = \sum(\lambda x_j)a_j = \lambda \sum x_j a_j = \lambda(Ax)$.
   Кроме того $\forall j \quad Ae_j = a_j$.

□

1.2.2 Определение

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - базис про-ва V, $f_1...f_s$ - базис про-ва W. Тогда $e_j = \sum_{i=1}^{s} a_{ij} f_i, e_{ij} \in K$, тогда матрица $A_e^f = (a_{ij})$ называется матрицей лин. отобр. A в паре базисов e и f.
В матрице A_f^e j-й столбец - это координатный столбец вектора Ae_j в базисе $f_1, \ldots, f_s$. Если $W = V$, то обычно берут один базис $f_1 = e_1, \ldots, f_n = e_n$ и матрица $A_e^e =: A_e$ называется матрицей леинейного оператора A в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

1.2.3 Пример

$V =\}$ про-во вещественных многочленов степени $\leq n\}. D$ - дифф., базис $V : 1, t, t^2, ..., t^n$. Тогда
$D1 = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + ...$
$Dt = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + ...$
$Dt^2 = 0 = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2 + ...$
matrix

1.2.4 Следсвтие (Теорема о свободе)

Всякое линейное отображения в конечномерном векторном про-ве **однозначно** задатся своей матрицей в паре базисов. Эта матрица может быть **любой**

1.3 Действия в координатах

.

1.3.1 Теорема

Пусть $A : V \to W$ - линейное отображения век. про-ва над полем K, $e_1...e_n$ - базис V, $f_1...f_n$ - базис W.
Тогда если $y = Ax$, то $yf = A_e^f x_e$, где x_e, y_f - координатные столбцы векторов x и y в базисах $e_1...e_n$ и $f_1...f_s$ соответственно.

Доказательство. $Ae_j = \sum_i a_{ij} f_i, \quad A_f^e = (a_{ij})$
Удобно скаляр исать справа: $Ae_j = \sum_i f_i a_{ij}$
Если $x = \sum x_j e_j = \sum e_j x_j$, то $y = Ax = a(\sum e_j x_j) = \sum (Ae_j) x_j = \sum_j (\sum_i f_i a_{ij}) x_j = \sum_{i=1}^s f_i (\sum_j a_{ij} x_j)$
Значит, matrx □

1.4 Замена матрицы при замене базисов

1.4.1 Определение

Пусть $e_1...e_n$ и $e'_1...e'_n$ - два базиса пр. V над K, "старый" и "новый".
Тогда можно новый базис разложить по старому:
$e'_j = \sum_i e_{ij} e_e = \sum_i e_i e_{ji}$
где $C = (e_{ij})$ - квадратная матрица n. Она называется **матрицей перехода от старого базиса к новому**.

1.4.2 Лемма 1

Матрица перехода невырожденная (обратима). Обрато служит матрица обратного перехода.

Доказательство. Пусть ещё $C' = (c'_{ij})$ - матрица обратного перехода, $\quad e_j = \sum e'_{ij} e'_j = \sum_i e'_i c'_{ij}$.
Тогда вектор $e_k = \sum_j e'_j c'_{jk} = \sum_j (\sum_i e_i c_{ij}) = c'_{jk} = \sum_i e_i (\sum_j c_{ij} c'_{jk})$. (там использовалось что-то из того, что есть выше, чтобы выразить e'_j). $= \sum_i e_i (\sum_j c_{ij} e'_{jk})$.
Это равенство означает $CC' = E$. $C^{-1} = C', \quad detC \neq 0$. □

1.4.3 Лемма 2

Пусть $e_1...e_n$ и $e'_1...e'_n$ - два базиса V, x_e и $x_{e'}$ - коорд. столбца вект. $x \in V$ в базисах e и e'. Если $C : e \to e'$ - матрица перехода, то
$x_e = Cx_e, \quad x_{e'} = C^{-1} x_e$.

Доказательство. Имеем $x = \sum e_j x_j = \sum_j (\sum_i e_i c_{ij}) x'_j = \sum_i e_i (\sum_j e_{ij} x'_j)$. Значит

$$x_e = \begin{pmatrix} \sum_j e_{1j} x'_j \\ \vdots \\ \sum_j e_{nj} x'_j \end{pmatrix}$$

□

1.4.4 Теороема

Пусть $A : V \to W$ - вект. про-во над K. Пусть $e_1...e_n$ и $e'_1...e'_n$ - два базиса V и $C_1 : e + e'$ - матрица перехода.
Пусть $f_1...f_s$ и $f'_1...f'_s$ - два базиса W и $C_2 : f \to f'$ - матрица перехода.
Тогда $A_{f'}^{e'} = C_2^{-1} A_f^e C - 1$.
Если $W = V$, $f_1 = e_1...f_n = e_n, f'_1 = e'_1...f'_n = e'_n$ и $C_1 = C_2 =: C$, то $A_{e'} = C^{-1} A_c C$.

Доказательство. Имеем
$y_f = A_f^e$,
$x_e = C_1 x_{e'}$,
$y_f = C_2 y_{f'}$.
Тогда $y_{f'} = C_2^{-1} y_f = C_2^{-1} A_f^e x_e = (C_2^{-1} A_f^e C_1) x_e$.
С другой стороны, $y_{f'} = A_{j'}^{e'} x_{e'}$, тогда $A_{j'}^{e'} = C_2^{-1} A_f^e C_1$
Т.к. отобр. в координатах полностью задат матрицу отображения. □

1.4.5 Определение

Матрицы A и B из $M_n(K)$ называются подбными над K, если сущ. $C \in M_n(K), detC \neq 0$ и такая, что $B = C^{-1}AC$ **Матрица лин. оператора в разных базисах подобия**. Подобие - отношение эквивалентности на $M_n(K)$.

1.5 Алгебра линейных операторов

1.5.1 Теорема

Пусть V - векторное про-ва размерности n над полем K и $L(V)$ - мно-во всех линейных операторов на V. Тогда $L(V)$ образует алгебра над K относительно операций

$$(A+B)x := Ax + Bx \tag{1}$$
$$(AB)x := A(Bx) \tag{2}$$
$$(\lambda A)x := \lambda(Ax) \tag{3}$$

При этом $L(V) \backsimeq M_n(K)$.

Доказательство. 1. Проверим, что $A+B, AB, \lambda A$ - линейные операторы, если A и B - линейные оператор про. V.

□