Ангем

Зайцев Вадим

2010-03-10

аналогично доказывается, что $AB, \lambda A$ линейно. 2) Док. изоморфизм $L(V) \backsimeq M_n(K)$. Пусть $e_1, ..., e_n$ - базис V. Устновим соответствие $A \leftrightarrow A_e$. Это соотв. взаимноднозн. Проверим:
$\begin{cases} A \leftrightarrow A_e \\ B \leftrightarrow B_e \\ \lambda \in K \end{cases}$
$\Rightarrow A + B \leftrightarrow A_e + B_e$
$AB \leftrightarrow A_e B_e$
$\lambda A \leftrightarrow \lambda A_e$. Пусть $A_{ej} = \sum_i e_i a_{ij}, \quad A_E = (a_{ij})$,
$B_{ej} = \sum_i e_i b_{ij}, \quad B_E = (b_{ij})$
Тогда $(A + B)e_j = A_{ej} + B_{ej} = \sum_i e_i(a_{ij} + b_{ij})$.
$A + B \leftrightarrow (a_{ij} + b_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij}) = A_e + B_e$
$(AB)e_k = A(B_{ek}) = A(\sum_i e_i b_{ik}) = \sum_j (A_{ej})b_{jk} = \sum_j (\sum_i e_i a_{ij})b_{jk} = \sum_i e_i(\sum_j a_{ij} b_{jk})$
$AB ...$
$\lambda A ...$
Изом-м доказан.
$M_n(K)$ - алгебра над $K \Rightarrow L(V)$ - алгебра над K, ассоциативная, с единицей. $E : x \longmapsto x, \forall x \in V$ и некомму. при $n \geq 2$.

0.1 Ядро и образ линейного отображения

0.1.1 Определение

Пусть $A : V \to W$ - л.о. в пр. над п. K. Мно-ва
$kA := \{v \in V | Av = 0\}$
$iA := \{Av | v \in V\}$
Из соотв. ядром и образом мн. от. A.

0.1.2 Ядро и образ линейного отображения - подпро-во. $dim(Ker(A)) + dim(Im(A)) = dim(V)$.

Доказательство.
1. $Ker(A)$
   Если $u, v \in Ker(A), \quad \alpha, \beta \in K$, то $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av = \alpha 0 + \beta 0 = 0$
   $\alpha u + \beta v \in Ker(A)$.
   $Im(A)$: Если $Au, Av \in Im(A)$, то $\alpha(Au) + \beta(Bv) \in Im(A)$.
2. Пусть $u_1, ... u_d$ - базис $Ker(A), w_1 = Av_1 ... w_2 = Av_2$ - базис V.
   (a) Линейная независимоть:
   $\sum \alpha_i u_i + \sum \beta_i v_i = 0$
   Применим A. Получим $\sum \beta_j w_j = 0$. Но w_1, w_2 - базис, $\beta_j = 0, \forall j$.
   Тогда $\sum \alpha_i u_i = 0$. Но $u_1, .., u_i$ - базис, $\alpha_i = 0, \forall i$.
   (b) Максимальность.
   Пусть $v \in V$. Тгда $Av \in Im(A), \quad Av = \sum_j \beta_j w_j = \sum \beta_j (Av) = A(\sum \beta_j v_j)$,
   $A(v - \sum beta_j v_j) = 0, \quad v - \sum \beta_j v_j \in Ker(A)$,
   $v - \sum \beta_j v_j = \sum \alpha_i u_i, \quad v = \sum \alpha_i u_i + \sum \beta_j v_j$

□

0.1.3 Опр.

Числа $rk(A) := dimIm(A)$ и $defA := dim(Ker(A))$ наз. соотв. рангом и дефектом лин. отобр. A.

0.1.4 Теорема

Пусть $A : V \to W$ - л.о. в пр. над п. K, $e_1, ...e_n$ - базис V, $f_1, ...f_s$ - базис W. A_f^e - литр.лин.отоб. Тогда

1. $(Ker(A))$ - про-во решений однородной системы линейных ур-ий $A_e^f x = 0, x = \left(\begin{cases} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{cases}\right)$.

   $dem(Ker(A)) = n \cdot rk(A_f^e)$, базис $Ker(A)_e$ - ФСР.

2. $(Im(A))_f$ - линейная оболочка столбцов матрицы $A_f^e, dim(Im(A)) = rk(A_f^e)$.
   базс $(Im(A))_f$ - лаовыоавыжжыожа матрицы A_f^e.

Доказательство. $1)v \in Ker(A), \quad Av = 0$
$(Av)_f = 0, \quad A_f^e v_e = 0$
v_e - решение системы лин. ур-ий $A_f^e x = 0$.
2) $V =< e_1, ..., e_n >\Rightarrow (Im(A)) =< (Ae_1), ..., (Ae_n) >, (Im(A), =< (Ae_1)_f, ..., (Ae_n)_f >$. □

0.2 Обратимые операторы

0.2.1 Теорема

Пусть $A : V \to V$ - линейный оператор конечномерного вект. про-ва V над полем K. След. утверждение равносильно:

1. $Im(A) = V$.
2. $Ker(A) = \{0\}$.
3. A - вз. однознач. отобр. V на V.
4. A^{-1} - сущесвует и линейно.
5. A - образ базиса V - базиса V.
6. Матрица A невырождена: $det(A_e) \neq 0$.

Такой оператор назва. обратимым или невырожденным.

Доказательство. (1) и (2) равносильны ввиду ф-лы Грассмана $(dim(Ker(A)) + dim(Im(A)) = dimV)$.
(1) и (2) $\Rightarrow$ (3)
Вз. однoз.: $Ax = Ay \Rightarrow A(x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$
“на”: $Im(A) = V$.
(3) $\Rightarrow$ (4). A^{-1} - сущ. по опред.
линiность A^{-1}. Пусть $x', y' \in V, \quad \alpha, \beta \in K.\exists x, y \in V : Ax = x', Ay = y'$.. Тогда
$A^{-1}(\alpha x' + \beta y') = A^{-1}(\alpha(Ax) + \beta(Ay)) = A^{-1}(A(\alpha x = \beta y)) = \alpha x + \beta y = \alpha(A^{-1}x') + \beta(A^{-1}y')$.
(4) $\Rightarrow$ (5). Пусть $e_1, ..., e_n$ - базис V. Дост. док. лин. нез. $Ae_1, ..., Ae_n$. Пусть $\sum_j \alpha_j(Ae_j) = 0$. Применим A^{-1}:

$\sum_j \alpha_j A^{-1}(Ae_j) = 0$

(5) $\Rightarrow$ (6). Если $e_1, ..., e_n$ и $Ae_1, ..., Ae_n$ - базисы V, то A_e - матрица перехода от первого базиса ко второму. Поэтому $det(A_e) \neq 0, \quad \exists A_e^{-1}$..
(6) $\Rightarrow$ (1) Ур-ие $Ax = v$ в координатах дайт крамерову систему линейных ур-ий $A_e x_e = v_e$. Эта система имеет единественно решение при любой правой части. □

0.3 Собственные векторы, собственные значения и характеристический многочлен

0.3.1 Опр.

Пусть $A : V \to V$ - линейный оператор векторного про-ва V над полем K. Вектор $v \in V$ и скаляр $\lambda \in K$ называются собственными для A, если $Av = \lambda v, v \neq 0$.

Как найти собственный вектор и собственное значение, если A азадан матрицей A_e в базасие $e_1, ..., e_n$.?

Равносильно: $(x) \left\{ \begin{cases} Av = \lambda v \\ Av - \lambda v = 0 \\ Av - \lambda E v = 0 \\ (A - \lambda E)v = 0 \\ v \in Ker(A - \lambda E) \end{cases} \right.$.

Если $v \neq 0$, то $Ker(A - \lambda E)$

$\{0\}, \quad A - \lambda E$ вырожден, его матрица вырождена: $\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots a1n & \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0$

Это ур-ие наз. характеристическим., его левая часть - хар. мн-н (λ) с тевфдаовж $n = dim(V)$.
Мно-во его корней наз. спектром оператора A и обозн $Sp(A)$ или $Spec(A)$.

0.3.2 Теорема

1. Характеристический многочлен не зависит от случайного выбора базиса.
2. Всякое собственное значение - корень характеристического многочлена, принадлежащий полю скаляров.
3. Всякий корень характер. многочлена, принадл. полю скаляров, является собственным значением.
4. Собств. векторы, отвеч. с знач. λ вместе с нулём, образует подпро-во:
$V_\lambda(A) = Ker(A - \lambda E) = \{x \in V | (A - \lambda E)x = 0\}$.

Доказательство.

1. Если A и B - матрицы опреатора A в базисах e и $e', C : e \to e'$ - матрица перехода, то $B = C^{-1}AC$.
Тогда $|B - \lambda E| = |C^{-1}AC - \lambda E| = |C^{-1}(A - \lambda E)C| = |C^{-1}| \cdot |A - \lambda E| \cdot |C| = |A - \lambda E|$.
2. Следует из равенства (*).
3. Следует из равенства (*).
4. Следует из равенства (*).

□

0.3.3 Пример

$V = \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A : x \to Ax, x \in \mathbb{R}^2$.

Если $e_1 = \left(\begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \right), e_2 = \left(\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \right)$

То $\left\{ \left\{ Ae_1 ... \right. \right.$

$|A - \lambda E| = | \begin{matrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{matrix} = (-\lambda)^2 + (2+4)(-\lambda) + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = (-\lambda)^2 + tr(A) \cdot (-\lambda) + det(A) = tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5), \quad Sp(A) = \{1, 5\} \in (R)$

$V_1(A) : (A - E)x = 0,$

$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$ ФСР: $v_1 = \left(\begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \right)$

$V_5(A) : (A - 5E)x = 0.$

$\begin{matrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$ ФСР: $v_2 = \left(\begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \right)$

A растягивает плоскость в 5 раз от неподвижной прямой с базисом $\mathbb{R}v_1$ параллельно прямой $\mathbb{R}v_2$.