0.0.1 Торема 10

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad [x]_{\overline{n}} = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k$$

Доказательство. Индукция по n
$[x]_{\overline{n+1}} = [x]_{\overline{n}}(x+n)$
Аналогично Теореме 9 (1.5.4). □

0.0.2 Следствие

$$[x]_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k)x^k$$

0.0.3 Теорема 11: Связь между числам Стирлинга

$$\forall n, m \in N \quad \sum_{k=1}^{n} S(n,k)s(k,m)(-1)^{k-m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} .$$

Доказательство. $x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)[x]_k = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) \sum_{m=1}^{k} s(k,m)(-1)^{k-m}x^m = \sum_{m=1}^{n} x^m \sum_{k=1}^{n} S(n,k)s(k,m)(-1)^{k-m}x^m$
□

1 Разбиение чисел

Разбиение числа n на натуральные слагаемые - это представление n в виде суммы $x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \quad x_i \in \mathbb{Z}_+$

1.1 Упорядоченные разбиния

Если фиксировать k : $\binom{n-1}{k-1}$
Если не фиксировать k : 2^{n-1}

1.2 Нупорядоченные разбиения

$P(n)$ - число неупорядоченных разбиений n на натуральные слагаемые, $P(n,k)$ - на k натуральных слагаемых.
Стандартные формы:
$$\begin{cases} n = x_1 + \ldots + x_k \\ x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_k \geq 1 \end{cases}$$
$P(5) = 7 \quad (4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1)$

1.2.1 Теорема 12:

$\forall n, k \mid 0 < k < n$
$$P(n,k) = \sum_{i=1}^{k} P(n-k, i)$$

Доказательство. $(*) \quad (n-k) = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \ldots + (x_k - 1)$
$y_i = x_i - 1$
$n - k = y_1 + y_2 + \ldots + y_k, \quad y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_k \geq 0$
Если $s : y_s > 0, y_{s+1} = y_{s+2} = \ldots = y_n = 0$, тогда (*) - это разбиение $n-k$ на k слагаемых, которых у нас $P(n-k, s)$.
$$P(n,k) = \sum_{s=1}^{k} P(n-k, s)$$ □

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} P(n,k)$$

1.2.2 Теорема 13

Кол-во разбиений n на различные слагаемые равно кол-ву разбиений n на нечётные слагаемые.

Доказательство. Q_n - мно-во разбиений n на различные слагаемые, T_n - мно-во разбиений на нечётные слагаемые. Докажем, что $|Q_n| = |T_n|$, построим для этого биекцию.
$f : Q_n \to T_n$
$n = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \quad x_1 > x_2 > \ldots > x_k$
$\forall i \quad x_i = x^{t_i} \cdot y_i, \quad y_i$ - нечётно
$n = \underbrace{y_1 + \ldots + y_1}_{2^{t_1}} + \underbrace{y_2 + \ldots + y_2}_{2^{t_2}} + \ldots + \underbrace{y_k + \ldots + y_k}_{2^{t_k}}.$
$h : T_n \to Q_n$
$n = \underbrace{y_1 + \ldots + y_1}_{d_1} + \ldots + \underbrace{y_s + \ldots + y_s}_{d_s}, \quad y_i \neq y_j, i \neq j.$
$\forall i \quad d_i$ - однозначно раскладывается в степени двойки.
$d_i = 2^{\sigma_{i,1}} + 2^{\sigma_{i,2}} + \ldots + 2^{\sigma_{i,m_i}}, \sigma_{i,1} > \sigma i, 2 > \ldots > \sigma_{i,m_i}$
$n = 2^{\sigma_{1,1}} y_1 + 2^{\sigma_{1,2}} y_1 + \ldots + 2^{\sigma_{i,m_i}} + \ldots + 2^{\sigma_{s,1}} y_s + \ldots + 2^{\sigma_{s,m_s}} y_s.$

$h = f^{-1}$ - биекция. □

1.2.3 Пример

$30 = 10 + 7 + 6 + 4 + 3 = 2^1 \cdot 5 + 2^0 \cdot 7 + 2^1 \cdot 3 + 2^2 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1 = 5 + 5 + 7 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3.$

1.2.4 Диаграмма Ферре

Диаграмма Ферре k строчек точек. В i-й строке x_i точек, расположенных в первых x_j столбцах.

1.2.5 Теорема 14

$\forall k, n, \quad 0 < k \leq n:$

1. $P(n, k)$ равно числу разбиений n на натуральные слагаемые, наибольшее из которых равно k.
2. $P(n + k, k)$ равно числу разбиений n на натуральные слагаемые, не превосходящие k.
3. Число разбиений $n - k$ ровно на $m - 1$ слагаемое, не превосходящих k равно числу разбиений $n - m$ на $k - 1$ слагаемое, не превосходящих m.

Доказательство.
1. упражнение
2. упражнение
3. Рассмотрим диаграмму Ферре:

□

1.2.6 Теорема 15

$P_o(n)$ - число разбиений n на чётное число различных слагаемых. (*Прим. Odd - англ. чётный*)
$P_e(n)$ - число разбиений n на нечётное число различных слагаемых. (*Прим. Even - англ. нечётный*)
Теорема: $P_o(n) - P_e(n) = \begin{cases} (-1)^n, & n = \frac{m}{2}(3m \pm 1) \\ 0, & \text{в остальных} \end{cases}$

Доказательство. $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_k \quad, x_1 > x_2 > \ldots > x_k,$
$x = (x_1, \ldots, x_k)\, \alpha(x) = x_k, \quad \beta(x)$ - наибольшее $j, x_j = x_1 - j + 1$ *Example:*

Преобразуем x следующим образом:

1. $\alpha(x) \leq \beta(x)$, тогда отбрасываем x_k и в первых x_k строчках добавляем по дной точке. Получим разбиение на различные слагаемые и чётность числа слагаемых измениться.
2. $\alpha(x) > \beta(x)$, тогда отнимаем в первых $\beta(x)$ строчках по одной точке и строим новую строку длины $\beta(x)$.
   (a) $n = m + (m + 1) + ... + (2m - 1) = \frac{1}{2}m(3m - 1)$
   (b) $n = (m + 1) + (m + 2) + ... + 2m = \frac{1}{2}m(3m - 1)$

$n \neq \frac{1}{2}m(3m \pm 1)$
$\widehat{P_o} = \widehat{P_e}(n)$.

$\square$