Лекции по дискретке

Зайцев Вадим

2010-04-16

0.0.1 Лемма 16

Любые 2 блока имеют не более одной общей вершины.

0.0.2 Лемма 17

Если блок содержит вершины и рёбра, то он содержит $\forall(u, v)$ - цепь графа G.

0.0.3 Лемма 18

Если вершина v входит более, чем в один блок графа G, то v - точка сочленения графа G

0.0.4 парам-пам-пам

$B = \{B_1, B_2, B_3\}$ - мно-во всех блоков графа G.
$C = \{c_1, ..., c_l\}$ - мно-во точек сочленения графа G.
$bc(G) = (B \cup C, M) \quad M = \{B_i C_j \mid B_i \in B,\, S \in C,\, C_j \in C,\, C_j \in B_i\}$.

0.0.5 Лемма 19

Если G - связен, то $\mathrm{bc}(G)$ - дерево.

Доказательство. G - связен, то $\mathrm{bc}(G)$ - связен.
Пусть циклов нет, тогда в $\mathrm{bc}(G)$ есть цикл. $C_{j1}, B_{i1}, C_{j2}, B_{j2}, ..., C_{jk}, B_{ik}, C_{j1}$.
B_{j_s} содержит C_j и C_{j_s+1} по лемме 17. B_{js} содержит $(C_{js}, C_{js_1}$ - цепь.
Обощения $\Rightarrow$ цикл в G. Этот цикл содержит по кр. мере 2 вершины из каждого блока $\overset{\text{Лемма 17}}{\Rightarrow}$ весь цикл содержит все вершины из блоков $\Rightarrow$ все блоки содержит 3 общих вершины $\overset{\text{Лемма 16}}{\Rightarrow}$ противоречие. □

0.0.6 Определение

$S \subseteq VG$, S - разделяет несмежные вершины u и v, если в графе $G - S$ вершины u и v принадлежат разным компонентам связности.
Дву (u, v)-цепи не пересекаются, если нет общих вершин, кроме конечных.

0.0.7 Теорема 13 (Менгер, 1927)

Минимальное число вершин, разделяющих две несмежные вершины u и v равно максимальному числу попарно непересекающихся простых (u, v)-цепей.

Доказательство. Наибольшее число попарно непересекающихся простых (u, v)-цепей не больше минимального числа вершин, разделяющих u и v. Докажем, что если наименьшее число вершин, разделяющих u и v в графе G равно k, то существует k попарно непересекающихся простых цепей.
При $k = 1$ - очевидно.
Пусть для некоторого $k > 1$ – неверно. Пусть t – наименьшее такое k. F - граф с наименьшим числом вершин, для которого не выполненено условие (которое после слова "доказать") для t.
Бдем удалять из F рёбра до тех пор, пока не получим некоторый граф G такой, что $\forall e \in EG$ для разделения u и v в графе G надо t вершин, а в графе $G - e$ надо $t - 1$ вершину.
Т.о. имеется G и t такие, что теорема верна для

1. $\forall k < t$.
2. $\forall$ графа с числом вершин, меньшим, чем $|VG|$.
3. $\forall$ графа $G - e\, \forall e \in EG$.

□

0.0.8 Утверждение 1

В гарфе G нет вершин, которые одновременно смежны с u и v.

Доказательство. Пусть w смежно с u и v. Тогда в $G - w$ для разделения u и v достаточно $t - 1$ вершины по пункту 2 в $G - w$ существует $t - 1$ попарно непересекающихся простых (u, v)-цепей. Добавляем цепь $u, w, v \Rightarrow t$ попарно непересекающихся простых (u, v) цепей в графе G. Противоречие с выбором графа G. □

0.0.9 Утверждение 2

Любое мно-во вершин W, разделяющих u и v, $|W| = t$ смежно либо с u, либо с v.

Доказательство. Цепь, соединяющую u с нек...

□