Лекции по дискретке

Зайцев Вадим

2010-04-23

0.0.1 Теорема 14 (Уитни, 1932). Следстиве из предыдущего

Граф G является k-связным $\Leftrightarrow$ любая пара несовпадающих вершин соединены по карйней мере k непересекающимися цепями.

0.1 Независимость и покрытие

Мно-во вершин $W \subseteq VG$ называется **независимым**, если $\forall w, u \in W \quad uw \notin EG$.
Независимое мно-во **тупиковое (максимальное)**, если оно не является собственным подмножеством другого независимого мно-ва.
Независимое мно-во наибольшей мощности - **наибольшее** независимое мно-во. Мощность такого мно-ва называется **числом нзависимости** ($\alpha_0(G)$).

0.1.1 Оценка числа независимости

$\forall G \quad \alpha_0(G) \geq \sum\limits_{v \in VG} (1 + \deg(v))^{-1}$

Доказательство. Пусть $G = K_n$. Тогда $\alpha_0(K_n) = 1$.
$\sum\limits_{v \in VG} n^{-1} = \dfrac{n}{n} = 1$.
Индукция по числу вершин для $G \neq K_n$:
$|VG| \leq 2$ - всё очевидно.
Пусть $|VG| = n \geq 3$, для любого графа с меньшим число вершин теорема верна, $G \neq K_n$.
Выбираем v - вершинка G наименьшей степени. Т.к. $G \neq K_n$, то $x \cup N(x) \neq VG$.
$G' = G - x - N(x)$. По индукционному предположению в G' : $\alpha_0(G') \geq \sum\limits_{v \in VG'} (1 + \deg(v))^{-1}$.
Пусть $M' \subseteq VG'$, M' - независимо в G', $|M'| = \alpha_0(G')$.
$v \cup M'$ - независимо в $G \quad \Rightarrow \quad \alpha_0(G) \geq |x \cup M'| = \alpha_0(G') + 1$.
$\forall v \in VG' \quad \deg_G(v) \geq \deg_{G'}(v)$
$\sum\limits_{v \in VG'} (1 + \deg_{G'} v)^{-1} \geq \sum\limits_{v \in VG'} (1 + \deg_G v)^{-1}$
$\forall v \in N(x) \quad \deg_G(v) \geq \deg_G(x)$
$\sum\limits_{v \in N(x)} (1 + \deg_G(v))^{-1} \leq \sum\limits_{v \in N(x)} (\deg_G(x) + 1)^{-1} = \dfrac{\deg_G(x)}{\deg_G(x) + 1}$
Берём неравенства 1 и 3 строчками выше и подставляем их куда-то в начало:
$\alpha_0(G) \geq 1 + \sum\limits_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} \geq \dfrac{\deg_G(x) + 1}{\deg_G(x) + 1} + \sum\limits_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} = \dfrac{\deg_G(x)}{1 + \deg_G(x)} + (1 + \deg_G(x))^{-1} + \sum\limits_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} \geq \sum\limits_{v} \in N(x)(\deg_G(v) + 1)^{-1} + (1 + \deg_G(x))^{-1} + \sum\limits_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} = \sum\limits_{v \in VG} (1 + \deg_G(v))^{-1}$ $\square$

0.1.2 Следствие 5

Пусть $d = \dfrac{1}{|VG|} \sum\limits_{v \in VG} \deg(v)$. Если $|VG| = n$, то $\alpha_0(G) \geq \frac{n}{1+d}$

Доказательство. С помощью неравенство Коши-Буняковского:
$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{1/2} b_i^{1/2} \geq (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i)^{1/2} + (\sum\limits_{i=1}^{n} b_i)^{1/2}$
$a_i = 1 + \deg(v_i)$
$b_i = (1 + \deg(v_i))^{-1}$

Подставляем, попутно возводя в квадрат: $n^2 \le \sum_{i=1}^{n}(1+\deg(v_i) \cdot \sum_{i=1}^{n}(1+\deg(v_i)^{-1}$

$n \le (d+1)\sum_{i=1}^{n}(1+\deg(v_i))^{-1} \Rightarrow \frac{n}{d+1} \le \alpha(G)$ по т. 15. □

0.1.3 Определение

Вершина покрывет вёбра, инциндентные ей. Мно-во вершин, покрывающих, все рёбра - **покрытие** (вершинное покрытие).
Покрытие W - тупиковое (минимальное), если $\forall V \subset W$, V - не покрытие. Покрытие наименьшей мощности - наименьшее покрытие и его мощность обозначается $\beta_0(G)$ - число покрытия графа G.

0.1.4 Лемма 20

Мно-во U вершин графа G является независимым $\Leftrightarrow VG \setminus U$ - покрытие.

Доказательство. Упражнение □

0.1.5 Теорема 16

Для любого графа G: $\alpha_0(G) + \beta_0(G) = |VG|$.

0.1.6 тра-ля-ля

Подмно-во вершин графа G называется кликой, если все вершины попарно смежные.

0.1.7 Лемма 21

Подмно-в вершин графа G - кликой $\Leftrightarrow$ оно является независимым мно-вом в $\overline{G}$.

0.1.8 Определение

Мно-во попарно несмежных рёбер называется **паросочетанием** (независимым мно-ом рёбер). Тупиковое и наибольшее паросочетнаия определяются аналогично вершинам и обозначается $\alpha_1(G)$.
$\alpha_1(G) = \alpha_0(L(G))$ (по опред. рёберного графа(?))
$\alpha_1(G) \le \frac{|VG|}{2}$

Мно-во рёбер, покрывающих все вершин - рёберное покрытие. Тупиковое и наименьшее рёберное покрытие определяются аналогично. Обозначается $\beta_1(G)$.

0.1.9 Теорема 17 (Галлан, 1959)

Для любого графа G порядка n без изолированных вершин верно $\alpha_1(G) + \beta_1(G) = n$.

Доказательство. Пусть $\alpha_1 = \alpha_1(G)$, $\beta_1 = \beta_1(G)$
Докажем: $\alpha_1 + \beta_1 \le n \quad \alpha_1 + \beta_1 \ge n$

1. Пусть M - наибольшее паросочетание в G. Пусть V' - мно-во вершин, не покрытых M.
   Либо V' - пусто, либо V' - независимое мно-во вершин. Для каждой вершины из V' выберем ребро, инциндентне ей. получаем E'. (если $V' = \varnothing \Rightarrow E' = \varnothing$).
   Поскольку V' - независимо, то $|E'| = |V'| = n - 2 \cdot \alpha_1$.
   $E' \cup M$ - рёберное покрытие $\beta_1 \le |E' \cup M| = |E'| + |M| = n - 2\alpha_1 + \alpha_1 = n - \alpha_1$.

2. Пусть P - наименьшее рёберное покрыти графа G. $G' = G(P)$. В G' нет циклов (собсна, очевидна). Нет даже цепей длины 3 (аналогична). Получаем, что G' - есть.
   Каждая компонента связности графа G' - дерево. Пусть t компонент связности и число рёбер $k_1, k_2, ..., k_t$.
   В каждой компоненте выберем по одному ребру $\Rightarrow$ получим паросочетания M. $|M| = t$.
   Имеем, $t \le \alpha_1$. Получаем, что $n = \sum_{i=1}^{t}(k_i + 1) = t + \sum_{i=1}^{t} k_i = t + \beta_1 \le \alpha_1 + \beta_1$.

□

0.1.10 Определение

Совершенное паросочитание - паросочитание, являющееся рёберным покрытием.

0.1.11 Теорема 18

Мно-во рёбер полного графа K_{2n} разбивается на совершенные паросочитания (1-факторизуем).

Доказательство. $V(K_{2n}) = \{v_0, v_1, ..., v_{2n-1}\} \quad E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_{K_{2n}}$
$E_1 = \{v_i v_{2n-1}\} \cup \{v_{i-j} v_{i+j} \mid j = 1, 2...n\}$
Упр. доказать, что E_i - паросочитание. $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$. □

0.1.12 Теорема 19

Мно-во рёбер графа Q_n разбивается на совершенные паросочитания

Доказательство. Упражнение. □

0.1.13 Лемма 21

Тупиковое рёберное покрытие является - наименьшее $\Leftrightarrow$ оно содержит наибольшее паросочитание.

0.1.14 Лемма 22

Тупиковое паросочитание является наибольшим $\Leftrightarrow$ оно содержится в наименьшем рёберном покрытии.