Лекции по дискретке

Зайцев Вадим

2010-04-02

0.0.1 Лемма 10

Алгебрарические дополения всех элементов матриц Кирхгофа равны между собой.

0.0.2 Определение

G - помеченный n-граф, $VG = \{1, ..., n\}$, $EG = \{e_1, ..., e_n\}$.
Матрица инцедентности графа G:
$I = I(G) = (\alpha_{ij})_{n\times m}, \quad \alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{вершина } j \text{ и ребро } e_i \text{ - инцидентны} \\ 0 \end{cases}$

Матрица инцидентности для орграфа G, $\quad VG = \{1, ..., n\}$, $DG = \{e_1, ..., e_m\}$, $\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & e_i \text{ выходит из } j \\ -1, & e_i \text{ входит в } j \\ 0 \end{cases}$

G - ориентируем $\forall$ ребра. Полученный орграф - ориентматрица графа G.

0.0.3 Лемма 11

B - матрица Крихгофа графа G, I - матрица инцидентности некоторая ориентация графа G (нумерация с единицы).
Тогда $B = II^T$.

0.1 Деревья

0.1.1 Определение

Ациклический граф - **лес**. Ациклический связный граф - **дерево**.

0.1.2 Теорема 4 (Характеризация деревьев

(n, m)-граф G. Следующие условия эквивалентны:

1. G - дерево.
2. G - связный, $m = n - 1$
3. G - ациклический, $m = n - 1$
4. В графе G любые 2 вершины связаны одной простой цепью.
5. G - ациклический и добавление одного нового ребра приводит к появлению ровно одного простого цикла.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$) Докажем, что в любом (n, m)-дереве $m = n - 1$. Индукцией по m:
$m = 0 \Rightarrow n = 1$.
Пусть G - произвольное (n, m)-дерево и для всех деревьев с меньшим числом рёбер наше равенство выполняется.
Возбмём некоторое ребро $e \in EG$. e не принадлежит никакому циклу, т.к. в нашем графе их нет $\overset{\text{по лемме 7}}{\Rightarrow}$ в $G - e$ ровно 2 компонентны связности G_1 и G_2 - деревья (n_1, m_1) и (n_2, m_2). По индукционному предположению $m_1 = n_1 - 1$, $m_2 = n_2 - 1$. Тогда для нашего графа имеем $m = m_1 + m_2 + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1$.

$2 \Rightarrow 3$) Пусть в графе G есть цикл, рассмотрим некоторе ребро e из этого цикла $\overset{\text{по лемме 7}}{\Rightarrow}$ $G - e$ - связан. и является $(n, n - 2)$-графом, что противоречит первой теореме.

$3 \Rightarrow 4)$ Докажем, что G - связен. G - ациклический - лес. Каждая компонента связности $G_1, ..., G_k$ - дерево. Т.к. доказано, что из $1 \Rightarrow 2 (\forall i\, G_i)$ - (n,m)-граф, то $m_i = n_i - 1$. $n - 1 = m = m_1 + ... + m_k = n_1 + ... + n_k - k = n - k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$ граф связен $\Rightarrow \forall u, v \quad \exists (u,v)$ - цепь.
Пусть $\exists u, v$ - в G есть две различные (u,v)-простоые цепи L_1 и L_2. Пусть x - последняя вершина общего начала путей L_1 и L_2 начиная с u, y - следующая на цепи $L_1 \Rightarrow G - xy$ - остаётся связным $\overset{\text{по лемме 7}}{\Rightarrow} xy$ принадлежит некоторому циклу $\Rightarrow$ противоречие с ацикличностью.

$4 \Rightarrow 5)$ В любом цикле 2 вершины соединены не менее 2 различными путями $\Rightarrow$ в G нет циклов (чё?). Пусть $u, v \in VG$. $uv \notin EG$, тогда единственная (n,v)-цепь в G вместе с ребром uv даёт единственный цикл

$5 \Rightarrow 1)$ Докажем, что G - связный. От противного: пусть G - не связен. Пусть u и v в разных компонентах связности $\Rightarrow G + uv$ не имеет циклов (по лемме 7).

□

0.1.3 Следствие 3

В любом дереве порядка $n \geq 2$, то в нём имеется не менее 2 висячих вершин. (т.е. вершин степени 1).

Доказательство. G - (n,m)-дерево, $n \geq 2$. Тогда по лемме о рукопожатиях $\sum\limits_{v \in VG} \deg(v) = 2m = 2n - 2 \Rightarrow$ по принципу Дирихле $\exists$ 2 вершины степени 1. □

0.1.4 Теорема 5

Центр любого дерева состоит из одной или двух смежных вершин.

Доказательство.
$n = 1$ - очевидно.
$n = 2$ - аналогично.
Пусть T - дерево порядка $n \geq 2$. Рассмотрим дерево T', которое получается из T удалением всех висячих вершин.
$\forall v \in T' \quad \mathrm{e}_{T'}(v) = \mathrm{e}_T(v) - 1 \Rightarrow$ центра T и T' совпали.
Продолжаем, пока порядок дерева > 2. □

0.1.5 Определение

G - связный. Оставной подрграф графа G, явля-ся деревом, называется, как ни странно, оставным деревом графа G.
Оставной подграф графа G, являющийся дизъюнктным объединением оставным деревьев его компонент связности - **остов** графа G.

0.1.6 Лемма 12

Число рёбер произвольного (n,m)-графа G с k компонентами связности, которое надо удалить, чтобы получить остов нашего графа G не зависит от последовательности удаления и равно $m - n + k$.

0.1.7 Лемма 13

Каждый ациклический подграф графа G содержится в некотором его оставе.

Доказательство. Пусть G связен, H - ациклический подграф графа G. Если H - не остов, то рассмотрим H' - H с добавленными вершинами, не покрытми H, тогда H' - оставный, ациклический. Если H' не является оставным $\Rightarrow$ не связен.
Пусть H_1 - комп. связности графа H. Тогда $\exists u, v \in VG \quad u \in VH_1, v \notin VH_1, uv \in EG$.
Тогда $H' + uv$ - ациклический подграф графа G, имеющий меньшее число компонент связности, чем H'.
Повторяем до тех ор, пока не остаентся одна компонента связности $\Rightarrow$ остов G, содержащий граф H. □

0.1.8 Лемма 14

Если S и T - остовы графа G, то $\forall e_1 \in ES \quad \exists e_2 \in ET : \quad S - e_1 + e_2$ - остов графа G.

Доказательство. Пусть G - связен. Граф $S - e_1$ имеет две компоненты связности A и B. Но T - связен $\Rightarrow \exists$ ребро $e_2 \in ET$ с концами в A и B $S - e_1 + e_2$ - остов G. □

0.1.9 Теорема 6 (Кирхгоф, 1847)

Число ост. деревьев в связном графе G порядка $n \geq 2$ равно алгебраическому дополнению каждого элемента матрицы Кирхгофа $B(G)$.

Доказательство. Доказательства есть, но нам его учить не надо *YAHOO*. □

0.1.10 Следствие 4

При $n > 1$ число остовных деревьев в полном графе K_n равно n^{n-2}.

Доказательство. тут должны быть матрицы, которые мне было лень набирать... □

0.1.11 Теорема 7 (Кэли, 1897)

Число помеченнымх деревьев подрядка $n \geq 2$ равно n^{n-2}.

0.1.12 Определение (Код Прюфера)

Пусть T - помеченное дерево $VT = \{1, ..., n\}$. Сопоставим $a = (a_1, ..., a_{n-1})$:

1. В дереве T находим висячую вершинку v с наименьшим номеров, тогда a_1 - номер вершины, смежной с v. $T_1 = T - v$.
2. $\forall i \quad 2 \leq i \leq n-1 \quad$ в T_{i-1} находим висячую вершинку v_i с наименьшим номеров $\Rightarrow a_i$ - номер её соседа, $T_i = T_{i-1} - v_i$.

Сво-ва a:

1. $a_{n-1} = n$
2. $a_i \in \{a_1, ..., a_n\} \quad \forall i : 1 \leq i \leq n-2$

0.1.13 Теорема 8 (Код Прюфера

Если $a = (a_1, ..., a_n)$, обладает сво-ми 1 и 2, то существует и единственным помеченным деревом T, для каждого a - код Прюфера.

Доказательство. ?
$b_1, b_2, ..., b_{n-1}$
$b_i = \min\{1, 2, ..., n\} \setminus \{b_1, ..., b_{i-1}, a_i, ..., a_{n-1}\}$
$T : \quad VT = \{1, 2, ..., n\} \quad ET = \{a_i b_i \mid i = 1, ..., n-1\}$. □