Ангем

Зайцев Вадим

2010-03-10

0.1 Диагонализируемые операторы

0.1.1 Теорема

Пусть V - конечномерное векторное про-во над полем K и $A : V \to V$ - мн. оператор, причёс $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subseteq K, \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$.
Обозначим $V_i = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i E)$
След. равносильно:

1. $\sum\limits_i = 1^s \dim(V_i) = \dim(V)$
2. $V = V_1 \oplus ... \oplus V_s$
3. V имеет базис, сост. из собств. векторов. A
4. Матрица A подона диагональной над K.

Доказательство. blah blah blah

Пусть $v_s = v_1 + ...v_{s-1}, \quad v_i \in V_i, \forall i$. Применим оператор A:
$\lambda_s v_s = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_{s-1} v_{s-1}$
Но
$\lambda_s v_s = \lambda_s v_1 + ... + \lambda_s v_{s-1}$
Вычтем:
$0 = (\lambda_1 - \lambda_s)v_1 + ... + (\lambda_1 - \lambda_s)v_{s-1}$
По предположению индукции: $V_1 + ... + V_{s-1} = V_1 \oplus ... \oplus V_{s-1}$
Получаем: $(\lambda_i - \lambda_s)v_i = 0, i < s$
С другой стороны: $\lambda_i - \lambda_s \neq 0$. Значит $v_i = 0, i < s$.
Тоогда $v_s = 0$.
$V_1 + ...V_s = V_1 \oplus ... \oplus V_s$.
Тогда $\dim(V_1 + ... + V_s) = \sum\limits_{i=1}^{s} \dim(V_i) = \dim(V)$. Т.к. $V_1 + ...V_s \subseteq V_1$, то $V = V_1 + ... + V_s - V_1 \oplus ... \oplus V_s$.

2) $\Rightarrow$ 3). Объединение базисов V_i при $i = 1...s$ даёт требуемый базис V.

3) $\Leftrightarrow$ 4). $\begin{cases} Af_1 = \lambda_1 f_1 \\ \vdots \\ Af_n = \lambda_n f_n \end{cases}$
$f_1...f_n$ - базис V.
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$ - диагон.
Верно и обратное. Если $e_1...e_n$ - произв. базс V и $C : e \to f$ - матрица перехода, то $C^{-1} A_e C = A_f$ - диагон.
3) $\Rightarrow$ 1) Пусть $F = \{f_1...f_n\}$ - базис V, сстоящий из собственных векторов относ. A. Пусть F_i - часть F, лежащая в про-ве V_i. Тогда $|F| \leq \dim(V_i), \forall i$.
Тогда: $\dim(V) = |F| = \sum\limits_{i=1}^{s} |F_i| \leq \sum\limits_{i=1}^{s} \dim(V_i)$. Отсюда $\dim(V_1 + ...V_s) = \sum_{i=1}^{s} \dim(V_i) \geq \dim(V)$
Но $V_1 + ...V_s \leq V$, след. $\dim(V_1 + ...V_s) = \dim(V), \quad \sum_{i=1}^{s} \dim(V_i) = \dim(V)$ □

0.1.2 Замечание 1

Над полем $\mathbb{C}$ "почти" любой опреатор конечномерного прова V диагонилизируем, поскольку у случайной квадратной матрицы над полем комплексных чисел характеристический многолчен имеет как правило **различные** корни.

0.1.3 Замечание 2

Существует недиагонилизируемые опреаторы:

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \mathbb{R}^2, \quad A : x \to Ax$
   $|A - \lambda E| = \lambda^2 + 1, \quad \mathrm{Sp}(A) = \{i, -i\} \not\subset \mathbb{R}$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \mathbb{R}^2, \quad A : x \to Ax$
   $|A - \lambda E| = \lambda^2, \quad \mathrm{Sp}(A) = \{0\}$

0.2 Инвариантные подпространства

0.2.1 Определение

Пусть A - линейный оператор векторного про-ва V над полем K. Подпро-во U из V наз. инвариантным относительно A, если $A(U) \subset U : \quad u \in U \Rightarrow Au \in U$.
Отображение ${}^{A}/_{U} : \quad u \to Au$ называется **сужением** A над U. Это линейный оператор.

0.2.2 Примеры

1. “Тривиальные” инвар. подпро-ва $\{0\}$ и V.

2. Одномерные инвариантные подпро-ва порождаются собственным вектором: *картинко.*

0.2.3 Теорема 1

Нетривиальное инвариантное подпро-во сущесвтует $\Leftrightarrow$ матрица оператор подобна полураспавшийся.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $0 < U < V, AU \subset U$. Пусть $e_1 ... e_k$ - базис U, $\quad e_1 ... e_k, e_{k+1} .. e_n$ - базис V.
Тогда

$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11}e_1 + ... + a_{k1}e_k \\ Ae_k = a_{1k}e_1 + ... + a_{kk}e_k \\ Ae_{k+1} = a_{1,k+1}e_1 + ... + a_{n,k+1}e_k \\ Ae_n = ... \end{cases}$$

$\Leftarrow$ Если A_e имеет указанный вид, то надо взять $U = e_{11} ... e_k$. Тогда $AU \subset U$

□

0.2.4 Следствие

$\not\sim_{A|U} (\lambda) | \not\sim_{A} (\lambda)$.
$\mathrm{Sp}(A|U) \subset \mathrm{Sp}(A)$

0.2.5 Теорема 2

Конечноемерное векторное про-во над полем $\mathbb{R}$ всегда имеет инвариантную прямую или инвариантную плоскость (относительно **любого** линейного оператора).

Доказательство. $\dim_{\mathbb{R}}(V) = x < \infty, \quad A : V \to V$ - линейный оператор.

Случай 1 $\exists \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \lambda \in \mathbb{R}$.
тогда при $n \in V : \quad n \neq 0, \quad Ax = \lambda x$.
Пусть $U = \{\lambda u | \lambda \in \mathbb{R}\}$, тогда $\dim(U) = 1, \quad AU \subseteq U$.

Случай 2 $\mathrm{Sp}(A) \not\subset \mathbb{R}$. Сущ. $\lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \lambda = \alpha + i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$. Можно считать, что $V = \mathbb{R}^n, \quad A : x \to Ax, A] in M_n(\mathbb{R})$.
Пусть $\widetilde{V} = \mathbb{C}^n$ и $\widetilde{A} : x \to Ax, x \in \mathbb{C}^n$..
Тогда $\lambda \in \mathrm{Sp}(\widetilde{A}) = \mathrm{Sp}(A)$. Сущ. $v \in \mathbb{C}^n : \widetilde{A}v = \lambda v, v \neq 0$.
“Расщепим” $v : \quad v = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}^n$.

Пример $\begin{matrix} 1 + 2i \\ -1 + 3i \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} + i \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$

Продолжение Тогда:

$\square$

0.3 Нильпотентные операторы

0.3.1 Опередение

Оператор N наз. нильпотентным(переводится “потенциально-нулевой“), если сущ. $k > 0: \quad N^k = 0$

0.3.2 Пример

$V = \{$ мно-н стпени $\leq n\}$, D - дифф., тогда $D^{n+1} = 0$.

0.3.3 Теорема 1

Ненулевоей нильпотентные оператор недиагонилизурем.

Доказательство. Пусть $N^k = 0$. Если λ - собственное значение N, то существует $v \neq 0: \quad Nv = \lambda v$, тогда $N^k v = \lambda^k v, \quad \lambda^k v = 0$
$\lambda \in K$ - поле, дел. вжфвжжафожыва
Если сущ. базис $V \quad (= e_1 ... e_n)$, состоящий из собственных векторов отн. N.
$Ne_1 = \lambda_1 e_1 = 0 \quad ... \quad Ne_n = \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow N = 0$.
Базиса из собственных векторов нет!!!111адинадинадин. $\square$

0.4 Цель: Классификация нильпотентных операторов

0.4.1 Определение

Последовательные вектора $v, Nv, N^2 v, ..., N^{h-1} v$ образует ниль-слой высоты h с началом v, если $N^h v = 0$.

0.4.2 Пример

$\frac{x^n}{n!}, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, ..., x, 1$ - ниль-слой высторы $n+1$ сначалом $\frac{x^n}{n!}$ относительно диффиринцирования.

0.4.3 Определение

Ниль-таблица - это таблица, столбцы который - ниль-слои на общей нижней горизонтальной границе.

0.4.4 Определение

След. преобразования НТ называются элементарными:

1. Прибавление к словю выстоы h отрезка высоты h из другого слоя, умноженного на скаляр.
2. Умножение слоя на ненулевой скаляр.
3. Перестановка слоёв.
4. Исключения нулевых векторов сдвигом слоя вниз.

0.4.5 Лемма 1

Элементарные преобразования НТ сохраняют сво-во ”быть НТ“ и сохраняют линейную оболочку мно-ва векторов НТ.

Доказательство. 1. $\begin{pmatrix} u & v \\ Nu & Nv \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u + \lambda V & v \\ Nu + \lambda Nv & Nv \end{pmatrix}$

2. Пусть $T_1 \underset{simplepreob.}{\to} T_2$. Тогда $T_2 \subset < T_1 >, < T_2 > \subseteq < T_1 >$.
   Элементарные преобразования обратимы. $T_2 \to T_1$, тогда $< T_1 > \subseteq < T_2 >$.

$\square$