Ангем

Зайцев Вадим

2010-03-31

2) Пусть $A_j = ^A|_{V_j}$ - сужение A на V_j. Тогда $\mathrm{Sp}(A_j) = \{\lambda_j\}$. Т.К. $V = \oplus V_j$, то...

0.1 Жорданов базис и жорданова форма

0.1.1 Теорема (Жордан, 1870)

Пусть A - линейный оператор в конечномерном векторном про-ве V над полем K. $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_s\}$. Тогда V имеет "жорданов базис", т.е. базис, составленный из непересекающихся нильслоёв относительно $A - \lambda_j E$. Такой базис неединственный, но его "форма" единственна: если $s_h(\lambda_j)$ - число максимальных нильслоёв высоты h относительно $A - \lambda_j E$ из такого базиса, то $s_h(\lambda_j) = r_{h-1}(\lambda_j) - 2r_h(\lambda_j) + r_{h+1}(\lambda_j)$, где $r_h(\lambda_j) := \mathrm{rk}(A - \lambda_j E)^h = \dim(A - \lambda_j E)^h V$.

Доказательство.

существование) По теореме о корневом разложении $V = \overset{s}{\underset{j=1}{\oplus}} V_j, \quad V_j = \mathrm{Ker}(A - \lambda_j E)^{h_j}$.

Пусть $N_j = (A - \lambda_j E)\mid_{V_j}$. Тогда N_j - нильпотентный оператор на V_j: $v \in V_j \Rightarrow N_j^{h_j} v = (A - \lambda E)^{h_j} v = 0$.
По теореме о нильпотентных операторах V_j имеет нильбазис относительно N_j. Объединение таких базисов по $j = 1, ..., s$ даёт требуемый жорданов базис про-ва V.

единственность формы) Пусть $F = \{f_1, ..., f_n\}$ - некоторый жорданов базис V, тогда: $F = \cup F_j, \quad F_j \subset V_j$.
Т.к. F - линейно-независимая система, то F_j - линейно-независима, поэтому $|F_j| \leq \dim(V_j)$.
Если $\exists j : |F_j| < \dim(V_j)$, то $\dim(V) = |F| = \sum_{j=1}^{s} |F_j| < \sum_{j=1}^{s} \dim(V_j) = \dim(V)$ - противоречие. (Использовалось неравенство 2 строчки назад).
Следовательно $|F_j| = \dim(V_j)\, \forall j, \quad F_j$ - базис V_j.
Более того, F_j - не базис относительно $N_j = (A - \lambda_j E)\mid_{V_j}$.
По теореме о нильпотентных операторах $s_h(\lambda_j) = r_{h-1} + 2r_h - r_{h+1}$, где $r_h = \mathrm{rk}(N_j^h) = \dim(A - \lambda_j E)^h V_j$.
Пусть $W = \underset{i \neq j}{\oplus} V_j, \quad d = \dim(W), \quad V = V_j \oplus W$. Тогда $(A - \lambda_j E)W = W$.
Отсюда $(A - \lambda_j E)^h = V = (A - \lambda_j E)^h V_j \oplus (A - \lambda_j E)^h W = (A - \lambda_j E)^h V_j \oplus W$, поэтому $r_h(\lambda_j) = r_h + d$.
Тогда $r_{h-1}(\lambda_j) + 2r_h(\lambda_j) + r_{h+1}(\lambda_j) = (r_{h-1} + d) - 2(r_h + d) + (r_{h+1} + d) = r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1} = s_h(\lambda_j)$.

□

0.1.2 Слдествие (матричная форма теоремы Жордана)

Пусть $A \in M_n(K), \quad \mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_s\} \subseteq K$, тогда A подобна над полем K клеточно-диагональной матрице $J_A = ...$
Матрица J_A называется жордановой формой для A, а клетки $J_h(\lambda_j)$ называются жорадновыми клетками порядка h, отвечающими собственному значению λ_j.
Если $s_h(\lambda_j)$ - число клеток $J_h(\lambda_j)$ из J_A, то $s_h(\lambda_j) = r_{h-1}(\lambda_j) - 2r_h(\lambda_j) + r_{h+1}(\lambda_j)$, где $r_h(\lambda_j) := \mathrm{rk}(A - \lambda_j E)^h = \dim(A - \lambda_j E)^h V$. (как-то так...).
Таким образом, J_A задаётся A относительно с ран.. до перестановки

Доказательство.
Пусть $V = K^n$, $A : x \to Ax, x \in K^n$, Если $e_1, ..., e_n$ - станд. базис K^n, то $A_k = A, \mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_s) \subseteq K$,
По теореме Жорадана $V = K^n$ имеет жорданов базис. Пусть $f_1, ..., f_h$ - максимальный нильслой высоты h относительно $A - \lambda_J E$ из данного жорданова базиса, тогда:
image

$$\begin{cases}(A-\lambda_j E)f_1=0\\(A-\lambda_j E)f_2=0\\\vdots\\(A-\lambda_j E)f_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Af_1=\lambda_j f_1\\Af_2=f_1\lambda_j f_2\\\vdots\\Af_h=f_{h-1}+\lambda_j f_h\end{cases}\Leftrightarrow A_{(f_1\dots f_h)}=\begin{pmatrix}\lambda_j & 1 & \dots & 0\\0 & \lambda_j & \dots & 0\\0 & 0 & . & \vdots\\0 & 0 & \dots & \lambda_j\end{pmatrix}$$

Т.о. макс. нильслою высоты h относительно $A-\lambda_j E$ из жорад. базиса отвечает жорд. клетки $J_h(\lambda_j)$ из J_A. Формула для $S_h(\lambda_j)$ следует из теоремы. □

0.1.3 Пример

$K=\mathbb{R},\quad V=\mathbb{R}^3,\quad A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 3 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

Найдём J_A и $C: C^{-1}AC=J_A$.

1. $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1 & -\lambda & \text{-1}\\1 & 3 & -\lambda\end{vmatrix}\cdot(1-\lambda)=(\lambda-2)^2(1-\lambda),\quad \mathrm{Sp}(A)=\{2,1\}\subset\mathbb{R}.$

2. Базис корневых
   $V_1=\mathrm{Ker}(A-2\lambda E)^2\quad V_2=\mathrm{Ker}(A-E)$.
   По теор. о корн.: $V_1=\mathrm{Im}(A-E)\quad V_2=\mathrm{Im}(A-2E)^2$.
   $$\left|\begin{array}{ccc}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\\\hline & & \\0 & \text{-1} & 1\\1 & 2 & 1\\0 & 0 & 0\end{array}\right|\sim$$

0.2 Критерий подобия

Пусть $A\in M_n(K)$, K - поле, $\mathrm{Sp}(A)=\{\lambda_1,...,\lambda_s\}\subseteq K$. Тгда матрица B из $M_n(K)$ подобна A над K, если и только, если выполнено:

$$\begin{cases}|B-\lambda E|=|A-\lambda E|=\prod_{j=1}^s(\lambda_j-\lambda)^{k_j}\\\mathrm{rk}(B-\lambda_j E)^h=\mathrm{rk}(A-\lambda_j E)^h,\forall h:0<h<h_j\le k_j\end{cases}.$$

Доказательство.

⇒) Пусть $B=C^{-1}AC$. Тогда $|B-\lambda E|=|A-\lambda E|$ (было).
  Кроме того, $(B-\lambda_j E)^h=(C^{-1}AC-\lambda_j E)^h)=[C^{-1}(A-\lambda_j E)C]^h=C^{-1}(A-\lambda_j E)^h C$.
  Поэтому $\mathrm{rk}(B-\lambda_j E)^h=\mathrm{rk}(A-\lambda_j E)^k\,\forall h$.

⇐) Из условия 1), 2) и мтаричной формы теоремы Жордана следует, что жорданова форма $J_B=J_A$. Но $B\approx J_B=J_A\approx A$, $B\approx A$ над полем K.

□