Лекции по дискретке

Зайцев Вадим

2010-04-30

0.0.1 Лемма 23

Для всякого графа G: $\alpha_1(G) \le \beta_0(G)$

0.0.2 Теорема 20 (Кёниг, 1916)

Для любого двудольного графа G: $\alpha_1(G) = \beta_0(G)$.

Доказательство. Пусть G-граф. Докажем, что $\alpha_1(G) \ge \beta_0(G)$.
Обозначин $\beta_0 = \beta_0(G)$
Удаляем рёбра из G пока не получим некоторый граф G' такой, что $\forall e \in EG' \quad \beta_0(G-e) = \beta_0 - 1$.

Докажем утверждение, что в G' нет смежных рёбер.
Пусть это гон и в $\exists e, g \in EG'$: e и g смежны в G', общая вершина v. В графе $G'-e$ существуют вершин. покрытие $S_e \quad |S_e| = \beta_0 - 1$ и концы ребра e не лежат в S_e.
В графе $G' - g$ существует вершинное покрытие S_g и концы ребра g не принадлежат S_g.
Рассмотрим порождённый подграф графа G': $G'' = G'(\{v\} \cup (S_e \setminus S_g) \cup (S_g \setminus S_e))$
$|S_e \cap S_g| = t \quad |VG''| = 1 + 2(\beta_0 - 1) - 2t$
G'' подграф графа $G \quad \Rightarrow \quad G''$ - двудольный.
Пусть A - меньшая доля графа G. $|A| \le \frac{1}{2}|VG''| = \beta_0 - 1 - t$. A - верш. покрытия графа G''.
Покажем, что $A' = A \cup (S_e \cup S_g)$ - вершинное покрытие графа G'.
Возьмём произвольное ребро. Пусть $h \in EG'$.

1. $h \in \{e, g\}$
   $e, g \in EG'' \Rightarrow e, g$ покрыты мно-ом A, а значит и A'.
2. $h \notin \{e, g\}$
   Тогда h покрывается как S_e, так и S_g.
   (a) $x \in S_g \quad x \in S_e \Rightarrow x \in S_g \cap S_e \Rightarrow$ покр. A'.
   (b) один конец приндалежит $S_e \setminus S_g$, а другой: $S_g \setminus S_e \Rightarrow h \in EG'' \Rightarrow h$ покрывается A.

Следовательно $\beta_0(G') \le |A'| \le |A| + |S_e \cap S_g| \le \beta_0 - 1 - t + t = \beta_0 - 1$ - противоречие с выбором графа G' (противоречие с тем, что существуют 2 смежных ребра).

Граф G' состоит из независимых рёбер. $\beta_0(G') = \alpha_1(G') \quad \beta_0(G) = \beta_0(G') = \alpha_1(G') \le \alpha_1(G)$.
Из леммы 23 следует, что $\beta_0(G) = \alpha_1(G)$. □

0.0.3 Теорема 21 (Кёниг о (0, 1)-матрицах)

Для любой (0, 1)-матриц максимальное число единиц, никакие 2 из которых не стоят в одном столбце и в одной строке, равно минимальному числу строк и столбцов, содержащих все единицы.

Доказательство. Пусть G - двудольный граф, с долями $\{v_1, v_2 ... v_n\}$, $\{u_1 ... u_n\}$. Матрица смежности двудольного графа G:

$$A(G) = (a_{ij}) \mid a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i u_j \in EG \\ 0, & else \end{cases} \quad . \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & A \\ \hline A^T & 0 \\ \hline \end{array}$$

Биекция между двудольным графом с долями мощности n и m и мно-ом (0, 1)-матрица размера $n \times m$.
Максимальное число единиц, никакие две из котрых не стоят в одной строке или столбце равно $\alpha_1(G)$ для соотв. графа G.
Миниальнео число строк и столбцов, содержащих единицы рафно $\beta_0(G)$ соотв. графа G. □

0.0.4 Теорема 22 (Холл, 1935)

Пусть $G = (A, B, E)$ - двудольный граф. В G существует паросочетание, покр. $A \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \subseteq A \quad |N(X)) \geq |X|$

Доказательство.

$\Rightarrow$) Если существет $X \subseteq A: \quad |N(X)| < |X|$, тогда паросоч., покр. X не существует, а знчит нет паросч., поркывающего A.

$\Leftarrow$) Док-во индукцией по числу вершин в доле A:
Если $|A| = 1$ - очевидно верно
Пусть $|A| \geq 2$. Рассмотрим 2 случая:

1. $\forall X \subset A \quad |X| < |N(X)|$
Выберем ребро $uv \in E \quad v \in A, u \in B$.
Рассмотрим новый граф $G' = G - v - u$. Обозначим $A' = A \setminus \{v\}$.
Пусть $X \subseteq A'$. $|X| < |N_G(X)|$, $|N_{G'}(X)| \geq |N_G(X)| - 1$
$|X| < |N_{G'}(X)| + 1 \Rightarrow |X| \leq |N_{G'}| + 1$. По индукционному предположению в графу G' существуют паросчитания, покарывающие $A' \quad \Rightarrow \quad$ объединениям его с ребром $vu \quad \Rightarrow \quad$ получаем паросчитание в G подграфа A.
2. $\exists A' \subset A \quad |A'| = |N(A')|$
Рассмотрим 2 порождённых подграфа:
$G_1 = G(A' \cup N(A')) \quad G_2 = G(VG \setminus (A' \cup N(A')))$ - всё оставшееся
Покажем, что G_1 и G_2 удовлетворяют условиям теоремы.
В G_1: $\forall X \subseteq A' \quad N_G(A) = N_{G'}(X)$
$|X| \leq |N_G(X)| = |N_{G'}(X)| \quad \Rightarrow \quad G_1$ удовлетворяет условию теоремы.
Пусть $X \subseteq A \setminus A'$. Рассмотрим $X \cup A'$ в G.
$|X \cup A'| \leq |N_G(X \cup A')| \leq |N_{G_2}(X)| + |N_G(A')|$
Вспоминаем, что $|A' \cup X| = |X| + |A'|$
$|A'| = |N_G(A')| \quad \Rightarrow \quad |X| \leq |N_{G_2}(X)|$
По индукционному предположению в G_1 существует паросоч., покрывающ. A', в G_2 существует паросоч., покрывающ. $A \setminus A'$. Следовательно, их объединение - искомое паросо., покр. A.

□

0.0.5 Теорема 23 (Фребениус, 1917), теорема о свадьбах

Двудольный граф $G = (A, B, E)$ имеет совершенное паросочетание $\quad \Leftrightarrow \quad |A| = |B|$ и для любого $X \subseteq A \quad |N(X)| \geq |X|$.

0.0.6 Упражнение

1. Вывести теоремы 20 и 22 из теоремы 23.

2. Вывести теорему 20 из 22 и теорему 22 из 20.

0.0.7 Теорема 24 (следствие из теоремы 22)

В любом непустом регулярном двудольном графе существую совершенные паросоч.

0.0.8 Следствие 7

Мно-во рёбер k-регулярного двудольного графа разбивается на k совершенных паросоч.

0.0.9 Следствие 8 (из теоремы 21)

Пусть $G = (A, B, E)$ - двудольный граф, $t \in Z^+$, $t \leq |A|$.
Тогда в графе G существует паросоч. мощности $t \quad \Leftrightarrow \quad \forall X \subseteq A$ верно $|N(X)| \geq |X| + t - |A|$.

Доказательство. $G' = (A, B', E')$, который получается следующим макаром:
$B' = B \cup T \quad |T| = |A| - t$
$E' = E \cup \{uv \mid u \in T, v \in A\}$
В G существует паросоч. мощности $t \quad \Leftrightarrow \quad$ в G' существует паросоч., покр. A по т. 21 $\quad \Leftrightarrow \quad \forall X \subseteq A$
$|X| \leq |N_{G'}(X)| = |N_G(X)| + |A| - t$ □