Ангем

Зайцев Вадим

2010-03-31

0.1 Ряды от матриц

ПУсть $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

0.1.1 Определение

Форм. степенной ряд относительно над K - это выражение $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{i} nftya_k \lambda^k, \quad a_k \in K$

Его форм. приож над - это ряд $sum_{k=1}^{i} nftyka_k \lambda^{k-1}$
Многочлен $f_n(\lambda) := sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k$ называется N-й частичной суммой ряда $f(\lambda)$.
Пусть $A_0, A_1, ...$ - послед. матриц из $M_n(K)$. Матрица L называется пределом послед. $A_0...$, если $L_{ij} = \lim_{N\to\infty}(A_N)_{ij}, \quad \forall i$

Ряд $f(\lambda)$ сходится на матрице $A \in M_n(K)$, если существует $\lim_{N\to\infty} f_N(A)$.

0.1.2 Теорема

Ряд $f(\lambda)$ сходится на матрице A из $M_n(K)$, $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, тогда и только тогда, когда $f(\lambda)$ и его производные до порядка $h(\lambda_j)$ сходятся в точках $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_s\}$. Здесь $h(\lambda_j) = h_j$ - макс. размер клетки Жордана $J_h(\lambda_j)$ из J_A.

0.1.3 Лемма

Если $\exists lim_{n\to\infty} A_N$, $\lim_{n\to\infty} B_N$, то пределы $\lim_{N\to\infty}(A_N + B_N) =$ сумма пределов. с произведением аналогично.

Доказательство. Очевидно. Опирается на сво-ва пределов суммы и произведения последовательности чисел. □

Доказательство. Пусть $J = C^{-1}AC$ - жорданова форма мтарица A. Тогда
Если $j = \begin{pmatrix} j_1 & ... & 0 \\ 0 & . & 0 \\ 0 & ... & J_k \end{pmatrix}$, J_k - жорданова клетка, то $f_N(J) = ...$ и
$\exists \lim f_N(J) \Leftrightarrow \exists \lim f_N(J_k) \forall k$
Если $J_k = J_h(\lambda_i)$, то получается большаааая хрень.
и $\exists \lim f_N(J_K) \Leftrightarrow \exists \lim_{N\to\infty} f_N^{(j)}$ при $< h \leq h_j$, $\forall \lambda_i \in \mathrm{Sp}(A)$.
Равносильно: ряд $f(\lambda)$ и его производные до порядка h_{i-1} сходится в точках $\lambda_j \in \mathrm{Sp}(A)$. □

0.1.4 Следствие

Для любой матрица из $M_n(\mathbb{C})$ сходятся ряды

1. $\exp(A) = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots$
2. $\cos(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!}$
3. $\sin(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}$

1 Линейной отображение евклидовых и эрмитовых пространств

1.1 Определения, примеры

1.1.1 Определения

Конечномерное векторное про-во V над полем $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется евклидовым (эрмитовым), если на нём задано скалярное про-ие, т.е. функция

$$(x, x) : V \times V \to K = \mathbb{R}(\mathbb{C}) \tag{1}$$

со сво-ами:

1. коммутативность: $(a, b) = \begin{cases} (b, a), & K = \mathbb{R} \\ \overline{(b, a)}, & K = \mathbb{C} \end{cases}$
2. аддитивность: $(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$
3. однородность: $(a, \lambda b) = \lambda(a, b)$
4. положительность: $a \neq 0 \Rightarrow (a, a) > 0(\in \mathbb{R}$.

1.1.2 Простейшие следствие

1. $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$
2. $(\lambda a, b) = \overline{\lambda}(a, b)$
3. $(\sum\limits_i \alpha_i a_i, \sum\limits_j \beta_j b_j) = \sum\limits_i \sum\limits_j \overline{\alpha}_i \beta_j (a_i, b_j)$