Ангем. часть 2 семестра

Зайцев Вадим

2010-04-12 - 2010-04-12

1 Линейной отображение евклидовых и эрмитовых пространств

1.1 Определения, примеры

1.1.1 Определения

Конечномерное векторное про-во V над полем $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется евклидовым (эрмитовым), если на нём задано скалярное про-ие, т.е. функция

$$(x, x) : V \times V \to K = \mathbb{R}(\mathbb{C}) \tag{1}$$

со сво-ами:

1. коммутативность: $(a, b) = \begin{cases} (b, a), & K = \mathbb{R} \\ \overline{(b, a)}, & K = \mathbb{C} \end{cases}$
2. аддитивность: $(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$
3. однородность: $(a, \lambda b) = \lambda(a, b)$
4. положительность: $a \neq 0 \Rightarrow (a, a) > 0(\in \mathbb{R}$.

1.1.2 Простейшие следствие

1. $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$
2. $(\lambda a, b) = \overline{\lambda}(a, b)$
3. $(\sum\limits_i \alpha_i a_i, \sum\limits_j \beta_j b_j) = \sum\limits_i \sum\limits_j \overline{\alpha}_i \beta_j (a_i, b_j)$

1.1.3 Примеры

1. Геометрические: $V = \{$геометрических векторов$\}$, $K = \mathbb{R}$.
   Сво-ва скалярного про-ия - теоремы из 1-ого семестра.
2. Алгебраический (евклидов): $V = \mathbb{R}^n, a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \Rightarrow (a, b) := \sum \alpha_i \beta_j$.
3. Алегбраический (эрмитов?): $V = \mathbb{C}^n, \quad (a, b) := \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \beta_j$ (эрмитово скалярное про-ие).
   $\left(\binom{1}{i}, \binom{1}{i}\right) = \overline{1} \cdot 1 + \overline{i} \cdot i = 1 + 1 = 2$
   Это - стандартное эрмитово про-ва размерности n.
4. Функциональные: Пусть $[p, q] \subset \mathbb{R}$ и $C[p, q]$ - про-во непрерывных фнункций со знач. в $\mathbb{R}$. Зададим скалярное про-ие на $C[p, q]$ по правилу $(f, g) := \int_p^q f(t)g(t)dt$.
   Если V - конечномерные про-ва из $C[p, q]$, то V и (f, g) - евкл. про-во.

1.2 Длина и угол

Число $||a|| = \sqrt{(a, a)}$ называется длиной (нормой) вектора a из евклидова (эрмитова) про-ва V.
Очевидно $||a|| \geq 0$, $||a|| == 0 \Leftrightarrow a = 0$
$||\lambda a|| = |\lambda| \cdot ||a||$, т.К. $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2$.
Чтобы ввести угол, необходимо теор?.

1.2.1 Теорема

Пусть V - евклидово (эрмитово) про-во. Тгда верны:

1. Нер-во Коши-Буняковского: $|(a,b)| \leq ||a|| \cdot ||b||$, равенство $\Leftrightarrow$ a и b линейно зависимы.
2. Неравенсто тре-ка: $||a+b|| = ||a|| + ||b||$.
3. Неравенство параллелограмма: $||a+b||^2 + ||a-b||^2 = 2(||a||^2 + ||b||^2)$.

Доказательство.

1. Если $b = 0$, то неравенство очевидно.
   Пусть $b \neq 0$. Пусть $c := a - \frac{(b,a)}{(b,b)}b$. Геометрический смысл:
   $c = a - \lambda b,\ c \perp b, \quad (b,c) = 0, \quad (b, a - \lambda b) = 0, \quad (b,a) - \lambda(b,b) = 0 \quad \lambda = \frac{(b,a)}{b,b)}$
   Тогда $(b,c) = 0$:
   $(b, a - \frac{(b,a)}{(b,b)}b) = (b,a) - \frac{(b,a)}{(b,b)} \cdot (b,b) = 0$
   Тогда $0 \leq (c,c) = (a - \frac{(b,a)}{(b,b)}b, c) = (a,c) = (a, a - \frac{(b,a)}{(b,b)}b) = (a,a) - \frac{(b,a)}{(b,b)} \cdot (a,b)$
   Умножим на (b,b), тогда: $0 \leq (a,a)(b,b) - (b,a)(a,b)$
   $(b,a)(a,b) \leq (a,a)(b,b)$
   $|(a,b)|^2 \leq ||a||^2 \cdot ||b||^2$.
   Равенство $\Leftrightarrow c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{(b,a)}{(b,b)}b$

2. Имеем $||a+b||^2 = (a+b, a+b) = (a,a) + (a,b) + (b,a) + (b,b) \leq ||a||^2 + 2|(a,b)| + ||b||^2 \overset{(1)}{\leq} ||a||^2 + 2||a|| \cdot ||b|| + ||b||^2 = (||a|| + ||b||)^2$.
   Осталось извлечь квадратный корень.

3. $||a+b||^2 = ||a||^2 = (a,b) + (b,a) + ||b||^2$
   $b \to -b, \quad ||a-b||^2 = ||a||^2 - (a,b) - (b,a) + ||b||^2$. Суммируем и радуемся.

□

1.2.2 Следствие 1

Скалярное про-ие можно выразить через длины векторов.

Доказательство.

Евклидов. $(a,b) = \frac{||a+b||^2 - ||a||^2 - ||b||^2}{2}$.

Эрмитово про-во. $(*) \quad ||a+b||^2 = ||a||^2 + (a,b) + (b,a) + ||b||^2$
   $b \to ib \quad ||a+ib||^2 = ||a||^2 + i(a,b) + i(b,a) + ||b||^2$
   Умножим $(*)$ на i, сложим со вторым: $i||a+b||^2 + ||a+ib||^2 = (i+1)(||a||^2 + ||b||^2) + 2i(a,b)$
   В итоге, $(a,b) = \frac{i||a+b||^2 + ||a+ib||^2 - (i+1(||a||^2 + ||b|^2)}{2i}$
   Тождеста $(**)$ и $(***)$ называется поляризационнными.

□

1.2.3 Следствие 2

$|\sum_{i=1}^n a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$. Равенство $\Leftrightarrow$ ....
Угол φ менжду вектором a, b

2) $V(a_1,...,a_s) = \sqrt{\det(G(a_1,...,a_s))}$.
$s-1 \Rightarrow s$: пусть $a_s = a'_s + a''_s$, где $a'_s \in <a_1,...a_s>$, $'_s = \lambda_1 a_1 ... + \lambda_{s-1} a_{s-1}$
Тогда отнимем из посл. столбка лин. комбинация преподнятых столбцов с коэфф. $\lambda_1....\lambda_s$:
...
$= \deg(G(a_1...a_{s-1} \cdot ||a''_s|| = V^2(a_1...a_{s-1}) \cdot ||a''_s||^2 - V^2(a_1...a_{s-1}a_s)$.

1.2.4 Следствие 1

Объём параллепипеда не зависит от выбора порядка рёбер

Доказательство. При транспозиции рёбер $a_i \leftrightarrow a_j$ в матрице Грама (G) $G(a_1...a_s)$ меняются местами строки с номерами i, j и столбцы с номерами i, j. В итоге, $\det(G(a_1....a_s))$ не изменится. □

1.2.5 Следствие 2

Верна формула $d(f,U) = \sqrt{\dfrac{\det(G(a_1...a_s,f))}{\det(G(a_1...a_s))}}$, где U – подпро-во с базисом $a_1...a_s$.

Доказательство. Знаем, что $d(f,u) = ||f''||$, где f'' – $\text{ост}_U f$.
Поэтому $\det(G(a_1...a_s)) = V^2(a_1...a_s, f) = V^2(a_1...a_s) \cdot ||f''||^2 = \det(G(a_1...a_s)) \cdot d^2(f,U)$. □

1.2.6 Теорема 2

Пусть V – евклидово про-во размерности n, $e_1...e_n$ - нек. ортонормированный базис V, $a_1...a_n$ - нек. система векторов из V, $a_j = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i a_{ij}, a_{ij} \in \mathbb{R}$.
Тогда если $A = (a_{ij})$, то $|\det(A)| = V(a_1...a_s)$.

Доказательство. Имеем $(\det(A))^2 = \det(A^T A) = |\text{матрица } 1| \cdot |\text{матрица } 2| = \det(G(a_1...a_s)) = V^2(a_1....a_s)$. □

1.3 Сопряжённое отображение

1.3.1 Определение

Пусть $A: V \to W$ - линейной отображение эвклидовых пространств. Линейное отображение $A^*: W \to V$ называются сопряжённым с A, если $(Ax, y) = (x, A^* y) \quad \forall x \in V, y \in W$.
Равносильно $(A^* y, x) = (y, Ax) \quad \forall x \in V, y \in W$.

1.3.2 Теорема

Для любого линейного отображения $A: V \to W$ евкл. про-в сопряженное отображение $A^* W \to V$ существует и ровно одно. Если A^e_f - матрица A в паре базисов $e_1...e_n$ для V, $f_1...f_s$ для W, то $(A^*)^f_e = G_e^{-1} \overline{(A^e_f)}^T G_f$, где G_e, G_f - матрицы Грама.
В частности, если $e_1...e_n$ и $f_1...f_s$ - ортонормированный базис, то $(A^*))^f_e = \overline{(A^e_f)}^T$.

1.3.3 Лемма Рисса

Для любой линейной функции $f: V \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ на эвклидовом (эрмитовом) про-ве существует единственный вектор $z(f) =$ так, что $f(x) = (z,x) \forall x \in V$.

Доказательство.

существование) Пусть $e_1...e_n$ - некоторый ОНБ V. Положим $z := \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{f(e_j)} e_j$, тогда для любого $x = \sum\limits_j x_j e_j \in V$ имеем $(z,x) = \sum\limits_j \overline{\overline{f(e_j)}} = \sum\limits_j x_j f(e_j) = f(\sum\limits_j x_j e_j) = f(x)$.

единственность) Пусть $(z', x) = (z, x) \quad \forall x \in V$.
Тогда $(z' - z, x) = 0 \quad \forall x \in V$.
Положим $x := z' - z$. Тогда $(z' - z, z' - z) = 0$, $z' - z = 0$, $z' = z$.

□

Доказательство. Пусть $y \in W$ и $f(x) = (y, Ax)$, $x \in V$. Тогда f - линейная ф-ия на V. По лемме Рисса $\exists! z = z(f) = z(A, y) =: A^* y \in V$, такой, что $(z, x) = f(x) \forall x \in V$, $(A^* y, x) = (y, Ax)$, $\forall x \in V$, $\forall y \in W$.
Ясно, что $A^* : W \to V$
Имеем для y, $y' \in W$, $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) :$ $\quad (A^*(\alpha y + \alpha' y'), x) = (\alpha y + \alpha' y', Ax) = \overline{\alpha}(y, Ax) + \overline{\alpha'}(y', Ax)$...
$A^*(\alpha y + \alpha' y') = \alpha A^* y + \alpha' A^* y'$.
Матрица A^*. Используем равенства $(e_j, A^* f_{)} = (A_{ei}, f_j)$, $\forall i, j$
$A_{ej} = \sum_k f_k a_{kj}$, $A_f^e = (a_{kj})$

□

1.3.4 Верны формулы

$(A^*)^*) = A$
$(A + B)^* = A^* + B^*$
$(AB)^* = B^* \cdot A^*$
$(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$
$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

1.4 Самосопряжённые операторы

1.4.1 Определение

Вещественная (комплексная) матрица A называется симметрической (эрмитовой), если $A^T = A$ (соответственно, $\overline{A}^T = A$).

1.4.2 Теорема

Для линейного оператора A евкл. (эрмит.) про-во V след. утверждения равносильны:

1. $(Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in V$
2. $A^* = A$
3. Матрица A симметрична в любом онб V (?)

1.4.3 Лемма

Пусть $A^* = A$, $U \leq V$, $AU \leq U$, $W = U^\perp$. Тогда:

1. $AW \leq W$
2. ${}^A\backslash_U$, ${}^A\backslash_W$ - самосопр. операторы.

Доказательство.

1. Пусть $u \in U$, $w \in W$. Тогда:
$$(u, AW) = (Au, w) = 0, \forall u \in U$$

   $Aw \perp u, \forall u \in U$
   $Aw \perp U, Aw \in U^{-1} = W$

2. $(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall x, y \in U \subseteq V$ $(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall x, y \in W \subseteq V$

□

1.4.4 Теорема 2

Спект самосопр. оператор - вещественный. По-во отн. самосопр. оператор имеет ОНБ, сост. из с. в. ???.

Доказательство. 1) Спектр
V - эрм, $A : V \to V$ - лин., $A^* = A$
Т.к. $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{C}$, то сущ. $v \in V$: $Av = \lambda v$, $v \neq 0$. Тогда:
$(Av, v) = (v, Av)$
$(\lambda v, v) = (v, \lambda v)$
$\overline{\lambda}(v, v) = \lambda(v, v), \quad (\lambda, \lambda) > 0$

$\overline{\lambda} = \lambda \in \mathbb{R}$
В частности спектр эрм. матрицы - вещ. Т.к. симм. вещ. матрица явл. эрмит, то спектр симмметричной вещественной матрицы – вещественный. Тогда спектр самосопряжённого оператор в евклидовом про-ве тоже вещественный. (где-то исполь. т. 1).
2) ОНБ. Построим индукцией по размерности про-ва
Пусть $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \in \mathbb{R}$, сущ. с.в. $v \neq 0$, $Av = \lambda v$.
Пусть $U =< v >$, $W = U^{\perp}$. Тогда $AU \subseteq U$, $AW \subseteq W$ по лемме, $\dim(W) = n - 1$.
${}^{A}\backslash_{W}$ - самосопр. По инд. предположению существует ОНБ $f_1...f_n$.
для W: $Af_i = \lambda_i f_i$, $i = 2...n$
Положим $f_1 = \frac{v}{||v||}$. Тогда $f_1|f_2...f_n$ - треб. ОНБ V. □

1.4.5 Следствие

Всякая симметричная вещественная матрица ортогонально подобна вещественной диагональной.
Всякая эрмитова унитарно подобна тоже вещественной диагональной.
$A \in M_n(\mathbb{R})$, $A^T = A \Rightarrow \exists Q \in M_n(\mathbb{R})$, $Q^{-1} = Q^T: \quad Q^{-1}AQ = D$ - вещ. диагон.
$A \in M_n(\mathbb{C})$, $A^T = A \Rightarrow \exists Q \in M_n(\mathbb{C})$, $Q^{-1} = Q^T: \quad Q^{-1}AQ = D$ - вещ. диагон.

Доказательство. Пусть A - симметрично вещ. относительно n.
$V = \mathbb{R}^n$ - станд. евкл. про-во, $A : x \to Ax$
Если $e_1...e_n$ - стандартный ортонормированный базис, то $A_e = A$ - симметричная. A - симметричный оператор $\mathbb{R}^n$.
По теореме $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1...\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$
сущ. ОНБ $f_1...f_n$ для $\mathbb{R}^n$: $Af_i = \lambda_i f_i$.
Тогда A_f - диагонмальная матрица с λ по диагонали=: D
$A_f = Q^{-1}A_eQ$, где $Q : e \to f$ - матрица перехода.
Докажем, что Q - ортогональная матрица. Ясно, что $Q = (f_1...f_n)$
$Q^TQ = ((f_i, f_j)) = E$, т.к. базис ортонормированный.
В итоге, $D = A_f = Q^{-1}A_eQ = Q^{-1}AQ$.
Для комплексной матрица - аналогично. □

1.5 Ортогональные и унитарные операторы

1.5.1 Определение

Матрица вещественная (комплексная) A называется ортогональной (унитарной), если $A^{-1} = A^T$ (соответственно $A^{-1} = A^{-T}$).

1.5.2 Теорема 1

Для линейного оператора A евклидово (эрмитова) про-ва V след. утверждения раносильны:

1. $||Ax|| = ||x|| \quad \forall x \in V$
2. $(Ax, Ay) = (x, y) \quad \forall x, y \in V$
3. $A^{-1} = A^*$
4. Матрица A - ортогональна (унитарна) в каждом ОНБ V
5. Матрица A - ортогональна (унитарна) в некотором ОНБ V
6. A - отобр. вс. ОНБ V - ОНБ V
7. A - отобр. нек. ОНБ V - ОНБ V

Такой линейный оператор называетсяч ортогональным (унитарным).

1.5.3 Следствие

Если A - ортогональный(унитарный), то отображение $x \to Ax + b$ - изометрия (сохраняются расстояния между точками):
$||(Ax + b) - (Ay + b)|| = ||A(x - y)|| \stackrel{1}{=} ||x - y|| \quad \forall x, y \in V$.