Ангем

Зайцев Вадим

2010-03-24

0.0.1 Лемма 2

Система векторов НТ линейно-независима $\Leftrightarrow$ её перывй этаж линейно-независим.

Доказательство.

$\Leftarrow$) Очевидно

$\Rightarrow$) Пусть существует нетривиальная линейная комбинация векторов НТ, равная нулю. Применение N снижает высоту каждого вектора НТ на один этаж. Тогда, применения N несколько раз, получим нетривиалыую линейную комбинацию векторов первого этажа. По условию первый этаж линейно-независим. Противоречие.

$\square$

0.0.2 Теорема

Пусть N - это нильпотентный оператор вектороного про-ва V над полем K. Тогда V имеет нильбазис относительно N (т.е. базис, составленный из непересκающихся нильслоёв относительно N). Но если s_h - число максимальных нильслоёв высоты h в любом таком базисе,
$s_h = r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1}$, где $r_h = \mathrm{rk}(N^h) = \dim(N^h V)$.
Т. о. "форма" ниль-базиса зависит только от N и V.

Доказательство.

1. **существование**
   Пусть $N^k = 0$ и пусть T_1 - нильтаблицас началами $e_1, ..., e_n$, где $e_1, ..., e_n$ - некоторый базис V:
   $$T_1 = \boxed{\begin{array}{ccc} e_1 & ... & e_n \\ Ne_1 & ... & Ne_n \\ ... & ... & ... \\ N^{k-1}e_1 & ... & N^{k-1}e_n \end{array}}$$
   Очевидно, что $< T_1 >= V$. При элем. преобр. это сво-во сохранятеся по лемме 1. Исключим нулевые векторы сдвигом слоёв вниз. Если векторы первого этажа будут линейно-зависимы, то элементарным переобр. 1 можно получить нулевой вектор на первом этаже.
   picture
   $\alpha a + \beta c \gamma c + \delta d + \varepsilon e = 0$
   $c = -\frac{\alpha}{\gamma} a - \frac{\beta}{\gamma} b$
   Прибавим к 4м слою соотве. отрезки из 1 и 2 слоя, умноженные на $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}$
   Сдвигая слой вниз, построим НТ с лифавыаыфвафываыф Тогда T_2 - это требуемый нильбазис V по лемме 2.

2. **Единственность формы**
   Если дан некоторый нильбазис, то лекго найти $\dim(N^h V)$:

$$\begin{aligned} r_0 = \dim(N^0 V) = \dim(V) = s_1 + 2s_2 + 3s_3 \quad &+ \quad ..., && (1) \\ r_1 = \dim(N^1 V) = s_2 + 2s_3 \quad &+ \quad ... && (2) \\ r_2 = \dim(N21V) = 2s_3 \quad &+ \quad ... && (3) \\ & && (4) \end{aligned}$$

где s_i - слои в нильтаблице. *picture*

Вычитая из каждого ур-ия следующее за ним, полуим

$$r_0 - r_1 = s_1 + s_2 + s_3... \tag{5}$$
$$r_1 - r_2 = s_2 + s_3... \tag{6}$$
$$r_2 - r_3 = s_3... \tag{7}$$
$$\tag{8}$$

Повторяя, полуим следующее равенство:
$(r_0 - r_1) - (r_1 - r_2) = s_1$
$(r_1 - r_2) - (r_2 - r_3) = s_2$
...
Т.е. $r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1} = s_h \quad \forall h.$

□

0.0.3 Пример

Пусть $V = \mathbb{R}^3$
$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow N^2 = 0$
Найдём нильбазис.
По теореме:
$\begin{matrix} e_1 & e_2 \\ Ne_1 & Ne_2 \end{matrix}$

0.1 Корневые подпр-ва и корневое разложение

0.1.1 Определение

Пусть A - лин. опер. вект. про-вао V над полем K. Ветор $v \in V$ называется **корневые** высоты h, отв. собств. значению λ опер. A, если
$\begin{cases} (A - \lambda E)^h v = 0 \\ (A - \lambda E)^{h-1} v \neq 0 \end{cases}$
Вектор v - корневой высоты 1 $\Leftrightarrow$ v - собственный вектор.
Очевидно: $0 < \mathrm{Ker}(A - \lambda E) \subseteq \mathrm{Ker}(A - \lambda E)^2 \subseteq ...$
Подпро-во $V^\lambda(A) := \overset{h \geq 0}{\cup} \mathrm{Ker}(A - \lambda E)^h$ называется корневым, отв. собственному значению λ оператор A. Оно состоит из нул. вектора и всех корневых, отвечающих собственному значению λ.

0.1.2 Теорема

Пусть A - мн. опер. в про. V над полем K и $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, ...\lambda_s\} \subseteq K$, $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$. Пусть V_j - корневые подпро-ва из V, отвечающих собственным значениям λ_i.
Тогда:

1. $V = V_1 \oplus ... \oplus V_s, \quad AV_j \subseteq V_j, \forall j$
2. $\dim(V_j) = k_j$, где $|A - \lambda E| = \prod_{j=1}^{s} (\lambda_j - \lambda)^{k_j}$, т.е. k_j - кратность λ_j в $X_A(\lambda)$.

Доказательство. ниже, после лемм. □

0.1.3 Лемма 1

Если $AP = PA$, то $\mathrm{Ker}(P), \mathrm{Im}(P)$ инвар. отност. A. Здесь A и P - лин. операторы в про. V над полем K.

Доказательство.

$\mathrm{Ker}(P)$ Пусть $v \in \mathrm{Ker}(P)$. Тогда $Pv = 0$ и $P(Av) = A(Pv) = A0 = 0$.

$\mathrm{Im}(P)$ Пусть $Pv \in \mathrm{Im}(P)$. Тогда $A(Pv) = P(Av) \in \mathrm{Im}(P)$.

□

0.1.4 Замечание

Лемма верна, если $P = \sum a_k A^k$.

0.1.5 Лемма 2

Пусть P - линейный оператор вект. про-ва V над полем K. Тогда $V = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Im}(P) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(P) = \mathrm{Im}(P^2)$.

Доказательство.

$\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(P) = PV = P(\mathrm{Ker}(P) + \mathrm{Im}(P)) = P(\mathrm{Ker}(P)) \oplus (\mathrm{Im}(P)) = 0 \oplus P(PV) = P^2V = \mathrm{Im}(P^2)$.

$\Leftarrow$ Имеем $P(\mathrm{Im}(P)) = \mathrm{Im}(P)$. Значит, сужение P ин $\mathrm{Im}(P)$ - невырожденный оператор. Отсюда $\mathrm{Ker}(P \setminus \mathrm{Im}(P)) = \{0\}$, т.е. $\mathrm{Ker}(P) \cap \mathrm{Im}(P)\{0\}$. Тогда $\dim(\mathrm{Ker}(P) + \mathrm{Im}(P)) = \dim(\mathrm{Ker}(P)) + \dim(\mathrm{Im}(P)) = \dim(V), \quad \mathrm{Ker}(P) + \mathrm{Im}(P) \leq V, \quad \mathrm{Ker}(P) + \mathrm{Im}(P) = V$
$V = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$.

$\square$

0.1.6 Док-во теоремы

Имеем $\lambda_1 \in \mathrm{Sp}(A)$
$\det(A - \lambda_1 E) = 0, \quad V > (A - \lambda_1 E)V > ... > (A - \lambda_1 E)^{h_1} V = (A - \lambda_1 E)^{h_1+1} V = ... = (A - \lambda_1 E)^{2h_1} V = ...$
Обозначим $P_1 = (A - \lambda_1 E)^{h_1}$. Тогда $P_1 V = P_1^2 V$. По лемме 2: $V = \mathrm{Ker}(P_1) \oplus \mathrm{Im}(P_1)$.
Утверждается, что $\mathrm{Ker}(P_1) = V_1$, т.е. высота корневого вектора, отвечающего λ_1 не превосходит числа h_1. Тогда где-то в начале возникает равенство (где-то после первого многоточия).
Действительно (!), $0 < \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E) < ... < \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E)^{h_1} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E)^{h_1+1} = ...$
Ввиду теоремы о сумме размерности ядра и образа.
Поэтому $V_1 = \overset{h \geq 0}{\cup} \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E)^h = \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E)^{h_1} = \mathrm{Ker}(P_1)$
ГДе же корневые подпро-ва V_J при $j > 1$??? Утверждается, что $V_j \subseteq W = \mathrm{Im}(P_1)$.
Действительно, пусть $v \in V_j$. Тогда $(A - \lambda_j E)^h v = 0$.
Многочлены $(\lambda - \lambda_j)^h$ и $(\lambda - \lambda_1)^h$ взаимнопростые при $j > 1$. Разрешимо в $K[\lambda]$ линейное диофантово ур-ие
$(\lambda - \lambda_j)^h \underset{\text{неизв. мно-н}}{r(\lambda)} + (\lambda - \lambda_1)^h \underset{\text{неизв. мно-н}}{s(\lambda)} = 1$
Тогда $(A - \lambda_j E)^h r(A) + (A - \lambda_1 E)^{h_1} s(A) = E$. Применим к вектору v:
$v = Ev = [(A - \lambda_j E)^h r(A) + (A - \lambda_1 E)^{h_1} s(A)]v = r(A)\underset{0}{\underset{0}{(A - \lambda_j E)^h v}} + (A - \lambda_1 E)^{h_1} s(A)v$
$v \in \mathrm{Im}(A - \lambda_1 E)^{h_1} = W \quad V_j \subseteq W, \forall j > 1$.
Тогда $\underset{- \subseteq \{\lambda_1 ... \lambda_s\}}{\mathrm{Sp}(A \setminus W)} \subset \mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1 ... \lambda_s\}$.
По теореме об инвар. подпро-вах:
$V_1 \cap W = \{0\}$. Отсюда $\mathrm{Sp}(A \setminus W) = \{\lambda_2 ... \lambda_s\}$
$\mathrm{Sp}(A \setminus V_1) = \{\lambda_1\}$.