Лекции по дискретке

Зайцев Вадим

2010-03-26

0.0.1 Лемма 7

Пусть G - связанный граф, $e \in G$.

1. если e принадлежит некоторому циклу нашего графа, $G - e$ - связан.
2. если e не принадлежит никакому циклу, то граф $G - e$ не связан и имеет две компоненты связанности.

Доказательство.

1. $e = vu \in C$ - цикл. C состоит зи vu и (u, v)-цепи.
   $\forall x, y$ в (x, y)-цепи, содержащей ребро e заменим e на (u, v)-цепь. Получим (x, y)-маршрут, не содержащий e.
   x и y связаны в $G - e \Rightarrow G - e$ - связн.
2. $G - e$ - не связан. v и u в разных компонентах связанности: G_v, G_u.
   $\forall x \neq u \quad \exists (x, y)$-цепь в графе G.
   Если e входило в эту цепь, тогда $x \in G_v$, иначе $x \in G_u$.

□

0.0.2 Теорема 1

$\forall (n, m)$-графа с k компонентами связности верны два неравенства: $n - k \leq l \leq \dfrac{(n-k)(n-k+1)}{2}$, при чём обе оценки достижими.

Доказательство.

верхняя) Пусть G - n-граф с k компонентами связности с максимальным число рёбер. Очевидно, что G - дизъюнктное объединение полных графов ($G = K_{n_1} \cup ... \cup K_{n_k}$). Пусть $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_k$. Покажем, что $n_2 = n_3 = ... = n_k = 1$.
Пусть не так ($n_2 > 1$). Рассмотрим $v \in K_{n_2}$. Рассмотрим граф $G' = (K_{n_1} + v) \cup (K_{n_2} - v) \cup K_{n_3} \cup ... \cup K_{n_k}$ - удалили $n_2 - 1$ рёбёр. Добавили n_1 ребёр. Получили, что в G' добавили больше, чем удалили. Противоречие к предположению в самом начале.
В G у нас $\frac{n-k+1}{2}$ рёбер.

нижняя) Индукция по числу рёбер:
$m = 0$ - всё очевидно, равенство есть.
Пусть $m > 0$ и для всех графов с меньшим число рёбер наше неравенство верно.
Рассмотрим (n, m)-граф G с k комп. связности. Возьмём некоторое $e \in EG$ и безжалостно удалим его: $G_1 = G - e$. G_1 - $(n, m-1)$-граф с k_1 компонентами связности. По лемме 7 имеет, что $k_1 \leq k + 1$. По индукционному предположению $n - k_1 \leq m - 1 \Rightarrow m \geq n - k_1 + 1 \geq n - k + 1 - 1 = n - k$.
Пимер такого графа: $G = O_{k-1} \cup P_{n-k}$.

□

0.0.3 Следствие 2

Пусть G - (n, m)-граф. Если $m > \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$, то G - связный.

Доказательство.
Пусть у G - k компонент связности. Если $k \geq 2$, то по теореме 1 $m \leq \binom{n-k+1}{2} \leq \binom{n-1}{2}$ - противоречие. □

0.0.4 Определение

Пусть $G = (V, E)$ - связен. $d(v, u)$ - длина кратчейшей (v, u)-цепи, положим $d(v, v) = 0$.

1. $d(v, u) \geq 0, \quad d(v, u) = 0 \Leftrightarrow v = u$
2. $d(v, u) = d(u, v)$
3. $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$

$d(u, v)$ - расстояине меджу u и v.
Эксцентриситет вершины v - $e(v) = \max\limits_{n \in VG} d(v, u)$.
Радиус графа G - $r(G) = \min\limits_{v \in VG} e(v)$. **Диаметр** графа G - $d(G) = \max\limits_{v \in VG} e(v)$.
Вершина $v \in VG \mid e(v) = r(G)$ называется **центральной** вершиной. Мно-во всех центральных вершин - **центр графа**.
Вершина $v \in VG \mid e(v) = r(G)$ называется **периферийной** вершиной.

0.1 Двудольные графы

0.1.1 Лемма 8

$\forall G$ - связного, $r(G) \leq d(G) \leq 2 \cdot r(G)$.

0.1.2 Определение

Граф $G = (V, E)$ - двудольный, если $\exists V(\text{разбиение}) = A \cup B \mid \forall e \in G$ концы этого ребра лежат в разных мно-вах.
$K_{n,m}$ - полный двудольный граф $V = A \cup B$, $|A| = n$, $|B| = m$, $\quad E = \{ev \mid u \in A, v \in B\}$.

0.1.3 Теорема 2 (критерий двудольности)

G - двудольнй $\Leftrightarrow$ в G нет циклов нечётной длины.

Доказательство.

$\Rightarrow$) C - цикл в G. $C = v_1 v_2 v_3 v_4 ... v_{e,v}\, e + 1 = v_1$. $V = A \cup B, \quad v_1, v_3, v_5 ... \in A, \quad v_2, v_4, v_6 \in B$, т.е. все нечётные в A, все чётные B.

$\Leftarrow$) По лемме 5 граф - двудольный $\Leftrightarrow$ все его комп. связности - двудольные. Пусть G - связен, $n > 1$, нет циклов нечётной длины. Докажем, что он - двудольный. Рассмотрим $v \in VG$.
$V = A \cup B$: $v \in A$. $d(v, u)$ - чётно, то $u \in A$, $d(v, u)$ - нечётно, то $v \in B$.
Докажем, что в A и в B нет рёбер.
Предположим, что это не так. $e = uw \in EG$, $u, w \in$ одному мно-ву (A или B). По построение $u, w \neq v$. Рассмотрим кратчаяшие цепи: U - кратчайшая $(u, v$-цепь, W - кратчайшая (w, v)-цепь. Длины этих цепей имеют одинаковую чётность. Пусть v_1 - последняя, начиная с v, общая вершина цепей U, W, лежащая на U.
(v, v_1) - подцепи цепей U и W имеют одинаковую длину, поэтому (v_1, u)-подцепь цепи U и (v, w)-подцепь цепи W имеют одинаковую чётность длины. Их объединение с ребром uw даёт цикл нечётной длины. Противоречие. Следовательно, граф является двудольным.

$\square$

0.2 Ориентированный граф

0.2.1 Определения

Орграф - это пара $G = (V, D)$, где V - непустое мно-во, а $D \subseteq V \times V$. Элементы V - вершины, элементы D - дуги.
$(v, u) \in D$. vu - выходит из v и входит в u.
Мультиграф, диаграмма.
Если в мультиграфе убрать все ориентации, то получим некоторый псевдограф, который называется основанием орграфа.
Ормаршрут, орцепь, орцикл (контур).
Вершина v достижима из u, если $\exists$ ориентированная (u, v)-цепь.
Орграф G - сильносвязанный, если любая вершинка достижима из любой другой.
Пуст G - орграф, $v \in VG$. Полустепень исхода v обозначается $\deg^+ v$ - кол-во дуг графа, исходящих из вершины v. Полустепень захода v - $\mathrm{deb}^- v$ - кол-во дуг, входящих в v.

0.2.2 Лемма 9 (Орлемма о рукопожатиях)

$\forall$ орграфа $G = (V, D)$: $\sum\limits_{v \in V} \deg^+ v = \sum\limits_{v \in V} \deg^- v = |D|$.

0.3 Матрицы

Граф G - помеченный, если вершины $\{1, ..., n\}$. Помеченные графы G и H равны $\Leftrightarrow VG = VG$, $EG = EH$.
G - помеченный граф, тогда матрица смежности графа G - это $n \times n$ матрица $A = A(G) = (a_{ij})$, определяемая следующим образом:
$a_{ij} = \begin{cases} 1, & ij \in EG \\ 0 & \end{cases}$.
A - бинарная симметричная матрица с нулевой главой диагональю.
Если у нас мультиграф или псевдо граф, то a_{ij} - это кол-во рёбер, соединяющих i и j, петли отмечаются дважды.
Если G - орграф, то $A(G)$:
$a_{ij} = \begin{cases} 1, & ij \in DC \\ 0 & \end{cases}$.
Матрицы смежности для G - подобны.

0.3.1 Теорема 3

Пусть $A = (a_{ij})_{n \times n}$ - матрица смежности мультиграфа G. Рассмотрим $A^k = (\gamma_{ij})$, $k \in \mathbb{Z}_+$.
Тогда γ_{ij} - число маршрутов из (i, j)-маршрутов длины k.

Доказательство. Индукция по k:
$k = 1$ - очевидно.
Пусть $k > 1$. По индукционному предположению $^{k-1} = (\beta_{ij})_{n \times n}$, где β_{ij} - число (i, j)-маршрутов длины $k - 1$.
$A^k = (\gamma_{ij}) = A^{k-1} \cdot A$. $\gamma_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{n} \beta_{is} a_{sj}$ - число (i, j)-маршрутов длины k. $\square$

0.3.2 Определение ?

Матрица Крихгофа.
$B = B(G) = (b_{ij})_{n \times n}$
$b_{ij} = \begin{cases} -1, & ij \in EG \\ 0, & ij \notin EG, i \neq j \\ \deg(i), & i = j \end{cases}$.