# Лекции по дискретке

Зайцев Вадим

2010-02-19

## 1 Рекуррентное соотношение

#### 1.0.1 Примерчик 1

8 дисков разного диаметра, есть 3 колышка. Они выложены на первом в порядке возрастания. Надо переложить с первого колышка на другой. Какого минимальное кол-во перекладываний?
Пусть у нас есть $n$ дисков, $T_n$ - минимальное кол-во перкладываний.
$T_0 = 0 \qquad T_1 = 1 \qquad T_2 = 3$
$T_n \leq 2T_{n-1} + 1 \quad \Rightarrow T_n = 2T_{n-1} + 1$, т.к. чтобы переложить пирамиду высотой $n$, надо переложить пирамиду высотой $n-1$ и потом ещё переложить $n$-ый диск.
А может, $T_n = 2^n - 1$? $T_{n+1} = 2T_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$. Действительно, так.

#### 1.0.2 Небольшое обощение

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \quad a_n = f(a_{n-1}, \dots, a_{n-k}) \quad \forall n \geq k$ Но считать каждое $n$ по порядку долго и требует $O(n)$ времени, поэтому лучше было бы найти волшебную ф-ию $a_n = h(n)$ со временем $O(1)$.

#### 1.0.3 Примерчик 2

$n$ пар скобок. Сколько существует правильных скобочных последовательностей определённой длины?
$C_1 = 1 \quad ()$
$C_2 = 2 \quad (()), ()()$
$C_3 = 5 \quad ()()(), (()), ()(()), (()()), ((()))$
Рассмотрим самую левую скобку: для неё существует пара. И тут должна быть красивая картинка.
$C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} \cdot C_0$.

### 1.1 последовательность чисел Каталана

$\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ - последовательность чисел Каталана.
Пусть $\quad '(' = +1, \quad ')' = -1 \quad b_1, b_2, \dots, b_{2n}, b_i \in \{-1, 1\}$. Получаем сво-ва:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} b_i = 0$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{j} b_i \geq 0 \quad \forall j$

#### 1.1.1 Лемма 11

Пусть $b_1, \dots, b_{2n}$ удоволетворяет 1 и 2. Тогда $\exists!$ правильная скобочная структура с этим кодом.

*Доказательство.* Индукцией по $n$.
$C_n$ - число послед. $b_1, \dots, b_{2n}$ из "+1" и "-1", удовл. 1 и 2.
Удовлетворяют условию 1: $\binom{2n}{n}$
Пусть $W_n$ - мно-во послед., удовлет. 1 и не удовлет. 2. Пусть $\alpha \in W_n$, $\alpha = \alpha_1 - \alpha_{2n}$.

Рассмотрим $\min j : \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{j} \alpha_i = -1$

$\varphi(\alpha) \to -\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{2n}. \in V_n$ - мно-во послед. из -1 и 1 длины $2n$, в которых $n+1$ единиц.

$\beta \in V_n$, $\beta = \beta_1, \dots, \beta_{2n}. \quad \exists \min j \mid \displaystyle\sum_{i=1}^{j} \beta_i = 1. \quad \xi(\beta) \to \beta_1, \beta_2, \dots \beta_{2n} \in W_n.$

$\xi(\varphi(\alpha)) = \alpha$
$\varphi(\xi(\beta)) = \beta$
$|W_n| = |V_n| = \binom{2n}{n+1}$ $\square$

### 1.1.2 Теорема 16

Для последовательности чисел Катална, заданных рекуррентным соотношением
$c_n = c_0 \cdot c_{n-1} + c_1 \cdot c_{n-2} + \ldots + c_{n-1} \cdot c_0$
$n$-ое число Каталана: $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

*Доказательство.*
1 января: 1 пара кроликов. Сколько кроликов через год? $f_n$ - число пар кроликов 1 числа $n$+1-ого месяца.
$f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad f_2 = 2, \quad \ldots \quad f_{12} = ?$
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}. \quad \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$
$\begin{cases} f_0 = 1, f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$ $\square$

## 1.2 Производящие функции

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n = A(t)$ - производящая ф-ия последовательноси $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. $A(t)$ - это как бэ не ф-ия от $t$, мы знаем только что $A(0) = a_0$.

### 1.2.1 Элементарная производящая ф-ия

1. $(1+T)^{\alpha} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{\alpha}{n} t^n$
2. $e^t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n}{n!}$
3. $\ln\left(\dfrac{1}{1-t}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{t^n}{n}$
4. $\sin(t) \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{f^{2n+1}}{(2n+1)!}$
5. $\cos(t) \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{f^{2n}}{(2n)!}$

### 1.2.2 Сво-ва производящих ф-ий

Пусть $A(t)$ и $B(t)$ - производящие ф-ии послед. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ соотвтественно. Тогда:

1. $\alpha A(t) = \beta B(t)$ - производящая ф-ия. $\{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n=0}^{\infty}$.
2. $A(t) \cdot B(t)$ - производ. ф-ия послед. $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}, d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$
3. $t^m A(t)$ - производящ. ф-ия. $\underbrace{0, \ldots, 0}_{m} a_0, a_1, \ldots$
4. $A(ct)$ - про-щая ф-ия послед. $\{c^n a_n\}_{n=0}^{\infty}$
5. $tA'(t)$ - $\{n \cdot a_n\}_{n=0}^{\infty}$
6. $\displaystyle\int_0^t \frac{A(t) - a_0}{t} dt$ - производящая ф-ия послед. $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
7. $\dfrac{A(t)}{1-t}$ - производящая ф-ия послед. $\left\{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\right\}_{n=0}^{\infty}$

### 1.2.3 Лемма 12

$A(t)$ - про-щая ф-ия послед. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, a_0 \neq 0$. Тогда $\exists!$ производящ. ф-ия $B(t)$ послед. $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. $A(t) \cdot B(t) = 1$.

*Доказательство.*
Опред. коэффициент $B(t)$ послед. $b_n = \frac{1}{a_0}$ если определены $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$.
$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$ - неизвестен только $b_n$, который мы можем найти. $\square$

### 1.2.4 Применение производящих ф-ий

**Пример** $(1+t)^n = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \binom{n}{s} t^s$

$(1+t)^m = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \binom{m}{s} t^s$
$(1+t)^{n+m} = (1+t)^n (1+t)^m$
Приравнием коэффициенты при $t^k$:
$\binom{n+m}{k} = \sum\limits_{s=0}^{k} \binom{n}{s} \cdot \binom{m}{k-s}$

**Упражнение** $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \cdot \binom{m}{n-k} (-1)^k = \begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ - нечётно} \\ (-1)^{n/2} \binom{m}{n/2}, \text{ если } n \text{ - чётно} \end{cases}$

### 1.2.5 Лемма 13

Производящая ф-ия для $\{P(n)\}_{n=0}^{\infty}$, $\quad A(t) = \prod\limits_{i=1}^{\infty} (1-t^i)^{-1}$.

*Доказательство.*
$(1-t^i)^{-1} = 1 + t^i + t^{2i} + \ldots$
$A(t) = \prod\limits_{i=1}^{\infty} (1-t^i)^{-1} = \prod\limits_{i=1}^{\infty} (1 + t^i + t^{2i} + \ldots)$
При $t^n$: $\sum\limits_{j_1, \ldots, j_n \geq 0 \backslash n 1 j_1 + 2 j_2 + \ldots + n j_n = n} 1 = P(n)$. $\square$

### 1.2.6 Лемма 14

Производящая ф-ия для $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ есть $C(t) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t}$

*Доказательство.*
$C(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n t^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (C_0 C_{n-1} + \ldots + C_{n-1} C_0) t^n = 1 = t(C(t))^2$
$t \cdot (C(t))^2 - C(t) + 1 = 0$
$C(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t}$
$C(0) = 1$.

$$(1-4t)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4t)^n =$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2) \ldots (-{2n-3}/2)}{n!} (-4t)^n =$$
$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{n!} 2^n t^n =$$
$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} 2t^n$$
$$C(t) \frac{1}{2t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} 2t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} t^n$$
$$c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$
$\square$