

Конспект лекций по математическому анализу за II семестр

Лектор: Сергей Фёдорович Кренделев.

По материалам лекций 2004 г.

Под редакцией Таранцовых А., У.

Этот документ распространяется на условия «как есть», без предоставления каких-либо гарантий. Разрешается свободное копирование данного документа в личных целях. По вопросам массового распространения и внесения изменений обращайтесь к авторам.

Оглавление

А Интегрирование

§ 1. Первообразная	4
1.1. Точная первообразная	4
1.2. Обобщённая первообразная	4
1.3. Линейность интегрирования	5
1.4. Неопределённый интеграл	6
1.5. Доказательство существования первообразной	7
§ 2. Неопределённые и определённые интегралы	8
2.1. Методы нахождения неопределённых интегралов	8
2.2. Свойства определённых интегралов	9
2.3. Теорема о замене	11
2.4. Критерий интегрируемости функции на отрезке. Несобственные интегралы	12
2.5. Интегрируемость по Риману	15

В Функциональные ряды и последовательности

§ 3. Функциональные последовательности	20
§ 4. Равномерная сходимость	21
4.1. Введение	21
4.2. Равномерная сходимость и непрерывность	22
§ 5. Приближение многочленами непрерывной функции	25
§ 6. Степенные ряды	27

С Метрические пространства

§ 7. Метрические пространства	30
7.1. Понятие метрики и метрического пространства	30
7.2. Дополнительные свойства метрик	30
7.3. Последовательность	31
§ 8. Компактные множества	33
§ 9. Непрерывность	35
§ 10. Теорема о неподвижной точке	36

Д Функции многих переменных

§ 11. Норма, скалярное произведение и линейные отображения	38
11.1. Обозначения	38
11.2. Норма	38
11.3. Скалярное произведение	38
11.4. Непрерывность	38
11.5. Линейные отображения	39
11.6. Аффинные отображения	40

§ 12. Частные производные	40
12.1. Дифференцируемость функций многих переменных	42
12.2. Достаточные условия дифференцируемости отображения в точке	43
§ 13. Высшие производные	47
§ 14. Формула Тейлора для многочленов	48
§ 15. Экстремумы функций многих переменных	48
§ 16. Квадратичные формы	49
§ 17. Условный экстремум	51
17.1. Аналитические многообразия	51
17.2. Условный экстремум	53

Е Интегралы, зависящие от параметра

§ 18. Дифференцирование интегралов, зависящих от параметров	56
§ 19. Интегрирование по параметру	57
§ 20. Несобственные интегралы, зависящие от параметра	57
§ 21. Эйлеровы интегралы (гамма-, бета-функции)	59

Интегрирование



§ 1. Первообразная • Точная первообразная (4) • Обобщённая первообразная (4) • Линейность интегрирования (5) • Неопределённый интеграл (6) • Доказательство существования первообразной (7) • § 2. Неопределённые и определённые интегралы • Методы нахождения неопределённых интегралов (8) • Свойства определённых интегралов (9) • Теорема о замене (11) • Критерий интегрируемости функции на отрезке. Несобственные интегралы (12) • Интегрируемость по Риману (15)

§ 1. Первообразная

1.1. Точная первообразная

Задача «П»

Пусть на (a, b) задана $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

A-9

Найти $F(r): (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mid F$ непрерывна и дифференцируема для $\forall x \in (a, b); \quad F'(x) = f(x)$.

Определение

точной первообразной

Если F существует для задачи «П», то F называется точной первообразной для f .

A-15

Пример:

отсутствие

точной первообразной

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$
 не имеет точной первообразной на \mathbb{R} .

A-20

► Предположим, что точная первообразная существует на \mathbb{R} и обозначим её через F . Пусть $x > 0$; тогда $F(x) - F(0) = F'(\xi) \cdot x$ (по теореме Лагранжа), где $\xi \in (0, x)$.

A-24

$\implies F(x) - F(0) = f(\xi) \cdot x = x$ (т. к. $f(x) = 1$ из $x > 0$) и $F(x) = x + F(0)$. (1)

A-29

Пусть $x < 0$; повторив рассуждения, получим $F(x) = -x + F(0)$. (2)

A-32

Из (1), (2): $F(x) = |x| + F(0)$, $F(x)$ не является дифференцируемой в точке 0. ◀

A-34

1.2. Обобщённая первообразная

Предположим, что...

$F(x)$ непрерывна на (a, b) ; в некоторых точках $F'(x)$ не существует либо $F'(x) = \pm\infty$.

A-41

	«Выполняется в основном»	Некоторое высказывание $P(x)$ при $x \in A$ выполняется в основном, если множество $E = \{x \mid \neg P(x)\}$ не более чем счётно.	A-46
A-51	«Определена в основном»	f определена в основном на A , если $M \subset A = \{x \mid f(x) \text{ не опр.}\}$ не более чем счётно.	
A-56	«Непрерывна в основном»	f непрерывна в основном на A , если f непрерывна на $M \subset A$, причём $A \setminus M$ не более чем счётно.	
A-61	«Дифференцируема в основном»	f дифференцируема в основном на A , если множество $M \subset A \mid \forall x \in M \exists f'(x)$ обладает свойством: $A \setminus M$ не более чем счётно.	
A-67	Определение первообразной (обобщённой первообразной)	$F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (это означает, что $F(x)$ определена $\forall x \in (a, b)$). $F(x)$ — первообразная для $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, если выполнены следующие условия:	
A-72		(1) F непрерывна на (a, b) ;	
		(2) F дифференцируема в основном на (a, b) ;	
A-74		(3) $F'(x) = f(x)$ в основном.	
A-78	Определение интегрируемой функции	f интегрируема на $\langle a, b \rangle$, если:	
A-79		(1) f определена на $\langle a, b \rangle$;	
		(2) \exists первообразная F на $\langle a, b \rangle$.	
A-83	Пример 1	$f(x) = \operatorname{sgn} x$ интегрируема на \mathbb{R} , причём первообразная $F(x) = x $.	
A-87	Пример 2	$f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x) \cdot \cos x, x \in \mathbb{R}; \quad F(x) = \sin x $.	
A-92	Пример 3 функция Дирихле	$d(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$ Существует ли первообразная?	
A-96		Оставлено в качестве упражнения.	

1.3. Линейность интегрирования

A-101	Лемма о единственности	Пусть f интегрируема на (a, b) , F — первообразная для f на (a, b) . Пусть g определена на (a, b) и $g(x) = f(x)$ в основном. Тогда g интегрируема, F — первообразная для g на (a, b) .	
-------	------------------------	---	--

A-106

- Пусть $E_1 = \{x \in (a, b) \mid f'(x) \text{ не суш.}\}$,
 $E_2 = \{x \in (a, b) \mid f(x) \neq g(x)\}$.

A-110

E_1 счётно, E_2 счётно (по опр.) Значит, $E = E_1 \cup E_2$ счётно; $E \subset (a, b)$.

Пусть $x \in (a, b) \setminus E$, тогда $F'(x) = f(x) = g(x)$, значит $F'(x) = g(x)$ на $(a, b) \setminus E$, следовательно, F — первообразная g . ◀ A-113

Теорема
о линейности

Пусть f, g интегрируемы на (a, b) ; F, G — первообразные для f, g . Тогда $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad h = \lambda f + \mu g$ интегрируема на (a, b) и первообразная для h есть $H = \lambda F + \mu G$. A-119

- Пусть $E_1 = (a, b) \setminus \{x \in (a, b) \mid F'(x) = f(x)\}$,
 $E_2 = (a, b) \setminus \{x \in (a, b) \mid G'(x) = g(x)\}$. A-126

E_1 счётно, E_2 счётно (по опр.) A-130

Значит, $E = E_1 \cup E_2$ счётно; $E \subset (a, b)$.

Пусть $x \in (a, b) \setminus E$, $H' = \lambda F' + \mu G' = \lambda f + \mu g = h$. A-133

H — первообразная. ◀

Теорема
о монотонных
функциях

Пусть $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f непрерывна; f дифференцируема в основном, причём \exists не более, чем счётное $E \subset \langle a, b \rangle \mid \forall x \in$ A-139
 $\in \langle a, b \rangle \setminus E \quad f'_L(x) \geq 0$. Тогда f монотонно возрастает.

(Доказательство на экзамен не нужно, поскольку было приведено в прошлом семестре.) A-146

Следствие 1

Пусть $f'(x) \geq 0$ в основном и f непрерывна, тогда f возрастает. A-150

- (из th о монотонных функциях и определения первообразной). ◀ A-152

Следствие 2

Пусть $f'(x) = 0$ в основнм, тогда $f = \text{const}$. A-158

Следствие 3

Пусть $f(x) = g(x)$ в основном и $f(x), g(x)$ интегрируемы на (a, b) , тогда $F - G = \text{const}$. A-162

1.4. Неопределённый интеграл

Определение

Пусть f интегрируема на (a, b) , $[F(x)]$ — множество всех первообразных f . Тогда A-168

$$\int f(x) dx = [F(x)]$$

— неопределённый интеграл от функции f .

Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на (a, b) , то любая другая первообразная имеет вид $F(x) + C$, $C = \text{const}$. A-174

Следствие

Пусть f интегрируема на (α, β) . Тогда если $F = \left(\begin{smallmatrix} \text{---} \\ \alpha & a & b & \beta \end{smallmatrix} \right)$ первообразная, то $F(b) - F(a)$ не зависит от первообразной. A-193

$$\blacktriangleright F_1(x) = F(x) + C \Rightarrow F_1(b) - F_1(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a). \blacktriangleleft \quad \text{A-194}$$

A-202 **Определение**

Пусть f интегрируема на (a, b) . Введём определённый интеграл:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (\text{формула Ньютона-Лейбница})$$

где F — первообразная для f .

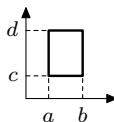
1.5. Доказательство существования первообразнойA-212 **Площадь**

Пусть определено некоторое положительное отображение μ_2 , которое всякому подмножеству \mathbb{R}^2 сопоставляет число из \mathbb{R} — его «площадь». Свойства этого отображения:

$$(1) \quad \mu_2(\square) = |b - a| \cdot |d - c|; \quad (\text{см. рис.})$$

$$(2) \quad S_1 \subset S_2 \Rightarrow \mu_2(S_1) \leq \mu_2(S_2);$$

$$(3) \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset \Rightarrow \mu_2(S_1 \cup S_2) = \mu_2(S_1) + \mu_2(S_2).$$

A-224 **Криволинейная трапеция**

Пусть $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Определим

$$W_f(p, t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (p, t), y \in (0, f(x))\},$$

где $f \geq 0$. $W_f(p, t)$ — криволинейная трапеция.

A-230 **Лемма Ньютона**

Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$, f непрерывна на $[a, b]$. Тогда f обладает точной первообразной $F(x)$ на $[a, b]$, причём $F(x) = \mu_2(W_f(a, x))$.

$$\blacktriangleright \text{Пусть } x_0 \in (a, b). \text{ Тогда } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}) \quad (\text{из непрерывности функции } f \text{ на } (a, b)).$$

$$F(x) - F(x_0) = \mu_2(W_f(a, x)) - \mu_2(W_f(a, x_0)).$$

$$(1) \quad \text{Пусть } x > x_0, \text{ тогда } F(x) - F(x_0) = \mu_2(W_f(x_0, x)).$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2};$$

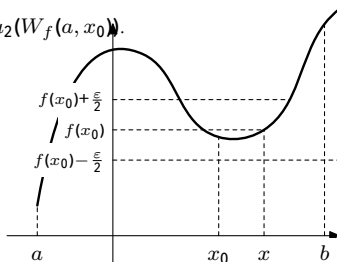
$$(x - x_0)(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}) \leq$$

$$\leq \mu_2(W_f(x_0, x)) \leq$$

$$\leq \mu_2(\square) = (x - x_0)(f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}).$$

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq$$

$$\leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2};$$



A-256

$$\left| \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

A-259

(2) Пусть $x < x_0$ — аналогично, результат такой же.

Переходим к пределу при $x \rightarrow x_0$: $|F'(x_0) - f(x_0)| = 0$. Значит, F — первообразная. ◀ A-261

Следствие

$F(b) - F(a)$, где F — первообразная положительной функции f , является площадью криволинейной трапеции $W_f(a, b)$. A-266

Для произвольных функций

Любую функцию можно представить как разность двух положительных функций: $\varphi = \varphi^+(x) - \varphi^-(x)$. Если φ непрерывна, то φ^+ и φ^- также непрерывны. A-271

§ 2. Неопределённые и определённые интегралы

2.1. Методы нахождения неопределённых интегралов

Элементарные функции

Элементарные функции — это тригонометрические, показательные, логарифмические, полиномы, рациональные функции. A-281

Не имеют элементарных первообразных:

$$\frac{\sin x}{x}, \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}, e^{-x^2}, e^{-\frac{1}{x}}.$$

A-285

Метод 0:
таблица интегралов

Читая таблицу производных «справа налево», можно сразу найти некоторые интегралы. A-290

Метод 1

Пусть $\int f_i(x) dx = F_i(x) + C$. Тогда $\int \lambda_i f_i(x) dx = \sum_i \lambda_i F_i(x) + C$. A-294

Метод 2:
замена переменных

Пусть $[F(x)] = \int f(x) dx$ и $x = \varphi(y)$. Тогда $[F(\varphi(y))] = \int f(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y) dy$. A-299

$$F'(\varphi(y)) = F'_x \cdot \varphi'(y), \quad F'_x(\varphi(y)) = f(\varphi(y)).$$

A-303

Метод 3:
интегрирование по частям

$$(F \cdot G)' = F'G + G'F \implies FG = \int F'G dx + \int G'F dx \implies \int F'G dx = FG - \int FG' dx.$$

A-308

Пример. $\int x^5 e^{2x} dx$ (интегрирование по частям 5 раз) A-312

Метод 4:
алгебраическое интегрирование

По сути является методом неопределённых коэффициентов. Необходимо угадать общий вид ответа, записать его (считая коэффициенты неизвестными), затем продифференцировать, приравнять к подинтегральной функции и найти коэффициенты. A-318

$$\int \sin \alpha x e^{\beta x} dx = e^{\beta x} \cdot (A \sin \alpha x + B \cos \alpha x)$$

A-323

$$\int x^2 e^{2x} dx = e^{2x} (Ax^2 + Bx + C).$$

Метод 5:*дробно-рациональные функции*Пусть P_n, Q_m — многочлены, $n = \deg P_n(x)$, $m = \deg Q_m(x)$. A-331Пусть $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \cdot \int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = ?$ A-335(1) Если $n \geq m$, то $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{R_{m-1}(x)}{Q_m(x)}$, где $S_{n-m}(x)$ — табличный интеграл.(2) Если $n < m$, то $Q_m(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x - \alpha_n)^{k_n} T(x)$

$$\sum_{p=1}^m \sum \int \frac{1}{x-a} dx = \ln |x-a| \ln \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{-1}{(x-a)^{k-1} (k-1)} = \dots$$

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot Q(x) = A_0 (x - x_1)^{r_1} \dots (x - x_n)^{r_n} (x^2 + p_1 x + q_1 x)^{s_1} \dots (x^2 + p_l x + q_l x)^{s_l},$$
 где $r_1 + \dots + r_n + z(s_1 + \dots + s_l) = \deg Q$, x_1, \dots, x_n — вещественные корни уравнения $Q(x) = 0$, причём r_1, \dots, r_n — кратности этих корней; $A_0, p_1, \dots, p_l, q_1, \dots, q_l \in \mathbb{R}$.

$$I_n = \int \frac{dx}{(x+1)^n}.$$

$$I_0 = x, I_1 = \arctg x,$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x+1)^n} = \int \frac{dx (x^2+1)}{(x^2+1)^{n+1}} = \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^{n+1}} + I_{n+1}, \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{x (x^2+1)}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{x}{(x^2+1)^n} - \int \frac{(x^2+1)^{n+1} - x}{\dots} (x^2+1) dx = \frac{1}{2} \frac{x}{(x^2+1)^n} - \\ &- \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1) - 2x^2(n+1)}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \frac{1}{2} \frac{x}{(x^2+1)^n} - \frac{1}{2} I_n + \frac{n+1}{1} \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^{n+1}} \end{aligned}$$

Отсюда I_{n+1} выражается через I_n .**Теорема**

Первообразная для дробно-рациональной функции является элементарной функцией.

2.2. Свойства определённых интегралов**Теорема 1***об интегрируемости на объединении отрезков*Пусть $\Gamma = \langle a, b \rangle$, пусть $c \in (a, b)$. $\Gamma^+ = (c, \infty)$, $\Gamma^- = (-\infty, c)$. Пусть f интегрируема на $\Gamma \cap \Gamma^+$ и интегрируема на $\Gamma \cap \Gamma^-$. Тогда f интегрируема на Γ .► Пусть F_1 — первообразная для f на $\Gamma \cap \Gamma^-$, F_2 — первообразная для f на $\Gamma \cap \Gamma^+$. Построим

$$F = \begin{cases} F_1(x) - F_1(c), & x > c, \\ F_2(x) + F_2(c), & x < c, \\ 0, & x = c. \end{cases}$$

 F непрерывна при $x > c$ и при $x < c$. При $x = c$:

$$\lim_{x \rightarrow c+} F(x) = 0 = F(c), \quad \lim_{x \rightarrow c-} F(x) = 0 = F(c),$$

значит $F(x)$ непрерывна.Пусть E_1 — множество, где $F_1(x)$ не дифференцируема, E_2 — множество, где $F_2(x)$ не дифференцируема. E_1, E_2 не более, чем счётны, а F не дифференцируема на $E_1 \cup E_2 \cup \{0\}$, значит, F — первообразная. ◀

А-396

Теорема 2:
аддитивность
определённого
интеграла

Пусть f, g интегрируемы на $[a, b]$, тогда $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 $h = \lambda f + \mu g$ интегрируема на $[a, b]$, при этом

$$\int_a^b h \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx + \mu \int_a^b g(x) \, dx.$$

- Пусть F, G — первообразные для f, g , тогда $H = \lambda F + \mu G$ — первообразная для h . А-400

$$\int_a^b h \, dx = H(b) - H(a) = \lambda F(b) + \mu G(b) - \lambda F(a) - \mu F(a) = \lambda(F(b) - F(a)) + \mu(G(b) - G(a)) = \lambda \int_a^b f \, dx + \mu \int_a^b g \, dx. \blacktriangleleft$$

А-405

Теорема 3:
ориентируемость
определённого
интеграла

Пусть f интегрируема на $[a, b]$, тогда

А-412

$$\int_a^b f \, dx = - \int_b^a f \, dx.$$

- Пусть F — первообразная. Тогда $\int_a^b f \, dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = - \int_b^a f \, dx. \blacktriangleleft$ А-416

Следствие

$$\int_a^a f \, dx = 0 \text{ (по определению).}$$

А-422

Теорема 4:
монотонность
определённого
интеграла

Пусть f интегрируема на $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$ в основном, тогда $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$.

А-426

- Пусть F — первообразная для $f(x)$, тогда $F'(x) = f(x) \geq 0$ в основном. Значит, согласно уточнённому критерию монотонности, $F(x)$ возрастает. А-430

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a); \text{ если } a > b, \text{ то } F(b) \geq F(a) \text{ (из возрастания) и, следовательно, } F(b) - F(a) \geq 0. \blacktriangleleft$$

А-434

Теорема 4.1

Если хотя бы в одной точке $f(c) > 0$, где $c \in (a, b)$, то $\int_a^b f(x) \, dx > 0$.

А-439

- Пусть c — такая точка, что $f(c) > 0$. Тогда \exists интервал $(\alpha, \beta) \subset [a, b] \mid \forall x \in (\alpha, \beta) f(x) > 0$. А-445

$F(x)$ монотонно возрастает \Rightarrow в окрестности точки c она строго возрастает $\Rightarrow F(\beta) > F(\alpha)$. А-450

$$F(b) \geq F(\beta) > F(\alpha) \geq F(a) \implies F(b) > F(a). \blacktriangleleft$$

А-453

Следствие 1

Пусть f, g интегрируемы на $[a, b]$ и $f(x) \leq g(x)$ в основном на $[a, b]$. Тогда $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$.

А-458

- Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - g(x)$. $h(x) \geq 0$ в основном; применим теорему для $h(x)$. \blacktriangleleft А-461

Следствие 2

Пусть f, g интегрируемы на $[a, b]$. Предположим, что $|f(x)| \leq h(x)$ в основном. Тогда $\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b h(x) \, dx$.

А-466

- По условию $-h(x) \leq f(x) \leq h(x)$ в основном. Согласно следствию 1: A-471

$$-\int_a^b h(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b h(x) dx. \quad \blacktriangleleft$$

A-477 **Следствие 3**

Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, тогда $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

A-481

- Получается из следствия 2, если положить $h(x) = |f(x)|$. ◀

A-487 **Следствие 4**

Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $\exists M \mid \forall x \in [a, b] f(x) \leq M$. Тогда $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M \cdot |b - a|$.

A-491

- $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b M dx = M \int_a^b dx = M \cdot |b - a|$. ◀

A-500 **Теорема 5:**
аддитивность
интегралов по
отрезкам

Пусть f интегрируема на $[a, b]$, $c \in (a, b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

A-503

- Пусть F — первообразная на $[a, b]$, тогда $\int_a^b f dx = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$. ◀

2.3. Теорема о замене

A-512 **Теорема**
о замене переменных
в определённом
интеграле

Пусть f интегрируема на $I = \langle a, b \rangle$, F — первообразная для f на I . Предположим, что φ определена на $J = \langle c, d \rangle$, $\varphi(J) \subset I$ и выполнены следующие условия:

A-517

- (1) φ дифференцируема на $\langle c, d \rangle$ в основном;
(2) множество $\{t \in J \mid \text{при } x = \varphi(t) F \text{ не дифференцируема}\}$ не более чем счётно.

A-521

Тогда функция $(f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)$ интегрируема на J и $(F \circ \varphi)$ — первообразная для неё на J , причём $\forall p, q \in J$ имеет место

$$\int_p^q f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x) dx.$$

A-526

- Т. к. F — первообразная, а φ непрерывна по условию, то $(F \circ \varphi)(t)$ непрерывна на $\langle c, d \rangle$.

A-530

Пусть $E_1 = \{t \in \langle c, d \rangle \mid \varphi \text{ не дифференцируема в } t\}$. По условию теоремы E_1 не более чем счётно.

A-533

Пусть $E_2 = \{t \in \langle c, d \rangle \mid \text{при } x = \varphi(t) F \text{ не дифференцируема}\}$. Согласно условию E_2 не более чем счётно.

A-536

Значит, $E_1 \cup E_2$ не более чем счётно. Пусть $t \in (c, d) \setminus E$. Тогда φ дифференцируема в t , и $(F \circ \varphi)(t)$ также дифференцируема в t . Следовательно, $f(x)$, где $x = \varphi(t)$, дифференцируема в x . Поэтому функция $G(t) = F(\varphi(t))$ дифференцируема в t .

A-541

Применим теорему о дифференцировании суперпозиции:

$$G'(t) = F'_x(x) \cdot \varphi'(t) = F'_x(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Следовательно, равенство $G'(x) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ выполняется в основном. Значит, $G(t)$ является первообразной для $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ на J , а значит, $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ интегрируема на J .

Пусть $p, q \in J$. В силу того, что F — первообразная,

$$\int_p^q f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = G(p) - G(q) = F(\varphi(p)) - F(\varphi(q)) = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x) dx. \blacktriangleleft$$

Следствие

(А) Если φ дифференцируема на (c, d) и монотонна, то φ — взаимнооднозначное отображение, а при взаимнооднозначном отображении счётные множества переходят в счётные. Следовательно, если F дифференцируема в основном, то множество точек $t \mid$ в $x = \varphi(t)$ $F(x)$ не дифференцируема, не более чем счётно.

(Б) $F(x)$ дифференцируема в точном смысле, тогда множество точек $t \mid$ в $x = \varphi(t)$ $F(x)$ не дифференцируема, пусто, а следовательно, счётно.

2.4. Критерий интегрируемости функции на отрезке. Несобственные интегралы

Замечание

Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, тогда $\forall x, x_0 \in [a, b]$ ($x > x_0$) функция $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ — первообразная для f .

Теорема

Пусть f интегрируема на $[a, b]$, тогда чтобы f была интегрируема на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$ существовал. Если он существует, то тогда $\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$. (*)

Замечание 1. (*) — определение несобственного интеграла.

Замечание 2. Аналогично определяется интеграл на $(a, b]$, (a, b) .

► **Необходимость.** Пусть f интегрируема на $[a, b]$, $F(x)$ — первообразная для f на $[a, b]$. Тогда в силу определения первообразной $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Значит, $\exists \lim_{x \rightarrow b} F(x) = F(b)$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow b-} F(x) - F(a) = \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) dt, \\ \lim_{x \rightarrow b-} F(x) - F(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt. \end{cases}$$

Достаточность. Пусть $F(x)$ — первообразная для f на $[a, b]$.

Рассмотрим F_1 такую, что $F_1(x) = F(x)$ на $[a, b)$, а $F_1(b) = \lim_{x \rightarrow b-} F(x) = \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) dt$. Функция $F_1(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а множество точек, где она не дифференцируема, не более чем счётно. $F'(x) = f(x)$ в основном. \blacktriangleleft

Определение

Пусть $f(x)$ интегрируема на (a, b) , $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на (a, b) . Предположим, что существует предел

$$\lim_{x \rightarrow b-} F(x) = K, \quad \lim_{x \rightarrow a+} F(x) = L,$$

тогда $\int_a^b f(x) dx = K - L = F(x) \Big|_{x=a+0}^{x=b-0}$.

Это есть определение интеграла на (a, b) .

Следствие:
интегрирование
по частям для
несобственных
интегралов

Пусть f, g интегрируемы на $\langle a, b \rangle$; F, G — первообразные на $\langle a, b \rangle$ для f, g соответственно.

Тогда если $f \cdot g$ интегрируема на $[a, b]$ и $f \cdot G$ интегрируема на $[a, b]$, $F \cdot g$ интегрируема на $[a, b]$, то имеет место равенство:

$$\int_a^b f \cdot G dx = \left[F(x) \cdot G(x) \right] \Big|_{x=a+}^{x=b-} - \int_a^b F \cdot g dx.$$

Теорема
Коши о существовании
несобственного
интеграла

$\int_a^b f(x) dx$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists c \in [a, b)$ такой, что

$$\forall [\alpha, \beta] \subset [c, b) \quad \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

► **Необходимость.** Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на $[a, b)$, тогда $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ в силу $\exists \lim_{x \rightarrow b-} F(x) = F(b)$.

Поэтому $\forall \varepsilon > 0 \exists c \in [a, b) \mid \forall x \in [c, b)$

$$\left| F(x) - F(b) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим: $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| = \left| \int_a^{\beta} f(x) dx - \int_a^{\alpha} f(x) dx \right| = \left| F(\beta) - F(a) - F(\alpha) + F(a) \right| = \left| F(\beta) - F(\alpha) \right| = \left| F(\beta) - F(b) - F(\alpha) + F(b) \right| \leq \left| F(\beta) - F(b) \right| + \left| F(b) - F(\alpha) \right|.$

Поскольку $[\alpha, \beta] \subset [c, d)$, то $\alpha, \beta \in [c, d)$.

Достаточность. Пусть x_n — пробная последовательность; $x_n \rightarrow b$; $x_n \neq b$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда $\exists c$ такое, что $\forall [\alpha, \beta] \subset [c, b)$

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right| < \varepsilon. \text{ Т. к. } x_n \rightarrow b, \text{ то } \exists \text{ номер } M, \text{ для которого } \forall n > M \quad x_n \in [c, b).$$

Пусть $i, j > M$; x_i, x_j такие, что $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right| = \left| F(\beta) - F(\alpha) \right| < \varepsilon$

$$\implies [\alpha, \beta] = [x_i, x_j]. \quad \left| F(x_i) - F(x_j) \right| < \varepsilon \text{ для } i, j > M.$$

$F(x_n)$ — последовательность Коши, $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = z$.

Поскольку x_n была произвольная, то в силу теоремы Гейне заключаем, что $\exists \lim_{x \rightarrow b-} F(x) = z$. Значит, $\lim_{x \rightarrow b-} F(x) = \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) dt$; следовательно, интеграл существует. ◀

Теорема:
асимптотический
признак несобственной
интегрируемости

Пусть f интегрируема на $[a, b)$. Предположим, что $h(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $h(x) \geq 0$. Если:

(1) $f(x) = O(h(x))$ при $x \rightarrow b$ или

(2) $f(x) = o(h(x))$ при $x \rightarrow b$ или

(3) $f(x) \sim (h(x))$ при $x \rightarrow b$

то $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

- 1. $f(x) = O(h(x))$ при $x \rightarrow b^?$, значит

A-678

$$\exists c \in [a, b) \quad |f|(x) \leq k|h|(x),$$

где $k \in \mathbb{R}$, $x \in [c, b)$.

Т.к. $h(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то

A-683

$$\forall \varepsilon > 0 \exists d \in [c, b) \quad \forall [\alpha, \beta] \subseteq [d, b)$$

имеет место

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx \right| &\leq \frac{\varepsilon}{k}; \\ \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx \leq \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} k|h(x)| dx \leq k \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx = \left| k \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx \right| = k \frac{\varepsilon}{k}. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу критерия Коши для несобственных интегралов получаем, что f интегрируема на $[a, b]$.

2. $f(x) = O(h(x))$, то по свойствам O следует $O(h(x)) = f(x)$.

A-696

3. $f(x) \sim h(x)$, то $f(x) = O(h(x))$. ◀

Лемма:

интегральное
неравенство Абеля

Пусть дан $\int_a^b u(t) v(t) dt$. Предположим, что u дифференцируема на (a, b) , непрерывна на $[a, b]$ и убывает на $[a, b]$. Пусть $\forall x \in (a, b) \quad u'(x) \geq 0$. Предположим, что

A-702

$$\sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x v(t) dt \right| \leq S \in \mathbb{R}.$$

Пусть v интегрируема на $[a, b]$.

Тогда $\int_a^b u(t) v(t) dt \leq u(a) S$. (Неравенство Абеля.)

A-710

- Рассмотрим $J(x) = \int_a^b v(x) dt$. Т.к. v интегрируема, то $J(x)$ — первообразная для $v: J'(x) = v(x)$, $J(a) = 0$.

A-712

$$\begin{aligned} \text{Пусть } c \in [a, b]. \text{ Рассмотрим } \left| \int_a^c u(t) v(t) dt \right| &= \left| \int_a^c u(t) J'(t) dt \right| = \\ &= \left| u(t) J(t) \Big|_{t=a}^{t=c} - \int_a^c u'(t) J(t) dt \right| = \left| u(c) J(c) - u(a) J(a) + \right. \\ &+ \left. \int_a^c (-u'(t)) J(t) dt \right| = \left| u(c) J(c) + \int_a^c -u'(t) J(t) dt \right| \leq \left| u(c) J(c) \right| + \\ &+ \left| \int_a^c -u'(t) J(t) dt \right| = u(c) |J(c)| + \left| \int_a^c -u'(t) J(t) dt \right| \leq u(c) S + \\ &+ \int_a^c | -u'(t) | |J(t)| |dt| \leq u(c) S + S \int_a^c |u'(t)| dt = \dots = S u(a). \end{aligned}$$

A-716

◀

Теорема признак Абе- ля сходимости интеграла

Функция $u(x) v(x)$ интегрируема на $[a, b]$, если выполнены следующие условия:

A-730

- (1) $u(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $u(x) \geq 0$ на $[a, b]$, $u(x)$ дифференцируема на (a, b) , $u(x)$ монотонно убывает, $\lim_{t \rightarrow b_-} u(t) = 0$.

A-733

- (2) $v(x)$ интегрируема на $[a, b]$, её первообразная ограничена на $[a, b]$:

A-736

$$\sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x v(t) dt \right| \leq S \in \mathbb{R}.$$

Тогда $\int_a^b u(x) v(x) dx$ существует.

A-739

► Пусть $\varepsilon > 0$, $S = \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x v(t) dt \right|$.

Т. к. $\lim_{t \rightarrow b-} u(t) = 0$, то $\exists c \in [a, b] \mid u(t) \leq \frac{\varepsilon}{2S}$.

Пусть $[\alpha, \beta] \subseteq [c, b)$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} u(t) v(t) dt \right| &\leq u(\alpha) \sup_{x \in [\alpha, \beta]} \left[\int_{\alpha}^x v(t) dt \right] = \\ &= u(\alpha) \sup_{x \in [\alpha, \beta]} \left[\int_{\alpha}^x v(t) dt - \int_{\alpha}^{\alpha} v(t) dt \right] \leq \\ &\leq u(\alpha) \left[\sup_{x \in [\alpha, \beta]} \left| \int_{\alpha}^x v(t) dt \right| + \sup_{x \in [\alpha, \beta]} \left| \int_{\alpha}^{\alpha} v(t) dt \right| \right] \leq \\ &\leq u(\alpha) \sup_{x \in [\alpha, \beta]} \left[\left| \int_{\alpha}^x v(t) dt \right| + \left| \int_{\alpha}^{\alpha} v(t) dt \right| \right] \leq \\ &\leq u(\alpha) \cdot 2S \leq \frac{\varepsilon}{2S} \cdot 2S \leq \varepsilon. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример

Сходится ли $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$?

► $v(x) = \sin x$, $u(x) = \frac{1}{x}$. ◀

Интегральный признак Коши сходимости числового ряда

Пусть дан $[a, \infty)$, где $a > 0$. Пусть $f(x)$ положительна на \mathbb{C} $[a, \infty)$ и монотонно убывает, причём $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Пусть $a_n = f(n)$. Тогда ряд $\sum a_n$ сходится тогда и только тогда, когда $\int_a^{\infty} f(x) dx$ существует.

► Рассмотрим $u(t) = f(n+1) \forall t \in [n, n+1]$;
 $v(t) = f(n) \forall t \in [nn+1]$.

$$u(t) \leq v(t) \forall t; \quad u(t) \leq f(t) \leq v(t) \forall t.$$

$$\int_a^{\alpha} u(t) dt \leq \int_a^{\alpha} f(t) dt \leq \int_a^{\alpha} v(t) dt.$$

$$\begin{aligned} \int_a^{\alpha} u(t) dt &= \sum_{n=1}^{\alpha} \int_n^{n+1} u(t) dt = \sum \int_n^{n+1} f(n+1) dt = \\ &= \sum \int_n^{n+1} f(n+1) dt = \sum_{n=a}^{\alpha} a_{n+1}. \end{aligned}$$

$$\sum_{n=a}^N a_{n+1} \leq \int_a^N f(t) dt \leq \sum_{n=a}^N a_n.$$

Если ряд сходится, то интеграл существует.

Если ряд расходится, то интеграл не существует. ◀

2.5. Интегрируемость по Риману

Разбиение интервала

Пусть $I = [a, b]$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f определена на всех точках; $f(x) \in M \forall x \in [a, b]$.

Разбиением интервала $[a, b]$ называется набор чисел $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ (разбиение длины n). Обозначение: $\xi = (x_0, x_1, \dots, x_n)$.

Будем говорить, что разбиение *пунктировано*, если указан набор точек $t_i \mid t_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Нормой разбиения ξ назовём $\|\xi\| = \max |x_i - x_{i+1}|$ (длина самого длинного интервала).

A-817

Для \exists пунктированного разбиения ξ определим число

$$R(f, \xi) = \sum_{i=1}^N f(t_i),$$

которое назовём функцией Римана функции f разбиения ξ .

Определение

Будем говорить, что ограниченная функция f на $[a, b]$ интегрируема по Риману, если

$$\exists L \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \forall \xi \quad \|\xi\| < \delta \Rightarrow |R(f, \xi) - L| < \varepsilon.$$

В этом случае L — *интеграл Римана* функции f на $[a, b]$.

Обозначается: $L = \mathbf{R} \int_a^b f(x) dx$.

A-822

Определение R1

Пусть f определена на $[a, b]$, f ограничена. Тогда f называется интегрируемой по Риману, если \exists число L такое, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \mid \quad \|\xi\| < \delta \Rightarrow |R(f, \xi) - L| < \varepsilon,$$

независимо от пунктирования. В этом случае L называется интегралом Римана функции f на $[a, b]$ и обозначается $L =$

$$= \mathbf{R} \int_a^b f(x) dx.$$

A-831

Построение Дарбу

Пусть f определена на $[a, b]$ и ограничена. Значит,

$$\exists m, M \quad \mid \quad \forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M,$$

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Пусть ξ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$.

$$\text{Тогда } m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x)\}; \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x)\}.$$

A-846

$$\Delta x = |x_k - x_{k-1}|.$$

A-851

$$S_\xi = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x \text{ — верхняя интегральная сумма;}$$

A-853

$$s_\xi = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x \text{ — нижняя интегральная сумма;}$$

Факт

$$\forall k \quad m \leq m_k \leq M_k \leq M \implies \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \leq M \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x = M(b-a), \text{ для } \forall \text{ разбиения } \xi \quad S_\xi \leq M(b-a).$$

A-857

$$\text{Аналогично, } \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \geq m \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k = m(b-a) \implies \text{ для } \forall \text{ разбиения } \xi \quad s \geq m(b-a).$$

A-862

$$\text{Значит, для } \forall \text{ разбиения } \xi: \quad m(b-a) \leq s_\xi \leq S_\xi \leq M(b-a).$$

A-865

Определение

Обозначим через $\overline{J} = \inf S_\xi$, где \inf берётся по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$. В этом случае \overline{J} называется *верхним интегралом* и обозначается $\overline{J} = \int_a^b f(x) dx$.

A-870

Определение

Обозначим через $\underline{J} = \sup s_\xi$, где \sup берётся по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$. В этом случае \underline{J} называется

A-876

нижним интегралом и обозначается $\underline{J} = \int_a^b f(x) dx$.

- A-883 **Определение R2:** Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f ограничена. f называется интегрируемой по Риману, если $\overline{J} = \underline{J}$, в этом случае $J = \overline{J} = \underline{J}$ называется интегралом Римана и обозначается $J = \int_a^b f(x) dx$.
- A-890 **Теорема** Определения R1 и R2 эквивалентны, $L = J$. (См. теорему на с. 18.)
- A-895 **Определение 1** Разбиение ξ_1 называется *продолжением* разбиения ξ_2 , если все точки ξ_2 содержится в ξ_1 .
- A-900 **Определение 2** Пусть ξ_1, ξ_2 — пара разбиений. Через $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$ обозначим разбиение, которое содержит точки разбиения ξ_1 , объединённые с точками ξ_2 . В этом случае ξ — *сумма разбиений*.
- A-907 **Лемма 1** Если ξ_1 — продолжение разбиения ξ_2 , то $S_{\xi_1} \leq S_{\xi_2}$ и $s_{\xi_1} \geq s_{\xi_2}$.
- A-911 ► Пусть взяли разбиение ξ_2 , есть слагаемое $M_k \Delta x$. $S_{\xi} = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x$.
- A-915 Поскольку ξ_1 — продолжение разбиения ξ_2 , то в интервале $[x_{k-1}, x_k]$ есть S точек из ξ_2 , тогда для разбиения ξ_2 на $[x_{k-1}, x_k]$.
- A-919
$$\sum_{j=1}^s M_{k_j} \Delta x_j \leq \sum_{j=1}^s M_k \Delta x_j = M_k \cdot \sum_{j=1}^s \Delta x = M_k \Delta x.$$
- A-922 Значит, суммируя по k , получаем: $S_{\xi_1} \leq S_{\xi_2}$.
Для s_{ξ} — аналогично. ◀
- A-927 **Лемма 2** Для \forall пары разбиений ξ_1, ξ_2 имеет место $S_{\xi_1} \geq s_{\xi_2}$.
- A-931 ► Пусть ξ_1, ξ_2 — разбиения. Рассмотрим разбиения $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$. По построению ξ — продолжение ξ_1 и ξ_2 одновременно.
- A-936 Тогда в силу леммы 1 $S_{\xi} \leq S_{\xi_1}$ и $s_{\xi} \geq s_{\xi_2}$. По построению (из факта) $s_{\xi} \leq S_{\xi}$. ◀
- A-941 **Лемма 3** Если f — ограниченная функция, то $\underline{J} \leq \overline{J}$.
- A-944 ► Т. к. для \forall разбиения $s_{\xi_1} \leq S_{\xi_2}$ в силу леммы 2, то $\sup s_{\xi_1}$ по всем ξ_1 . $\underline{J} \leq S_{\xi_2}$ — а теперь \inf по ξ_2 , то $\underline{J} \leq \overline{J}$. ◀
- A-952 **Лемма 4** $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \forall \text{ разбиения } \xi \mid \|\xi\| < \delta:$
$$S_{\xi} \leq \overline{J} + \varepsilon, \quad s_{\xi} \geq \underline{J} - \varepsilon.$$
- A-958 ► Будем считать, что $f(x) \geq 0$. Если это не так, то в силу ограниченности функции $\exists A \mid f(x) + A \geq 0$.
- A-962 По определению точной нижней грани существует разбиение $\xi_0 \mid$
$$S_{\xi_0} \leq \overline{J} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

A-965

Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — точки разбиения ξ_0 . $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

Пусть $\lambda = \frac{\varepsilon}{4n \cdot M}$, пусть ξ — такое разбиение, что $\|\varepsilon\| < \lambda$. Отрезки из разбиения ξ разобьём на 2 класса, причём к первому классу относятся отрезки, которые целиком попадают в интервал $[x_k - \lambda, x_k + \lambda]$.

Тогда $S_\xi = S_\xi^I + S_\xi^{II}$. A-974

$$S_\xi^I \leq \sum M_k \Delta x \leq M \cdot \sum \Delta x \leq M \cdot \sum \frac{\varepsilon}{4nM} \leq M \cdot \frac{2\varepsilon}{4nM} \cdot \sum_{k=1}^n 1 = \frac{M2\varepsilon n}{4nM} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$S_\xi^{II} \leq S_{\xi_0}. \quad \text{A-981}$$

$$S_\xi \leq \overline{J} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \overline{J} + \varepsilon. \quad \blacktriangleleft$$

Теорема Дарбу

$R1$ и $R2$ эквивалентны, если f ограничена и $[a, b] \subset \mathbb{R}$. A-989

► $R2 \rightarrow R1$. Пусть f интегрируема на $[a, b]$ в смысле $R2$. Пусть ξ — разбиение. Должны доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \|\varepsilon\| < \delta$ имеет место $|F(f, \xi) - L| < \varepsilon$. A-993

$$\begin{aligned} \left| \sum_k f(t_k) (x_k - x_{k-1}) - L \right| < \varepsilon &\implies \\ \implies L - \varepsilon < \sum_k f(t_k) (x_k - x_{k-1}) < \varepsilon + L. \end{aligned} \quad \text{A-999}$$

Заметим, что $\forall t_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad m_k \leq f(t_k) \leq M_k$. A-1002

Следовательно, $\sum m_k \Delta x \leq \sum f(t_k) \Delta x \leq \sum M_k \Delta x$.

Из леммы 4 следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$ такое, что A-1007

$$\forall \xi \mid \|\xi\| < \delta \quad \underline{J} - \varepsilon \leq s_\xi \leq S_\xi \leq \overline{J} + \varepsilon.$$

Так как f интегрируема согласно $R2$, $\overline{J} = \underline{J}$. Получаем, что A-1012

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \sum f(t_k) \Delta x - J \right| < \varepsilon$$

. Т.е. функция интегрируема в смысле $R1$ и интегралы совпадают.

$R1 \rightarrow R2$. Выпишем условия интегрируемости по Риману ($R1$): A-1018

$$\forall \xi \mid \|\varepsilon\| < \delta \quad \left| \sum f(t_k) \Delta x - L \right| < \varepsilon.$$

$$L - \varepsilon \leq \sum f(t_k) \Delta x \leq L + \varepsilon \quad \text{A-1024}$$

$$m_k \leq f(t_k) \leq M_k$$

$$\implies \sum f(t_k) \Delta x \leq L + \varepsilon, \sum M_k \Delta x \leq L + \varepsilon, S_\xi < L + \varepsilon, \sum m_k \Delta x \geq L - \varepsilon. \quad \text{A-1028}$$

$$\implies \forall \xi \mid \|\xi\| < \delta \quad L - \varepsilon \leq s_\xi \leq S_\xi \leq L + \varepsilon \quad \text{A-1032}$$

$$\implies f \text{ интегрируется согласно } R2. \quad \blacktriangleleft$$

Теорема

Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Тогда она интегрируема по Риману и интеграл по Риману совпадает с интегралом по Ньюто́ну. A-1040

► Т.к. f непрерывна на $[a, b]$, то она равномерно непрерывна. Значит $\exists \omega(t)$ — модуль непрерывности. A-1044

Пусть ξ_1 — разбиение $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Обозначается A-1048

$$r(\xi) = \int_a^b f(x) dx - R(f, \xi) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(t_k) (x_k - x_{k-1})$$

$$\begin{aligned}
 (t_k \in [x_{k-1}, x_k]) &= \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \sum_k f(t_k) (x_k - x_{k-1}) = \\
 &= \sum_k \left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - f(t_k) (x_k - x_{k-1}) \right] = \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(t_k)] dx.
 \end{aligned}$$

A-1056

$$x \in [x_{k-1}, x_k], \quad |f(x) - f(t_k)| \leq \omega(\|\xi\|).$$

A-1059

$$\Rightarrow \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} x_k [f(x) - f(t_k)] dx \right| \leq \omega(\|\xi\|) (x_k - x_{k-1}).$$

A-1062

$$|r(\xi)| \leq \omega(\|\xi\|) (x_k - x_{k-1}) = \omega(\|\xi\|) \cdot \sum_k (x_k - x_{k-1}) = \omega(\|\xi\|) (b - a).$$

A-1066

Т. к. $\omega(\|\xi\|) \rightarrow 0$ при $\|\xi\| \rightarrow 0$, то

$$\forall \varepsilon \exists \delta \mid \omega(\|\xi\|) \leq b - a \quad \|\xi\| < \delta \Rightarrow |r(\varepsilon)| < \varepsilon,$$

значит функция интегрируема. ◀

Функциональные ряды и последовательности

В

§ 3. Функциональные последовательности • § 4. Равномерная сходимость • Введение (21) • Равномерная сходимость и непрерывность (22) • § 5. Приближение многочленами непрерывной функции • § 6. Степенные ряды

§ 3. Функциональные последовательности

Пусть... Пусть $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ — набор функций. $A \subset \mathbb{R}$ — область определения всех $f_n(x)$ (причём $A \neq \emptyset$). Пусть $x_0 \in A$, тогда $f_n(x)$ сопоставим последовательность $f_n(x_0)$. B-7

Определение $f_n(x)$ *сходится* в точке x_0 , если числовая последовательность $f_n(x_0)$ сходится. B-14

Определение Множество точек сходимости последовательности $f_n(x)$ называется *областью сходимости*. B-19

Определим функцию $f(x)$ Если $S \subset A$, S является областью сходимости, то всякой точке $x \in S$ можно сопоставить число $a = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Так мы определяем функцию $f(x)$ для $\forall x \in S$. B-24

Пример. $f_n(x) = x^n$, $x \in [-1, 1]$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \neq 1. \end{cases}$ B-29

$f_n(x) \rightarrow f(x)$ поточечно, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. B-32

Определение: функциональный ряд (ф. ряд) Выражение вида $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ будем называть *функциональным рядом*. Тогда B-36

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

— частичные суммы ф. ряда.

Определение: сходимость ф. ряда Ф. ряд сходится, если сходится последовательность частичных сумм. Обозначается: $f_n(x) \rightarrow f(x)$. B-41

Обсуждение:
непрерывность $f(x)$

Из непрерывности $f_n(x)$ следует непрерывность $f(x)$?

B-46

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x); \quad \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = f_n(a); \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

B-50

Непрерывность означает, что

B-54

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

B-58

$f_n(x)$ дифференцируема $\implies f(x)$ дифференцируема — неверно!

$f_n(x)$ интегрируема на $[a, b] \implies f(x)$ интегрируема — неверно!

B-65

Пример 1

Пример 2

Пример 3

Пример 4

«Поскิปано до лучших времён»

§ 4. Равномерная сходимость

4.1. Введение

B-75

Определение

Последовательность функций $f_n(x)$ называется *равномерно сходящейся* на множестве $S \subset \mathbb{R}$ к функции $f(x)$, если

$$\forall \varepsilon \exists M \mid \forall n > M \quad \forall x \in S \mid f_n(x) - f(x) \mid < \varepsilon.$$

B-83

Следствие

Если $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на множестве S , то $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ поточечно на S . Обратное неверно.

B-88

Обозначение

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ « $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ ».

B-92

Определение

Функциональный ряд называется *равномерно сходящимся*, если последовательность его частичных сумм равномерно сходится на S .

B-98

Теорема
Коши, условие
равномерной
сходимости

Последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится на $S \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n, m > N \quad \forall x \in S \mid f_n(x) - f_m(x) \mid < \varepsilon. \quad (*)$$

B-102

► (\Rightarrow) . Пусть $f_n(x)$ сходится равномерно. Тогда

$$\exists M \mid \forall n > M \quad \mid f_n(x) - f(x) \mid < \frac{\varepsilon}{2},$$

отсюда $\mid f_n(x) - f_m(x) \mid = \mid f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x) \mid \leq \mid f_n(x) - f(x) \mid + \mid f(x) - f_m(x) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ (при $m > M$), получаем $(*)$.

B-110

(\Leftarrow) . Пусть $(*)$ выполнено, тогда $\forall x \in S$ $f_n(x)$ является последовательностью Коши. Значит, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

B-114

В $(*)$ перейдём к пределу при $m \rightarrow \infty$: $\forall x \in S \mid f_n(x) - f(x) \mid < \varepsilon$, а это и есть определение равномерной сходимости. ◀

В-120 **Теорема:** Пусть $f_n(x) \rightarrow f(x)$ на S . Рассмотрим $M_n = \sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)|$.
признак Вейер-штрассы равномерной сходимости $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $S \iff \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$.

► (\Rightarrow) . $\forall \varepsilon > 0 \exists M \mid \forall n > M \forall x \in S \mid f_n(x) - f(x) \mid < \varepsilon$. В-125

$$M_n = \sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

В-131

Значит, если p сходится, то $\forall \varepsilon > 0 \exists M \mid M_n < \varepsilon \implies \lim M_n = 0$.

(\Leftarrow) . Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$, тогда В-135

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \mid \forall n > M \mid M_n \mid < \varepsilon \implies \sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \blacktriangleleft$$

Пример 5

$$f_n(x) = x^n, \quad S = (0, 1).$$

В-142

$$f_n(x) \rightarrow 0 \text{ на } S.$$

$$M_n = \sup_{x \in S} |x^n - 0| = \sup_{x \in (0, 1)} x^n = 1 \neq 0 \implies f_n \text{ не } \rightrightarrows.$$

В-147

Теорема:
признак Вейер-штрассы для рядов

Пусть дан ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Предположим, что $M_n = \sup_{x \in S} |f_n(x)|$. В-154

Тогда если ряд $\sum M_n$ сходится, то ряд $\sum f_n(x)$ сходится равномерно на S .

► Из признака Коши. ◀ В-160

4.2. Равномерная сходимость и непрерывность

Теорема
о предельном переходе

Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на S . Пусть P — предельная точка множества S . В-165

Обозначим $\lim_{x \rightarrow P} f_n(x) = A_n$. Пусть $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, тогда В-169

$$\lim_{x \rightarrow P} f(x) = A \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow P} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow P} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

► Пусть $\varepsilon > 0$ и $\exists M \mid \forall n, m > M \mid f_n(x) - f_m(x) \mid < \varepsilon$ (из равномерной сходимости). В-175

Поскольку это верно для $\forall x$, то перейдём к $\lim_{x \rightarrow P}$, получим $|A_n - A_m| < \varepsilon$. В-179

$$A_n - \text{последовательность Коши, т. е. } \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A, \quad |f(x) - A| \leq$$

$$\leq |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - A_n + A_n - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|.$$

В-182

Из равномерной сходимости В-187

$$\exists M \mid \forall n > M \forall x \in S \mid f_n(x) - f(x) \mid < \frac{\varepsilon}{3},$$

последовательность $A_n \rightarrow A$. Значит,

$$\exists M_1 \mid \forall n > M_1 \mid A_n - A \mid < \frac{\varepsilon}{3}$$

(т. к. $\lim A_n = A$).

Если выбрать $n > \max\{M, M_1\}$, то $\forall n \exists$ окрестность $V(p) \mid$ В-195

$\forall x \in V \mid f_n(x) - A_n \mid < \frac{\varepsilon}{2}$. Из того, что $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A_n$, следует:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ окрестность } V(p) \mid |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Значит, $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = A$. ◀

В-206 **Следствие**
о непрерывности
предельной функции

Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на S . Тогда если $f_n(x)$ непрерывны на S , то $f(x)$ также непрерывна на S .

В-210

► Из предыдущей теоремы. Непрерывность означает, что $\exists A_n, \exists A$. Получаем требуемое. ◀

В-216 **Пример 5**

$$f_n(x) = x^n; \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & x = 1; \end{cases} \quad f_n \rightrightarrows f \text{ на } [0, 1].$$

В-224 **Теорема**
о равномерной
сходимости и ин-
тегрируемости по
Риману

Пусть f_n интегрируемы по Риману на $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Предположим, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a, b]$. Тогда:

(1) $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$;

$$(2) \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx:$$

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

В-234

► (1). Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta \mid \delta |b - a| < \frac{\varepsilon}{3}$ (*). Тогда в силу равномерной сходимости

$$\exists M \mid \forall n > M \quad \forall x \in [a, b] \quad |f_n(x) - f(x)| < \delta.$$

В-241

Пусть $n > M$. Т.к. $f_n(x)$ интегрируема по Риману, то по теореме Дарбу \exists разбиение $\xi \mid s(\xi, f_n) - S(\xi, f_n) < \frac{\varepsilon}{3}$.

В-245

В силу (*) имеет место $f(x) - \delta < f_n(x) < f(x) + \delta$.

В-252

$$s(\xi, f) - s(\xi, f - f_n + f_n) = s(\xi, f - f_n) + s(\xi, f_n) \leq s(\xi, \delta) + s(\xi, f_n).$$

$$\delta |b - a| + s(\xi, f_n) = s(\xi, f_n) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$s(\xi, f) \leq s(\xi, f_n) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

В-256

$$\text{Аналогично, } S(\xi, f) \geq S(\xi, f_n) - \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$-S(\xi, f) \leq -S(\xi, f_n) + \frac{\varepsilon}{3} \leq s(\xi, f) - S(\xi, f_n) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

В-263

Следовательно, $\forall \varepsilon \exists$ разбиение такое, что «**ничто**» $< \varepsilon$ и, значит, в силу теоремы Дарбу f интегрируема по Риману.

В-267

$$(2). \text{ Рассмотрим } \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)] dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx, \text{ а } n > M, \text{ тогда в силу (*) это } \leq \int_a^b \delta f(x) = \delta |b - a| = \varepsilon.$$

В-274

$$\text{Значит, } \lim \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad \blacktriangleleft$$

В-279 **Замечание**

Условие, что $[a, b]$ ограничен, по существу. Рассмотрим на \mathbb{R} : $f_n(x) = n/(n^2 + x^2)$. $f_n(x) \rightrightarrows 0$.

В-282

$\sup_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = \frac{1}{n}$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, значит в силу теоремы Вейерштрасса $f_n \rightrightarrows 0$.

В-285

$$f_n(x) = (\arctan \frac{x}{n})' \quad \int_{-a}^{\pi} f_n(x) dx = \pi.$$

В-288 Следствие
для рядов

Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно к функции $f(x)$. Предположим, что $f_n(x)$ интегрируема на $[a, b] \subset \mathbb{R}$, тогда:

(1) $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$;

$$(2) \int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

В-293

Теорема
о равномерной
сходимости и
дифференцируемости

Пусть $f_n(x)$ — последовательность дифференцируемых на $[a, b]$ функций. Предположим, что существует точка $x_0 \in (a, b) \mid f_n(x_0)$ сходятся. Если последовательность $f'_n(x) \rightrightarrows$ на $[a, b]$, тогда

(1) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a, b]$;

(2) $\forall x \in [a, b]$ $f(x)$ дифференцируема и $\forall x \in (a, b)$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x)$.

Замечание. В некоторых книжках требуется, чтобы $f'_n(x)$ существовала и была непрерывна.

► Пусть $\varepsilon > 0$, $M \mid \forall n, m > M$ выполнены одновременно два условия:

$$(1) |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$(2) |f'_n(t) - f'_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2|b-a|} \quad \forall t \in (a, b).$$

$$\exists c \in (x, b) \subset ab \mid f_n(x) - f_m(x) - (f_n(t) - f_m(t)) = (f'_n(c) - f'_m(c))(x - t) \mid f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t) = (f'_n(c) - f'_m(c))(x - t) \leq \frac{\varepsilon}{2|b-a|}(x - t) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(**) \quad f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t) \leq \frac{\varepsilon(x-t)}{2|b-a|} |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_m(x) - f_m(x_0) + f_m(x_0)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0) - f_m(x) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies f_n(x) \rightrightarrows f(x), f(x) \text{ непрерывна.}$$

$$\text{Дифференцируемость. } \varphi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \varphi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Предел $\lim_{x \rightarrow t} \varphi_n(t) = f'_n(x)$ существует в силу предпоследней th.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ по первой части теоремы.

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) - \varphi_m(t) &= \left| \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} - \frac{f_m(t) - f_m(x)}{t - x} \right| = \\ &= \frac{|f_n(t) - f_n(x) - f_m(t) + f_m(x)|}{|t - x|} \leq \frac{\varepsilon |x - t|}{2|x - t||b - a|} \implies \\ &\implies \varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x) \text{ на } [a, b] \text{ при } x \neq t. \end{aligned}$$

Используя теорему о предельном переходе: $\lim_{t \rightarrow x} \varphi_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x) \implies$ Т. доказана. ◀

Теорема:
пример Вейер-
штрассы непрерывной
на \mathbb{R} функции,
недифференцируемой
ни в одной точке.

◻ непрерывная на \mathbb{R} функция, недифференцируемая ни в одной точке.

► Определим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Очевидно, $\varphi(2 - x) = \varphi(x)$. Определим

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x).$$

(1) Очевидно, что φ непрерывна. Значит, $\varphi(4^n x)$ также непрерывна.

$$M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \left(\frac{3}{4} \right) \varphi(4^n x) \right| = \left(\frac{3}{4} \right)^n.$$

Ряд $\sum M_n$ сходится, т.к. $\sum \left(\frac{3}{4} \right)^n$ сходится как геометрическая прогрессия. Значит, $f(x)$ непрерывна.

(2) Пусть x — произвольная точка из \mathbb{R} ; m — произвольное число из \mathbb{Z} .

В силу аксиомы Архимеда $\exists k \mid k \leq 4^m x \leq k+1$.

При этом $4^{-m}k \leq x \leq 4^{-m}(k+1)$. Пусть $\alpha_m = 4^{-m}k$, $\beta_m = 4^{-m}(k+1)$, тогда $\alpha_m < \beta_m$ и $\alpha_m \leq x \leq \beta_m \forall m$. При $m \rightarrow \infty$ $|\alpha_m - \beta_m| \rightarrow 0$. $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = x$ $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = x$, $\beta_m - \alpha_m = 4^{-m}$.

$$|\varphi(4^n \alpha_m) - \varphi(4^n \beta_m)| = \begin{cases} 0 & n > m, \\ 1 & n = m, \\ 4^{n-m} & n < m. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(\beta_m) - f(\alpha_m) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n [\varphi(4^n \alpha_m) - \varphi(4^n \beta_m)] = \\ &= \left| \sum_{n=0}^m \left(\frac{3}{4} \right)^n [\varphi(4^n \alpha_m) - \varphi(4^n \beta_m)] \right| \geq \left(\frac{3}{4} \right)^n - \\ &- \sum_{n=0}^{m-1} \left| \left(\frac{3}{4} \right)^n [\varphi(4^n \alpha_m) - \varphi(4^n \beta_m)] \right| = \left(\frac{3}{4} \right)^n - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4} \right)^n 4^{n-m} = \\ &= \left(\frac{3}{4} \right)^n - \frac{1}{4^m} \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = \left(\frac{3}{4} \right)^n - \frac{1}{4^m} \cdot \frac{1-3^m}{1-3} = \left(\frac{3}{4} \right)^n - \frac{1}{4^n} \cdot \frac{3^m-1}{2} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^m. \end{aligned}$$

$$f(\beta_m) - f(\alpha_m) \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^m.$$

$$\left| \frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \right| = \frac{|f(\beta_m) - f(\alpha_m)|}{\beta_m - \alpha_m} = \frac{|f(\beta_m) - f(\alpha_m)|}{4^{-m}} \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3^m}{4^{-m} 4^m} \right) = \frac{1}{2} 3^n.$$

При $m \rightarrow \infty$ предел $\lim_{\beta_m - \alpha_m} \frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m}$ не существует. Предположим, что производная существует, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\alpha_m) - f(x)}{\alpha_m - x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\beta_m) - f(x)}{\beta_m - x} = f'(x).$$

Докажем существование:

$$\frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} = \lambda_n \frac{f(\beta_m) - f(x)}{\beta_m - x} + (1 - \lambda_n) \frac{f(\alpha_m) - f(x)}{\alpha_m - x}. \quad \blacktriangleleft$$

§ 5. Приближение многочленами непрерывной функции

Теорема Вейерштрасса о приближении многочленами непрерывной функции

Предположим, что $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда \exists такая последовательность многочленов $P_n(x)$, что $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a, b]$.

Шаг 1. Упрощения. Будем $[a, b]$ рассматривать как $[0, 1]$. $f(x)$ непрерывна на \mathbb{R} , $f(x)$ равномерно непрерывна на $[0, 1] \implies f(x)$ равномерно непрерывна на \mathbb{R} .

$$\text{Шаг 2. } Q_n(x) = \begin{cases} c_n \cdot (1-x^2)^n, & |x| < 1, \\ Q_n(x) = 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

S -послед-ность.

В-420

$$\int_{-1}^1 Q_n(t) dt = 1, \quad c_n = \frac{1}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx}.$$

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = 2 \int_0^1 (1-x^2)^n dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt = \frac{n! 2^{n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)};$$

В-424

$$2 \int_0^1 (1-x^2)^n dx \geq 2 \int_0^{1/\sqrt{n}} (1-x^2)^n dx \geq 2 \int_0^{1/\sqrt{n}} (1-nx^2)^n dx \quad (\text{из}$$

В-428

$$\text{нер-ва Бернулли}) = 2 \left(x - \frac{nx^3}{3} \right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 2 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{3\sqrt{n}} \right) = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$c_n < \sqrt{n}.$$

В-434

Шаг 3. Пусть $\delta > 0$ произвольно, тогда $\forall \delta > 0 \quad \forall |x| > \delta \quad |x| \leq 1$
 $Q_n(x) \leq \sqrt{nn} (1 - \delta^2)^n.$

$\lim \sqrt{nn} (1 - \delta^2)^n \Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $Q_n \rightrightarrows 0$ на $[-1, -\delta] \cup [\delta, 1].$

В-441

$$\text{Шаг 4. } P_n(x) = \int_{-1}^1 f(x+t) \cdot Q_n(t) dt.$$

В-444

Докажем, что P_n — многочлен. $f(x+t) = 0$ при $x+t > 1$ и при $x+t < 0$. Пусть $t \in [-x, 1-x]$; $P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t) Q(t) dt =$
 $= \int_0^1 f(u) Q_n(u-x) du$, где $x+t = u$, $dt = du$.

В-446

$$Q_n(u-x) = c_n [1 - (u-x)^2]^n = c_n \cdot \sum_l C_n^l (u-x)^{2l} (-1)^l = c_n \cdot$$

В-452

$$\cdot \sum_k x^k f_k(u) \Rightarrow \int_0^1 f(u) Q(u-x) du = \int_0^1 f(u) \sum x^k f_k(u) du =$$

$$= \sum_k x^k \int_0^1 f(u) f_k(u) du = \sum_k \alpha_k x^k \Rightarrow P_n(x) \text{ — многочлен.}$$

Шаг 5. $P_n(x) \rightrightarrows f(x).$

В-460

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда $\exists \delta > 0 \quad | \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (в силу равномерной непрерывности).

$M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \quad M < \infty$ в силу теоремы Вейерштрасса о \max, \min .

В-466

$$\left| P_n(x) - f(x) \right| = \left| \int_{-1}^1 f(x+t) Q_n(t) dt - f(x) \int_{-1}^1 Q_n(t) dt \right| =$$

В-470

$$= \left| \int_{-1}^1 [f(x+t) - f(x)] Q_n(t) dt \right| = \left| \int_{-1}^{-\delta} [f(x+t) - f(x)] Q_n(t) dt + \right.$$

$$\left. + \int_{-\delta}^{\delta} [f(x+t) - f(x)] Q_n(t) dt + \int_{\delta}^1 [f(x+t) - f(x)] Q_n(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{-1}^{-\delta} (\dots) dt \right| + \left| \int_{-\delta}^{\delta} (\dots) dt \right| + \left| \int_{\delta}^1 (\dots) dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{-1}^{-\delta} |\dots| dt + \int_{-\delta}^{\delta} |\dots| dt + \int_{\delta}^1 |\dots| dt$$

$$\int_{-1}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t) dt \leq 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t) dt \leq$$

В-486

$$\leq 2M \int_{-1}^{-\delta} \sqrt{n} (1 - \delta^2)^n dt = 2M \sqrt{n} (1 - \delta^2)^n.$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-1}^1 Q_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

В-491

$$\int_{-1}^{-\delta} |\dots| dt + \int_{-\delta}^{\delta} |\dots| dt + \int_{\delta}^1 |\dots| dt \leq 4M \sqrt{n} (1 - \delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В-496

Поскольку $4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\exists M \mid \forall n > M \quad 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\implies \forall \varepsilon > 0 \exists M \mid \forall n > M \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |P_n(x) - f(x)| < \varepsilon$,
следовательно $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$. ◀

B-514 *Следствие*

Пусть $f(x) = |x|$, $|x| \leq a$. Тогда \exists последовательность $P_n(x) \mid P_n(x) \rightrightarrows |x|$, $P_n(0) = 0$.

§ 6. Степенные ряды

B-521 *Определение*

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ называется степенным рядом, если $f_n(x) = a_n x^n$.
Будем писать $\sum a_n x^n$. Если $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, степенной ряд *центрированный* в точке x_0 .

B-528 *Замечание*

В точке $x = 0$ ряд сходится всегда.

B-532 *Теорема:
первая лемма
Абеля о степенных
рядах*

Если степенной ряд сходится в точке $x_0 \neq 0$, то $\forall x \mid |x| < |x_0|$ ряд $\sum a_n x^n$ сходится абсолютно.
► Пусть ряд сходится, тогда $\sum a_n x_0^n$ сходится. Тогда в силу необходимого признака сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$, значит последовательность $\{a_n x_0^n\}$ ограничена, то есть $\exists M \mid \forall x \mid |a_n x_0^n| \leq M$.

B-544

Рассмотрим ряд $\sum a_n x^n$, $|x| < |x_0|$. Тогда $|a_n x^n| = \left| \frac{a_n x_0^n}{x_0^n} \cdot x_0^n \right| \leq |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$, т. к. $|x| < |x_0|$, то $\left| \frac{x}{x_0} \right| = q < 1$, поэтому ряд $M \sum q^n$ является геометрической прогрессией и сходится.

B-552

По признаку Вейерштрасса ряд $\sum a_n x^n$ сходится абсолютно, значит сходится вообще. ◀

B-557 *Следствие 1*

Если ряд расходится в точке $x_0 \neq 0$, то $\forall x \mid |x| > |x_0|$ ряд расходится.

B-560

► От противного. ◀

B-564 *Следствие 2:
структура области
сходимости*

Для \forall степенного ряда \exists *радиус сходимости* $R \geq 0$ такое, что $\forall x \mid |x| < R$ ряд сходится абсолютно, $\forall x \mid |x| > R$ ряд расходится, а в точке $|x| = R$ может быть и то, и другое.

B-570

Если $R = 0$, то ряд сходится только в точке 0.

Если $R = \infty$, то ряд сходится всюду.

B-575 *Теорема 1
о радиусе сходимости*

Пусть дан ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, тогда $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

B-579

► Пусть $x_0 \neq 0$ — произвольная точка из \mathbb{R} . Применим к ряду $\sum a_n x_0^n$ признак Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x_0^{n+1}|}{|a_n x_0^n|} = |x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

B-583

В-586

Если $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, то $R = \infty$, т. к. сходится всюду.

Если $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, то ряд расходится всюду.

В-589

Если $|x_0| \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, то $|x_0| < 1 / \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$, ряд сходится.

В-592

Если $|x_0| \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, то $|x_0| > R$ и ряд расходится.

В-596

Следовательно, R — радиус сходимости. ◀

В-599

Теорема 2
о радиусе сходимости

Пусть дан ряд $\sum a_n x^n$. Тогда $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

В-604

- ▶ Аналогично, только вместо признака Даламбера применить радиальный признак Коши. ◀

В-607

Теорема:
Вторая лемма
Абеля

Пусть дан ряд $\sum a_n x^n$, $R > 0$. Тогда для \forall интервала $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$ ряд сходится равномерно.

В-611

- ▶ Пусть $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. Тогда $0 < \gamma < R$, значит ряд $\sum a_n \gamma^n$ сходится, причём абсолютно. Тогда $\forall x \in [\alpha, \beta] \quad |a_n x^n| \leq |a_n \gamma^n|$. По признаку Вейерштрасса $\sup_{x \in [\alpha, \beta]} |a_n x^n| \leq |a_n| \gamma^n = M_n$, значит ряд сходится равномерно. ◀

В-616

Следствие

Пусть $S(x) = \sum a_n x^n$, $|x| < R$. Тогда $\forall x \mid |x| < R \quad S(x)$ непрерывна.

В-627

- ▶ $|x| < R \implies \exists [\alpha, \beta] \subset (-R, R) \mid x \in (\alpha, \beta)$. По второй лемме Абеля ряд сходится равномерно на $[\alpha, \beta]$ и по теореме о непрерывности равномерно сходящегося ряда $S(x)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, а т. к. $x \in [\alpha, \beta]$, то в этой точке $S(x)$ непрерывна. ◀

В-631

Теорема
об интегрируе-
мости степенного
ряда

Пусть дан ряд $\sum a_n x^n$, R — радиус сходимости, $R > 0$. Тогда определена функция $S(x) = \sum a_n x^n$ для $\forall x \mid |x| < R$. Тогда $\forall [\alpha, \beta] \subset (-R, R) \quad S(x)$ интегрируема на $[\alpha, \beta]$ и имеет место

В-642

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{n+1} \right).$$

- ▶ Если $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$, то согласно лемме Абеля $S(x)$ непрерывна и ряд сходится к $S(x)$ равномерно на $[\alpha, \beta]$. Функция $a_n x^n$ для $\forall n$ интегрируема на $[\alpha, \beta]$, т. к. она непрерывна и ограничена. Значит, выполнено условие теоремы об интегрируемости ряда. ◀

В-653

В-658

Следствие

Пусть ряд $\sum a_n x^n$ имеет $R > 0$. Тогда ряд из первообразных $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ имеет радиус сходимости не меньше R .

В-664

- ▶ Пусть $x \in (-R, R)$, пусть $r > 0 \mid |x| < r < R$. Тогда $[0, r] \subset (-R, R)$.

В-669

Применим к ряду $\sum a_n x^n$ теорему об интегрируемости ряда на $[0, r]$.

В-673

Тогда $\int_0^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^r r^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{r^{n+1}}{n+1}$ сходится. Зна-

чит, согласно первой теореме Абеля, ряд $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ сходится равномерно для $\forall x \mid |x| < r$.

Поскольку $r < R$ выбиралось произвольно, то радиус сходимости не уменьшается. ◀

Теорема
о дифференци-
руемости степенных
рядов

Пусть $S(x) = \sum a_n x^n$ для $\forall x \mid |x| < R$, радиус сходимости $R > 0$. Тогда:

(1) $S(x)$ дифференцируема на $(-R, R)$;

(2) $\forall x \ S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1}$.

► а) $f_n(x) = a_n x^n$ непрерывна на $(-R, R)$ (очевидно);

б) \exists хотя бы одна точка, где ряд сходится (например, $x = 0$);

в) $f'_n(x) = n x^{n-1} \cdot a_n$ сходится равномерно:

Пусть $r_0, r \mid 0 < r_0 < r < R$ и пусть $x \in (-R, R) \mid |x| < r_0$. Так как ряд $\sum a_n x^n$ сходится для таких x , то это означает, что $\forall x \mid |x| \leq r_0$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} |a_n x^n| = 0$.

Значит, последовательность $|a_n x^n|$ ограничена, в частности,

$$|a_n r_0^n| \leq M.$$

$$\begin{aligned} |f'_n(x)| &= |a_n n x^{n-1}| \leq |a_n| n |x|^{n-1} \leq |a_n| n r_0^{n-1} = \\ &= |a_n| b r^{n-1} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n-1} = |a_n| b r^{n-1} \frac{1}{r} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

$$\frac{r}{r_0} = q, \quad q < 1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) \leq M \sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1}$$

К ряду $\sum n q^{n-1}$ применим признак Даламбера:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{(n+1) q^n}{n q^{n-1}} = q \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}.$$

По признаку Вейерштрасса ряд $\sum f'_n(x)$ сходится равномерно, значит условие (в) выполнено и теорема доказана. ◀

Следствие

Радиус сходимости не уменьшается при дифференцировании, т. к. $r_0 < r < R$ было произвольными.

Следствие

Если есть ряд $\sum a_n x^n$, ряд $\sum a_n n x^{n-1}$ и ряд $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, то у всех рядов одинаковый радиус сходимости.

► Очевидно, через интегрирование и дифференцирование рядов. ◀

Метрические пространства



§ 7. Метрические пространства • Понятие метрики и метрического пространства (30) • Дополнительные свойства метрик (30) • Последовательность (31) • § 8. Компактные множества • § 9. Непрерывность • § 10. Теорема о неподвижной точке

§ 7. Метрические пространства

7.1. Понятие метрики и метрического пространства

Определение

Пусть M — произвольное множество. Отображение $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ называется *метрикой* для M , если выполнены следующие аксиомы:

(1) $\forall x, y \in M \quad \rho(x, y) \geq 0;$ C-13

(2) $\forall x, y \in M \quad \rho(x, y) = 0 \iff x = y;$

(3) $\forall x, y \in M \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность); C-15

(4) $\forall x, y, z \in M \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника).

Пара (M, ρ) называется *метрическим пространством*. C-19

Примеры метрик

(1) $M = \mathbb{R}: \rho(x, y) = |x - y|;$ C-24

(2) $M = \mathbb{R}^n: \rho_1(X, Y) = \max_{i=1}^n |x_i - y_i|$, где $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$;

(3) $M = \mathbb{R}^n: \rho_2(X, Y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$ C-27

Утверждение

Если M — метрическое пространство, то $\forall S \subset M \quad S$ — метрическое пространство. C-32

7.2. Дополнительные свойства метрик

Свойство 1

Пусть $x_1, \dots, x_n \in M$. Тогда $\rho(x_1, x_n) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \dots + \rho(x_{n-1}, x_n)$. C-39

► $n - 1$ раз применяем неравенство треугольника. ◀ C-44

Свойство 2

$\forall x, y, z, u \in M$ имеет место $|\rho(x, y) - \rho(z, u)| \leq \rho(x, z) + \rho(y, u)$. C-48

► Из свойства 1: $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, u) + \rho(u, y)$. C-52

$$\begin{cases} \rho(x, y) - \rho(z, u) \leq \rho(x, z) + \rho(u, y), \\ \rho(z, u) - \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(u, y), \\ \rho(x, y) - \rho(z, u) \geq -(\rho(x, z) + \rho(u, y)). \end{cases} \blacktriangleleft$$

C-60

Свойство 3

$$|\rho(x, y) - \rho(z, y)| \leq \rho(x, z).$$

C-66

C-68

► В свойстве 2 положить $u = y$. \blacktriangleleft

7.3. Последовательность

C-73 Определение

Последовательностью в метрическом пространстве называется любое отображение $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow M$.

C-78 Определение

Будем говорить, что последовательность x_n точек из метрического пространства сходится к элементу $a \in M$, если последовательность $b_n = \rho(x_n, a) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

C-82

Обозначение: $x_n \xrightarrow{\rho} a$.

C-85 Лемма

Если последовательность x_n имеет предел в M , то он единственный.

C-87

► Пусть $x_n \xrightarrow{\rho} p$ и $x_n \xrightarrow{\rho} q$. Рассмотрим расстояние $\rho(p, q) \leq \rho(p, x_n) + \rho(x_n, q)$.

C-92

Т. к. $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(p, x_n) = 0$, то $\exists M_1 \mid \forall n > M_1 \rho(p, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

C-95

Т. к. $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(q, x_n) = 0$, то $\exists M_2 \mid \forall n > M_2 \rho(q, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

C-102

Пусть $M = \max\{M_1, M_2\}$. Тогда $\forall n > M \rho(p, q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\rho(p, q) = 0 \implies p = q$. \blacktriangleleft

C-107 Определение

Последовательность $x_n \subset M$ называется последовательностью Коши, если $\forall \varepsilon > 0 \exists R \mid \forall n, m > R$ имеет место $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

C-112 Лемма

Всякая сходящаяся в M последовательность является последовательностью Коши.

C-116

► $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, y) + \rho(y, x_m)$; т. к. y — предел последовательности x_n ю

C-120

Поскольку последовательность x_n сходится, то $\exists R \mid \forall n > R \rho(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$.

C-123

Если $n > R$ и $m > R$, то $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. \blacktriangleleft

C-129 Определение: специальные множества

$\beta_r(a) = \{x \in M \mid \rho(x, a) < r\}$ — открытый шар радиуса r с центром a ;

C-136

$\bar{\beta}_r(a) = \{x \in M \mid \rho(x, a) \leq r\}$ — закрытый шар радиуса r ;

$S_r(a) = \{x \in M \mid \rho(x, a) = r\}$ — сфера радиуса r .

$\beta_{\frac{1}{n}}(a)$, $n \in \mathbb{N}$ — стандартная сферическая окрестность точки a .

Определение

Будем говорить, что подмножество $S \subset M$ ограничено, если $\exists K \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall x, y \in S \quad \rho(x, y) \leq K$.

$\gamma = \sup_{x, y \in M} \rho(x, y)$ — диаметр множества.

C-140

C-145

Определение

Будем говорить, что $S \subset M$ неограничено, если $\forall K \in \mathbb{N} \quad \exists x, y \in S \mid \rho(x, y) > K$.

C-148

Определение

Пусть $S \subset M$. Будем говорить, что $a \in M$ — предельная точка S , если $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \beta_\varepsilon(a) \mid \beta_\varepsilon(a) \cap (S \setminus \{a\}) \neq \emptyset$.

C-153

Лемма:
характеризация
предельных точек

a является предельной точкой $S \subset M \iff \exists$ последовательность $x_n \subset S \mid \forall n \quad x_n \neq a$ и $x_n \xrightarrow{p} a$.

C-160

► (\Rightarrow). Пусть $\beta_{\frac{1}{n}}(a) \cap (S \setminus \{a\}) \neq \emptyset$. Тогда $x_n \in \beta_{\frac{1}{n}}(a) \cap (S \setminus \{a\})$.

C-165

$\rho(x_n, a) \leq \frac{1}{n} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$.

C-170

(\Leftarrow). Пусть \exists сходящаяся x_n , тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$ при $n \rightarrow \infty$.

C-173

Значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \mid \forall n > K \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon.$$

Т.к. $x_n \in \beta_\varepsilon(a)$, $x_1 \neq a$, то $S \cap \beta_\varepsilon(a) \neq \emptyset$. ◀

Определение

Подмножество $S \subset M$ называют открытым (областью), если

$$\forall a \in S \quad \exists \varepsilon > 0 \mid \beta_\varepsilon(a) \subseteq S.$$

C-182

Следствие

$\beta_r(a)$ открыто.

C-188

Определение

$S \subset M$ называется замкнутым, если $M \setminus S$ открыто.

C-192

Определение

Метрическое пространство M называется полным, если всякая последовательность Коши имеет предел (в M).

C-196

Пример

Пространство \mathbb{R} с метриками $\rho(x, y) = |x - y|$ полно.

C-201

Лемма
о метриках в
 \mathbb{R}^n

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq \sqrt{n} \rho_1(x, y)$.

C-205

► Для $\forall k = 1, \dots, n$ выполняется

C-209

$$|x_k - y_k|^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \implies |x_k - y_k| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Следовательно,

$$\max_{k=1, \dots, n} |x_k - y_k| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n \max_{k=1, \dots, n} (x_i - y_k)^2 = \max_{k=1, \dots, n} (x_k - y_k)^2 \sum_{i=1}^n 1.$$

Значит,

$$\sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{n} \max_{k=1, \dots, n} |x_k - y_k|.$$

C-221

$x_k \subseteq \mathbb{R}^n$ — последовательность Коши относительно ρ_2 :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists S \mid \forall l, m > S \quad \rho_2(x_l, x_m) = \sqrt{\sum (x_{li} - x_{mi})^2} < \varepsilon.$$

Если последовательность x_k сходится к x_0 в \mathbb{R}^n относительно ρ_2 , то это означает, что

$$\forall i \exists \lim_{l \rightarrow \infty} x_{li} = x_{i0}.$$

И наоборот, если

$$\exists \lim_{l \rightarrow \infty} x_{li} = x_{i0},$$

то x_l сходится к x_0 в метрике φ_2 .

C-231

Пусть $x_l \xrightarrow{\rho} x_0$. Тогда

$$\max |x_{kl} - x_{k0}| \leq \rho_2(x_l, x_0) < \varepsilon,$$

начиная с некоторого номера. Значит, $|x_{kl} - x_{k0}| < \varepsilon$. ◀

C-237

Следствие

Пространство \mathbb{R}^n полно относительно ρ_2 .

C-240

- Если x_l — последовательность Коши, то x_{li} также является последовательностью Коши в \mathbb{R} .

C-244

\mathbb{R} полно $\implies \exists$ предел $x_{0i} \forall i = 1, \dots, n$.

(x_{10}, \dots, x_{n0}) — это предел \overline{x}_l относительно метрики ρ_1 , значит наше пространство полно, в силу неравенства это \lim относительно ρ_2 . ◀

§ 8. Компактные множества

C-256

Определение

Пусть M — метрическое пространство, $S \subset M$ называется компактным, если для \forall ограниченной последовательности $x_n \in S$ можно выбрать сходящуюся в S подпоследовательность (\lim сходящейся подпоследовательности принадлежит S).

C-264

Пример

$[a, b] \subset \mathbb{R}$ компактен.

C-268

Лемма

Всякое компактное подмножество метрического пространства M полно.

C-271

- Пусть x_n — последовательность Коши в S . Пусть x_0 — предельная точка. Тогда $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$.

C-276

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда выберем $p, q \mid \rho(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2}$, начиная с некоторого номера.

C-279

Т. к. $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$, то начиная с некоторого номера $\rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\rho(x_n, x_0) \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \implies S \text{ полно. } \blacktriangleleft$$

С-288 Следствие

Компактное множество замкнуто.

С-291

- Пусть x_0 — предельная точка компактного множества S . Тогда шар

$$\beta_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap (S \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset,$$

значит для $\forall n$ можно выбрать

$$x_n \in \beta_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap (S \setminus \{x_0\}).$$

Имеем $x_n \rightarrow x_0$, а т.к. S компактно, то $x_n \in S$, следовательно, S замкнуто. ◀

Лемма

Всякое компактное подмножество $S \subset M$ ограничено.

С-302

- Пусть S не ограничено, $x_0 \in S$. Тогда \exists точка x_1 | $\rho(x_0, x_1) > 1$.

С-305

Тогда по индукции построим x_2, \dots, x_n так, чтобы $\rho(x_{n-1}, x_n) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \rho(x_k, x_{k+1})$.

Это неравенство гарантирует, что точки x_n разные, значит $\forall p, q$ $\rho(x_p, x_q) > 1$ при $p \neq q$.

С-312

Получена последовательность x_1, \dots, x_n , не имеющая предела. Значит, нарушено условие Коши и множество S не компактно. Противоречие. ◀

С-315

Следствие

Если S компактно, то оно замкнуто и ограничено. (Обратное неверно.)

С-321

Определение

Пусть M — метрическое пространство; $S \subset M$, $B \subset M$. Множество B называется ε -сетью множества S , если

С-325

$$\forall x \in S \exists y \in B \quad | \quad \rho(x, y) < \varepsilon,$$

или, по-другому, $S \subset \bigcup_{y \in B} \beta_\varepsilon(y)$.

Теорема

Хаусдорфа о критерии компактности

$S \subset M$ компактно $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists$ конечная ε -сеть U_ε .

С-335

- (\Rightarrow). Пусть S компактно, $\varepsilon > 0$, $x_1 \in S$.

С-339

Тогда выберем для заданного ε множество $U_1 = \{x \mid \rho(x, x_1) < \varepsilon\}$.

Пусть теперь $x_2 \mid x_2 \notin U_1$.

С-345

Тогда выберем множество $U_2 = \{x \mid \rho(x, x_2) < \varepsilon\}$.

Двигаясь по индукции, построим U_1, \dots, U_n, \dots . Если при каком-либо n множество $\langle \langle \dots \rangle \rangle S$, то это ε -сеть.

С-348

Если такого n не существует, то $\forall p, q$ $\rho(x_p, x_q) > \varepsilon$, а значит, x_n не сходится, что противоречит компактности.

С-352

(\Leftarrow). Пусть $\forall \varepsilon$ можно построить ε -сеть. Возьмём точку $x_0 \in S$, $\varepsilon = 1$: $x_1 \mid \rho(x_0, x_2) < 1$; $\varepsilon = \frac{1}{2}$: $x_2 \mid \rho(x_0, x_2) < \frac{1}{2}$; $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$: $x_k \mid \rho(x_0, x_k) < \frac{1}{2^k}$.

С-355

Значит, есть последовательность точек $x_1, \dots, x_n, \dots \subset S$, причём $x_n \xrightarrow{\rho} x_0 \implies$ всё круто! ◀

С-362

Определение

Пусть U_α (где α — индекс) — открытый в M . Будем говорить, что U_α — открытое покрытие множества S , если $S \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

С-367

*Следствие
из теоремы
Хадсфорфа*

S компактно \iff для \forall открытого покрытия множества S можно выбрать конечное подпокрытие. C-373

► $S, x \in S, \forall \varepsilon > 0 \ B_\varepsilon$ открыто, $S \subset \bigcup_{x \in S} B_\varepsilon(x)$. ◀

Следствие

Всякое замкнутое подмножество в \mathbb{R}^n компактно.

► Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, выбирая всевозможные точки с разными координатами (x_1, \dots, x_n) , где $x_i \in \mathbb{Q}$.

Следовательно, предъявлена конечная ε -сеть. ◀

§ 9. Непрерывность

Пусть...

Пусть $(M_1, \rho_1), (M_2, \rho_2)$ — два метрических пространства. Пусть задана $f: M_1 \rightarrow M_2$.

Определение 1

Будем говорить, что f непрерывна в точке p_0 (предельная точка M_1), если для \forall последовательности $p_n \in M_1 \mid p_n \neq p_0, p_n \xrightarrow{\rho_1} p_0$ имеет место $f(p_n) \xrightarrow{\rho_2} f(p_0)$.

Определение 2

Будем говорить, что f непрерывна в p_0 (предельная точка M_1), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \rho_1(x, p_0) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(p_0)) < \varepsilon.$$

*Теорема
Гейне*

Определения 1 и 2 эквивалентны.

► Упражнение. ;-) ◀

Определение

f называется непрерывной на множестве $S \subset M$, если она непрерывна на $\forall p_0 \in S$.

Теорема

Пусть дана $f: M_1 \rightarrow M_2$, f непрерывна на M_1 . Тогда для \forall компактного $S \subset M_1$ множество $f(S) \subset M_2$ компактно.

► Пусть S компактно, $y_1, \dots, y_n, \dots \in f(S)$. Тогда \exists последовательность $x_1, \dots, x_n, \dots \mid f(x_i) = y_i$.

$$x_1, \dots, x_n, \dots \in S, x_{n_k} \xrightarrow{\rho} x_0 \text{ в } S.$$

$$y_{n_k} = f(x_{n_k})$$

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow{\rho} f(x_0) \implies \text{подпоследовательность } y_{n_k} \rightarrow f(x_0) \implies f(S) \text{ компактно. } \blacktriangleleft$$

*Следствие:
теорема Вейер-
штрасса о max и
min*

Пусть дана $f: S \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда, если S компактно, то $\exists p, q \in S \mid \max_{x \in S} f(x) = f(p), \min_{x \in S} f(x) = f(q)$.

► $f: S \rightarrow \mathbb{R} \implies f(S) = [a, b]$.

$$\max_{x \in S} f(x) = b, \min_{x \in S} f(x) = a \implies \exists p, q \text{ с предельными свойствами.}$$

◀

С-457 Теорема

Пусть дана $f: M_1 \rightarrow M_2$, $g: M_2 \rightarrow M_3$. Если f и g непрерывны, то $h = g \circ f$ ($h: M_1 \rightarrow M_3$) также непрерывна.

► «нужно ли док-во, неизвестно, но у меня его нет» ◀

С-462

§ 10. Теорема о неподвижной точке

Определение

Пусть $f: M \rightarrow M$. Будем говорить, что f — сжимающее отображение, если $\forall x, y \in M$ имеет место $\rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y)$, где $q < 1$.

С-467

Пример

$$M = [0, 10], f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{10}, q = \frac{1}{2}.$$

С-474

Определение

Пусть дано $f: M \rightarrow M$. Тогда если $x \in M$ удовлетворяет условию $x = f(x)$ то x называется *неподвижной точкой* отображения f .

С-479

Пример

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2} + 5, x = \frac{x}{2} + 5;$$

$x = 10$ — неподвижная точка.

С-485

Лемма

Всякое сжимаемое отображение непрерывно.

С-491

Теорема
о неподвижной
точке

Пусть M — полное метрическое пространство. Пусть $f: M \rightarrow M$ — сжимающее отображение. Тогда существует единственная неподвижная точка отображения f .

С-495

► Единственность. Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ — две неподвижные точки.

С-500

$$x_1 = f(x_1), x_2 = f(x_2).$$

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(f(x_1), f(x_2)) \leq q\rho(x_1, x_2) \implies (1 - q)\rho(x_1, x_2) \leq 0.$$

Т.к. $q < 1$, то $1 - q > 0$ и $\rho(x_1, x_2) \leq 0$. Но $\rho(x_1, x_2) \geq 0$ по определению метрики. Значит, $\rho(x_1, x_2) = 0$ и $x_1 = x_2$.

С-508

Конструкция. Пусть $x_1 \in M$ — произвольная точка. Построим последовательность x_1, \dots, x_n, \dots по следующему правилу: $x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n)$.

С-512

Пусть $l = \rho(x_1, x_2)$, q — показатель сжатия.

С-516

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+1}) &= \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq q\rho(x_{n-1}, x_n) = \\ &= q\rho(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \leq q\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) = \dots \leq \\ &\leq q^{n-1}\rho(x_1, x_2) = q^{n-1}l. \end{aligned}$$

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq lq^{n-1}.$$

С-523

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+k}) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \rho(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \leq \\ &\leq lq^{n-1} + lq^n + \dots + lq^{n+k-2} = lq^{n-1}(1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1}) = \\ &= lq^{n-1} \cdot \frac{1 - q^k}{1 - q} \leq \frac{lq^{n-1}}{1 - q}. \end{aligned}$$

Т.к. $\rho(x_n, x_{n+k}) \leq \frac{lq^{n-1}}{1 - q}$, то последовательность x_n является последовательностью Коши.

С-531

$$\forall \varepsilon \exists K \quad | \quad \forall n, m > K \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

С-534

Считая, что $m > n$, $\rho(x_n, x_m) \leq \frac{lq^{n-1}}{1-q}$.

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{lq^{n-1}}{1-q} = 0$ (т. к. $0 < q < 1$ и x_n — последовательность Коши), а M полно, то \exists точка $x_0 \in M \mid x_n \xrightarrow{\rho} x_0$. С-539

Учитывая, что $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_{n+1} \xrightarrow{\rho} x_0$, $f(x_0) \rightarrow f(x_0)$, т. к. f непрерывна в силу леммы о непрерывности сжимающего отображения. Значит, $x_0 = f(x_0)$. ◀

Функции многих переменных



§ 11. Норма, скалярное произведение и линейные отображения • Обозначения (38) • Норма (38) • Скалярное произведение (38) • Непрерывность (38) • Линейные отображения (39) • Аффинные отображения (40) • § 12. Частные производные • Дифференцируемость функций многих переменных (42) • Достаточные условия дифференцируемости отображения в точке (43) • § 13. Высшие производные • § 14. Формула Тейлора для многочленов • § 15. Экстремумы функций многих переменных • § 16. Квадратичные формы • § 17. Условный экстремум • Аналитические многообразия (51) • Условный экстремум (53)

§ 11. Норма, скалярное произведение и линейные отображения

11.1. Обозначения

\bar{e}_i	$\bar{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0).$	D-9
	$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n.$	D-12

11.2. Норма

Норма $\ x\ _n$	$\ x\ _n = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i ^2}.$	D-17
-----------------	--	------

Свойства	<p>(1) $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \ x\ \geq 0; \quad \ x\ = 0 \iff \bar{x} = \bar{0};$</p> <p>(2) $\ \lambda \bar{x}\ _n = \lambda \ \bar{x}\ _n;$</p> <p>(3) $\ \bar{x} + \bar{y}\ \leq \ \bar{x}\ + \ \bar{y}\ .$</p>	<p>D-21</p> <p>D-25</p>
----------	---	-------------------------

11.3. Скалярное произведение

Определение	$(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ назовём скалярным произведением.	D-32
-------------	--	------

Свойства	<p>(1) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$ (симметричность);</p> <p>(2) $(\lambda \bar{x} + \mu \bar{z}, \bar{y}) = \lambda (\bar{x}, \bar{y}) + \mu (\bar{z}, \bar{y})$ (линейность);</p> <p>(3) $\bar{x}, \bar{y} \leq \ \bar{x}\ _n \ \bar{y}\ _n$ (следствие нер-ва Коши-Буняковского).</p>	<p>D-37</p> <p>D-39</p>
----------	--	-------------------------

11.4. Непрерывность

Определение

В \mathbb{R}^n с заданной нормой $\|\cdot\|_n$ можно ввести метрику по формуле $\rho(x, y) = \|x - y\|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$. D-47

Определение: непрерывность отображения

Будем говорить, что отображение $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно в точке \bar{x}_0 , если оно непрерывно как отображение метрического пространства $\{\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_n\}$ в $\{\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_m\}$. D-53

11.5. Линейные отображения

D-62 Определение

$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется линейным отображением, если:

D-65 (1) $F(\bar{0}) = \bar{0}$;

(2) $F(\bar{x} + \bar{y}) = F(\bar{x}) + F(\bar{y}) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$;

D-67 (3) $F(\lambda \bar{x}) = \lambda F(\bar{x}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

D-72 Лемма

Пусть даны линейные отображения $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$. Тогда $G \circ F$ — линейное отображение.

D-77 Теорема

Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейное отображение. Тогда существуют векторы $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in \mathbb{R}^m$ такие, что $F(x) = x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n$, причём $\bar{a}_i = F(\bar{e}_i)$, $\bar{e}_i \in \mathbb{R}^n$.

D-83 В частности, если составить таблицу $\{\bar{a}_i\}$, то она будет матрицей линейного отображения.

D-87 Определение

Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейное отображение. Тогда норма линейного отображения $\|F\| = \sup_{\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \|\bar{x}\|_n = 1} \|F(\bar{x})\|_m$.

D-93 Теорема

$\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n \quad \|F(\bar{x})\|_m \leq \|F\| \cdot \|\bar{x}\|_n$.

D-97 ► Если $\bar{x} = \bar{0}$, неравенство очевидно.

Пусть $\bar{x} \neq \bar{0}$, $\bar{y} = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|_n}$. Из свойств нормы очевидно, что $\|\bar{y}\|_n = 1$.

D-104 Тогда $\|F\| \geq \|F(\bar{y})\|_m$ (из св-ва \sup) = $\left\| F\left(\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|_n}\right) \right\|_m = \|F(\bar{x})\|_m \cdot \frac{1}{\|\bar{x}\|_n}$.

D-109 $\|F\| \cdot \|\bar{x}\|_n \geq \|F(\bar{x})\|_m$. ◀

D-114 Следствие

Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, предположим что $\|F\| = q < 1$, тогда отображение F — сжимающее.

D-117 ► $\rho \left(F(\bar{x}_1), F(\bar{x}_2) \right) = \|F(\bar{x}_1) - F(\bar{x}_2)\|_m = \|F(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\|_m \leq \|F\| \cdot \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|_n = q \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|_n = q \rho(x_1, x_2)$. ◀

- D-127 **Теорема**
об оценке норм
линейного отображе-
ния
- $$\|F(x)\|_m \leq M \cdot \|x\|_n, \text{ где } M = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2};$$
- $$\|F\| \leq M.$$
- D-132
- $$\begin{aligned} \blacktriangleright \|F(x)\|_m &= \|\bar{a}_1 x_1 + \dots + \bar{a}_n x_n\|_m \leq \|x_1\| \cdot \|a_1\|_m + \dots + \|x_n\| \cdot \|a_n\|_m \leq \\ &\leq \sqrt{\sum |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \|a_i\|_m^2} \text{ (в силу неравенства Коши-Буняковского)} \\ &= \|\bar{x}\|_n \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \|a_i\|_m^2} = \|\bar{x}\|_n \cdot M. \blacktriangleleft \end{aligned}$$
- Теорема**
о непрерывно-
сти линейного
отображения
- Всякое линейное отображение $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$. D-144
- \blacktriangleright Пусть $\bar{x}_n \rightarrow \bar{x}_0$. Тогда $\rho(F(x_n), F(x_0)) = \|F(x_n) - F(x_0)\|_m =$ D-148
 $= \|F(x_n - x_0)\|_m \leq \|F\| \cdot \|x_n - x_0\|_n = \|F\| \cdot \rho(x_n, x_0) \implies \forall x_0$
 $F(x_n) \xrightarrow{\rho} F(x_0) \implies$ отображение всегда является непрерывным. \blacktriangleleft

11.6. Аффинные отображения

- Определение** Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейное отображение и $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$,
тогда $h(\bar{x}) = F(\bar{x}) + \bar{b}$ — аффинное отображение. D-161
- Следствие 1** Всякое аффинное отображение непрерывно. D-167
- Следствие 2** Если $\|F\| \leq 1$, то аффинное отображение является сжимаю-
щим для $\forall \bar{b} \in \mathbb{R}^m$. D-171

§ 12. Частные производные

- Параметризованная кривая** Пусть дано $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда $\forall t \in (a, b)$ определён вектор $\bar{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$. Такой объект называют *параметри-*
зованной кривой. D-179
- Будем говорить, что кривая непрерывна, если $\forall i f_i(t)$ непре-
рывна. D-184
- Будем говорить, что кривая дифференцируема, если $\forall i f_i(t)$ D-187
дифференцируема.
- Определение** Если f дифференцируема (покоординатно) в точке $t_0 \in (a, b)$,
то это означает, что D-191
- $$\forall i \exists \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} = \alpha_i.$$
- $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — касательный вектор к кривой в точке t_0 . D-197
- Определение** Будем говорить, что f дифференцируема в точке t_0 , если \exists D-201
вектор $\bar{\alpha}$ такой, что
- $$\lim_{t \rightarrow t_0} \left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - \bar{\alpha} \right\| = 0.$$

В этом случае α называется касательным вектором.

Если $\bar{\alpha}$ существует, то $\bar{\alpha} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}(t_0)$, $\bar{f}'(t_0) = \bar{\alpha}$.

Следствие

Пусть $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \in (a, b)$. Тогда f дифференцируема в $t_0 \iff \forall i \exists \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} = l_i \in \mathbb{R}$.

Причём (l_1, \dots, l_n) — это компоненты вектора $\bar{\alpha}$ из определения.

Соглашение

$$\begin{aligned} \frac{\bar{f}(t) - \bar{f}(t_0)}{t - t_0} &= \left(\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \dots, \frac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0} \right) = \\ &= \frac{1}{t - t_0} (f_1(t) - f_1(t_0), \dots, f_n(t) - f_n(t_0)). \end{aligned}$$

Теорема 1

Пусть $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейное отображение. Пусть дана $\bar{f}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \in (a, b)$ и \bar{f} дифференцируема в t_0 . Тогда $\bar{g}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\bar{g}(t) = L \circ \bar{f}(t)$ дифференцируема в t_0 , причём $\bar{g}'(t_0) = L(\bar{f}'(t_0))$.

$$\blacktriangleright \frac{\bar{g}(t) - \bar{g}(t_0)}{t - t_0} = \frac{L(\bar{f}(t)) - L(\bar{f}(t_0))}{t - t_0} = L \left(\frac{\bar{f}(t) - \bar{f}(t_0)}{t - t_0} \right).$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} L \left(\frac{\bar{f}(t) - \bar{f}(t_0)}{t - t_0} \right) = L \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{\bar{f}(t) - \bar{f}(t_0)}{t - t_0} \right) = L(\bar{f}'(t_0)) = \bar{g}'(t_0). \blacktriangleleft$$

Теорема 2 о среднем

Пусть $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Предположим, что f дифференцируема на (a, b) и f непрерывна на $[a, b]$.

Пусть $\exists M \mid \forall t \in (a, b) \quad \|\bar{f}(t)\| < M$.

$$\|\bar{f}'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial t}(t) \right)^2}$$

Тогда $\|f(b) - f(a)\|_n \leq M |b - a|$.

\blacktriangleright Если $f(b) = f(a)$, т.е. $\|f(b) - f(a)\| = 0$, то неравенство очевидно.

Пусть $\|f(b) - f(a)\|_n \neq 0$. Тогда рассмотрим вектор: $\bar{u} = \frac{\bar{f}(b) - \bar{f}(a)}{\|f(b) - f(a)\|_n}$. Очевидно, $\|\bar{u}\|_n = 1$.

Рассмотрим отображение $L(\bar{x}) = (\bar{u}, \bar{x}) = \sum u_i x_i$. В силу свойств скалярного произведения L — линейное отображение $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Рассмотрим функцию $\varphi(t) = L \circ \bar{f}(t)$, $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

Согласно теореме 1, φ дифференцируема на (a, b) и непрерывна на $[a, b]$. Следовательно, применима теорема Лагранжа: $\varphi(b) - \varphi(a) = (b - a) \varphi'(t_0)$, $t_0 \in (a, b)$.

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } |\varphi(b) - \varphi(a)| &= |(\bar{u}, \bar{f}(b) - \bar{f}(a))| = |(\bar{u}, \bar{f}(b) - \bar{f}(a))| = \\ &= \left| \left(\frac{\bar{f}(b) - \bar{f}(a)}{\|f(b) - f(a)\|_n}, \bar{f}(b) - \bar{f}(a) \right) \right| = \frac{1}{\|f(b) - f(a)\|_n} \left| (\bar{f}(b) - \bar{f}(a), \bar{f}(b) - \bar{f}(a)) \right| = \\ &= \frac{\|\bar{f}(b) - \bar{f}(a)\|_n^2}{\|f(b) - f(a)\|_n} = \|\bar{f}(b) - \bar{f}(a)\|_n. \end{aligned}$$

Итак, $|\varphi(b) - \varphi(a)| = \|\bar{f}(b) - \bar{f}(a)\|_n$.

$$|\varphi'(t_0)| = |(\bar{u}, \bar{f}(t_0))'| = |(\bar{u}, \bar{f}'(t_0))| \leq \|\bar{u}\|_n \cdot \|\bar{f}'(t_0)\|_n = \|\bar{f}'(t_0)\|_n \leq M,$$

значит $\|\bar{f}(b) - \bar{f}(a)\|_n \leq M |b - a|$. \blacktriangleleft

D-308 Следствие

Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) . Пусть $\bar{l} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \varepsilon > 0 \quad \forall t \in (a, b) \quad \|f'(t) - \bar{l}\|_n \leq \varepsilon$.

Тогда $\left\| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - \bar{l} \right\|_n \leq \varepsilon$.

D-314

► Для функции $g(t) = \bar{f}(t) - t\bar{l}$ применить теорему 2. ◀

D-316

Конструкция
для частных
производных

Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, U — открытое множество в \mathbb{R}^n , f определена на U . Пусть $x_0 \in U$, тогда \exists шар $\beta_\varepsilon(x_0) \subset U$ (т. к. U определено). Зафиксируем i ($i = 1, \dots, n$) и рассмотрим интервал $J = (x_{0i} - \varepsilon, x_{0i} + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$.

D-321

Определим $\varphi_i(t): J \rightarrow \mathbb{R}^m = f(x_{01}, \dots, x_{0i-1}, t, x_{0i+1}, \dots, x_{0n})$.

D-328

Введём вектор $\bar{x}(t) = \bar{x}_0 + (t - x_{0i}) \cdot \bar{e}_i$.

Тогда $\varphi_i(t) = f(\bar{x}(t))$.

Определение

Если $\varphi_i(t)$ дифференцируема при $t = x_{0i}$, то говорят, что у отображения $f \exists i$ -я частная производная. Обозначается так: $\frac{\partial \varphi_i}{\partial f}(x_{0i}) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(\bar{x}_0) = \partial_i f(x_0)$.

D-335

Следствие
из определения

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \rightarrow x_{0i}} \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(x_{0i})}{t - x_{0i}} = \lim_{t \rightarrow x_{0i}} \frac{f(x_0 + (t - x_{0i})\bar{e}_i) - f(x_{0i})}{t - x_{0i}}.$$

D-343

Пример

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad f_1(x, y, z) = xy + yz; \quad f_2(x, y, z) = x^2 + yz; \quad \bar{x}_0 = (1, -1, -2).$$

D-349

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 1(t+1) + (t+1)(-2) \\ 1 - 2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

D-353

Следствие

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ имеет частную производную } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \iff \exists \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

D-359

12.1. Дифференцируемость функций многих переменных

Определение
дифференцируемости

Пусть U — открытое множество в \mathbb{R}^n , $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\bar{x}_0 \in U$. Отображение f дифференцируемо в точке \bar{x}_0 , если \exists такое линейное отображение $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, что

D-366

$$\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}_0) + L(\bar{x} - \bar{x}_0) + \alpha(x) \cdot \|x - x_0\|_n,$$

где $\alpha(x): U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \alpha(x) \xrightarrow{\rho_m} 0 \in \mathbb{R}^m$ при $x \xrightarrow{\rho_m} x_0$.

По-другому, $\|\alpha(x)\|_n \rightarrow 0$ при $\|x - x_0\|_n \rightarrow 0$.

D-378

В случае, если отображение f дифференцируемо в точке x_0 , то L — дифференциал отображения f в точке x_0 , обозначается $L = D_{x_0}f$, где D_{x_0} — матрица размера $m \times n$ (матрица Якоби).

Конструкция

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, U открыто. Пусть $x_0 \in U$, $x \in \mathbb{R}^n$. Составим отображение $\varphi(t): \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n = x_0 + tx$.

D-386

$\exists \delta_0 \mid \beta_{\delta_0} \subset U$, пусть $\bar{x} \neq \bar{0}$, тогда введём $\eta_0 = \frac{\delta_0}{\|\bar{x}\|}$. Тогда $\forall t \mid |t| < \eta_0$ имеет место $\|\bar{x}_0 + t\bar{x} - x_0\|_n = \|t\bar{x}\|_n = \|t\| \cdot \|\bar{x}\| < \delta_0$.

D-391

D-399 **Теорема**

Пусть U — открытое в \mathbb{R}^n , $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\bar{x}_0 \in U$, f — дифференцируемое в x_0 отображение. Тогда $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{f(x_0 + t\bar{x}) - f(x_0)}{t} = (D_{x_0} f) \cdot \bar{x}.$$

D-406 ► Из определения дифференцируемости $\forall x \in U \quad \bar{f}(x) = \bar{f}(x_0) + (D_{x_0} f)(\bar{x} - \bar{x}_0) + \alpha(\bar{x}) \cdot \|x - x_0\|_n$.

D-413 $\exists \eta_0 \mid t < \eta_0, \quad x_0 + t\bar{x} \in U$.

$\bar{f}(x_0 + t\bar{x}) = f(x_0) + (D_{x_0} f)(t\bar{x}) + \alpha(x_0 + t\bar{x}) \|t\bar{x}\|_n$;

D-419 $\bar{f}(x_0 + t\bar{x}) - f(x_0) = t(D_{x_0} f)\bar{x} + \alpha(x_0 + t\bar{x}) \cdot |t| \cdot \|\bar{x}\|_n$;

$$\frac{\bar{f}(x_0 + t\bar{x}) - f(x_0)}{t} = (D_{x_0} f)\bar{x} + \alpha(x_0 + t\bar{x}) \cdot \frac{|t|}{t} \cdot \|\bar{x}\|_n;$$

D-426 $\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\bar{f}(x_0 + t\bar{x}) - f(x_0)}{t} = (D_{x_0} f)\bar{x} + \lim_{t \rightarrow 0} \alpha(x_0 + t\bar{x}) \cdot \frac{|t|}{t} \cdot \|\bar{x}\|_n$;

D-432 $\|x_0 + t\bar{x} - x_0\|_n = |t| \cdot \|\bar{x}\| \implies \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \alpha(x_0 + t\bar{x}) = 0. \blacktriangleleft$

D-439 **Следствие**

Пусть $\bar{x} = \bar{e}_i$. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + e_i) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$.

D-444 **Следствие**

Пусть отображение $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, U открыто в \mathbb{R}^n , дифференцируемо в точке x_0 . Тогда \exists все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$.

D-450 **Следствие**

$$(D_{x_0} f)\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \implies (D_{x_0} f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right).$$

D-456 **Определение**

Выражение $(D_{x_0} f)\bar{x}$ при $\|\bar{x}\|_n = 1$, называется производной по направлению \bar{x} .

D-461 **Определение**

Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда *градиентом* $\text{grad } f$ в точке x_0 называется вектор $(D_{x_0} f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$.

D-468 **Пример**

Непрерывная функция, имеющая частные производные в точке, но не являющаяся дифференцируемой:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{если } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

D-474

«Here goes доказательство примера»

12.2. Достаточные условия дифференцируемости отображения в точке

D-479 **Лемма 1**

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ и $U = (\alpha_1, \beta_1) \times \dots \times (\alpha_n, \beta_n) = I_n$ — n -интервал.

D-483 Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, причём f непрерывна в U и $\exists M \mid \forall x \in U \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right\|_m \leq M$.

D-487

Тогда $\forall x_1, x_2 \in U$ имеет место

$$\|f(x_1) - f(cD_{x_0})\|_n \leq M \cdot \sqrt{n} \cdot \|x_1 - x_2\|_n.$$

► Построим y_0, y_1, \dots, y_n ($y_0, \dots, y_n \in U$) такие, что

$$y_0 = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}),$$

$$y_1 = (x_{12}, x_{21}, \dots, x_{n1}),$$

$$y_2 = (x_{12}, x_{22}, x_{31}, \dots, x_{n1}),$$

$$y_n = (x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}).$$

$\varphi_i(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m = f(\dots, t, \dots)$. φ_i дифференцируема $\forall i$, т. к. f обладает всеми частными производными. $|\varphi'_i(t)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|$ D-491

$$\left| f(y_i) - f(y_{i-1}) \right| = \left| \varphi_i(x_{i2}) - \varphi_i(x_{i1}) \right| \leq \left| \varphi'_i(t_1) \right| \cdot |x_{i2} - x_{i1}| \leq \leq M |x_{i2} - x_{i1}|. \quad \text{D-503}$$

$$\|f(x_2) - f(x_1)\|_m = \|f(y_1) - f(y_{n-1}) + f(y_{n-1}) - f(y_{n-2}) + \dots - \quad \text{D-508}$$

$$f(y_0)\|_m \leq \|f(y_1) - f(y_{n-1})\|_m + \dots + \|f(y_1) - f(y_0)\|_m \leq \sum_{i=1}^m M |x_{i1} -$$

$$- x_{i2}| \leq M \sqrt{n} \|x_2 - x_1\|_n \text{ (из неравенства про метрики)}. \blacktriangleleft$$

Теорема:

достаточные

условия диффе-

ренцируемости

отображения в точке

Пусть U открыто в \mathbb{R}^n ; $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$; $x_0 \in U$. D-517

Предположим, что f непрерывна в U и $\forall i = 1, \dots, n$ D-520

$\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$, причём $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ непрерывна в x_0 для $\forall i = 1, \dots, n$.

Тогда f дифференцируема в точке x_0 . D-524

► Рассмотрим отображение

$$g(x) = f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) \cdot (x_i - x_{i0}).$$

Если докажем, что

$$\alpha(x) = \frac{\|g(x)\|}{\|x - x_0\|} \rightarrow 0$$

при $\|x - x_0\| \rightarrow 0$, то всё доказано.

$g(x_0) = 0$; $g(x)$ непрерывна, т. к. $f(x)$ непрерывна. D-534

Из

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

следует, что (1) $(\partial g / \partial x_i)(x_0)$ непрерывна и (2) $(\partial g / \partial x_i)(x_0) = 0$ $\forall i = 1, \dots, n$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Найдём $\delta > 0$ такое, что D-541

$$\forall x \in U \quad \|x - x_0\| < \delta.$$

Тогда из непрерывности

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Очевидно, что во всяком шаре $B_\varepsilon(x_0)$ \exists n -мерный интервал D-546

$$I_n = (\alpha_1, \beta_1) \times \dots \times (\alpha_n, \beta_n).$$

Пусть $x \in I_n \subseteq B_\varepsilon(x_0)$. Тогда

$$\|g(x)\| = \|g(x) - g(x_0)\| \leq \sqrt{n} \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \|x - x_0\|_n,$$

где $M = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ по определению $\leq \varepsilon \|x - x_0\|$.

Имеем D-554

$$\|\alpha(x)\| = \frac{\|g(x)\|}{\|x - x_0\|} \leq \frac{\varepsilon \|x - x_0\|}{\|x - x_0\|} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\|\alpha(x)\|_m \rightarrow 0$ при $\|x - x_0\|_n \rightarrow 0$. \blacktriangleleft D-558

Теорема
о дифференцируе-
мости суперпозиции
отображений

Пусть U открыто в \mathbb{R}^n , V открыто в \mathbb{R}^m . Пусть $f: U \rightarrow V$, $g: V \rightarrow \mathbb{R}^l$. Пусть f дифференцируема в $x_0 \in U$, $f(x_0) = y_0 \in V$, g дифференцируема в y_0 . D-563

Тогда $h = g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^l$ дифференцируема в $x_0 \in U$, причём $D_{x_0} h = D_{y_0} g \cdot D_{x_0} f$.

► Условие дифференцируемости f в x_0 : $f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \alpha(x) \|x - x_0\|_n$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $\|x - x_0\|_n \rightarrow 0$, $L = D_{x_0} f$.

Условие дифференцируемости g в y_0 : $g(y) = g(y_0) + K(y - y_0) + \beta(y) \|y - y_0\|_m$, где $\beta(y) \rightarrow 0$ при $\|y - y_0\|_m \rightarrow 0$, $K = D_{y_0} g$.

$h(x) = g(f(x)) = h(x_0) + K(f(x) - f(x_0)) + \beta(f(x)) \cdot \|f(x) - f(x_0)\|_m =$
 $= h(x_0) + K(L(x - x_0) + \alpha(x) \|x - x_0\|_n) + \beta(f(x)) \cdot \|L(x - x_0) + \alpha(x) \|x -$
 $- x_0\|_n\|_m = h(x_0) + KL(x - x_0) + K(\alpha(x) \|x - x_0\|_n) + \beta(f(x)) \|L(x -$
 $- x_0) + \alpha(x) \|x - x_0\|_n\|_m.$

$$\gamma(x) = \frac{K(\alpha(x) \|x - x_0\|_n + \beta(f(x)) \|L(x - x_0) + \alpha(x) \|x - x_0\|_n\|_m)}{\|x - x_0\|_n}.$$

$$\begin{aligned} \|\gamma(x)\|_l &= \left\| K(\alpha(x)) + \beta(f(x)) \cdot \left\| L \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|_n} + \alpha(x) \right\|_m \right\|_l \leq \|K\alpha(x)\|_l + \\ &\quad \|\beta(f(x))\| \cdot \left\| \left\| L \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|_n} + \alpha(x) \right\|_m \right\|_l \leq \|K\| \cdot \|\alpha(x)\| + \|\beta(f(x))\|_l \cdot \\ &\quad \cdot \left\| \left\| L \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|_n} + \alpha(x) \right\|_m \right\|_l \leq \|K\| \cdot \|\alpha(x)\| + \|\beta(f(x))\|_l \cdot \left(\|L\| + \right. \\ &\quad \left. + \|\alpha(x)\|_m \right) \leq \|K\| \cdot \|\alpha(x)\| + \|\beta(f(x))\|_l T. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Следствие

Пусть F дифференцируема в точке x_0 . Пусть \exists отображение $G \mid G \circ F(x) = x$, тогда $G = F^{-1}$, тогда $(DG) = (DF)^{-1}$.

► $G \circ F(x) = x$; $D_{f(x)} G \circ D_x F = E$; $D_{f(x)} F^{-1} = (D_x F)^{-1}$. ◀

Теорема
об обратном
отображении

Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, U открыта в \mathbb{R}^n . Пусть $x_0 \in U$. Предположим, что $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ непрерывна в точке x_0 , f дифференцируема в x_0 и $\det(D_{x_0} f) \neq 0$. Пусть $y_0 = f(x_0)$.

Тогда \exists шар $\beta_r(x_0)$ и $\beta_\rho(y_0)$ такие, что $\forall y \in \beta_\rho(y_0) \exists! x \in \beta_r(x_0) \mid f(x) = y$.

В этом случае определено отображение $f^{-1}: \beta_\rho(y_0) \rightarrow \beta_r(x_0)$, которое называется обратным к f , причём f^{-1} непрерывна в y_0 и f^{-1} дифференцируема в y_0 и $D_{y_0} f^{-1} = (D_{x_0} f)^{-1}$.

Комментарий. Элементарный случай: $x_i - \varphi_i(x_1, \dots, x_n) = y_i$, $i = 1, \dots, n$. $E x - \varphi(x) = y$ — элементарная система.

Пусть y фиксирован. Обозначим $\varphi_y(x) = \varphi(x) + y$. Строим последовательность $x_0 = (0, \dots, 0)$, $x_1 = \varphi_y(x_0)$, \dots , $x_n = \varphi_y(x_{n-1})$.

$$\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| = \|\varphi(x_1) + y - \varphi(x_2) - y\| = \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leq q \|x_1 - x_2\|, \text{ где } q < 1.$$

► **Шаг 1.** Приведём к элементарному виду.

$\forall x \in U$ в силу дифференцируемости f в точке x_0 имеет место $f(x) = f(x_0) + (D_{x_0} f)(x - x_0) + y(x)$; $y(x) = \alpha(x) \|x - x_0\|$.

Построим $g(x) = f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)$, где $L = D_{x_0} f$.

D-671

$g(x_0) = 0$; $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ непрерывна в точке x_0 , $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) = 0$.

$f(x) = y_0 + L(x - x_0) + g(x)$.

$y = y_0 + L(x - x_0) + g(x)$, т. к. $\det L \neq 0$, то $\exists L^{-1} = K$.

D-673

$K_y = K_{y_0} + (x - x_0) + K g(x)$; $h(x) = K g(x)$; $h(x_0) = 0$.

$x + h(x) = x_0 + K(y - y_0)$ — это и есть элементарное уравнение.

D-680

$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = 0$, $h(x_0) = 0$.

Следуя логике нашего элементарного построения, введём функцию $\varphi_y(x) = x_0 + K(y - y_0) \cdot h(x)$. Получаем, что решение уравнения $y = f(x)$ эквивалентно нахождению неподвижной точки отображения $\varphi_y(x)$: если $x' = \varphi_y(x')$, то $f(x') = y$.

D-685

Шаг 2. Построим метрическое пространство, где $\varphi_y(x)$ — сжимающее и переводящее в себя отображение.

D-691

Пусть $\delta_0 > 0$ | $\beta_{\delta_0}(x_0) \subset U$. Заметим, что $\forall \rho < \delta_0$ шар $\overline{\beta}_{\rho}(x_0) \subset \beta_{\delta_0}(x_0)$; более того, $\forall \rho < \delta_0$ $\overline{\beta}_{\rho}(x_0)$ — полное метрическое пространство.

D-694

Докажем, что $\exists \rho$ | $\varphi_y(x): \overline{\beta}_{\rho}(x_0) \rightarrow \overline{\beta}_{\rho}(x_0)$, т. к. $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = 0$.

D-700

$\frac{\|h(x)\|}{\|x - x_0\|} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0 \implies \exists \delta_1 > 0$ | $\frac{\|h(x)\|}{\|x - x_0\|} < \frac{1}{2} \implies \forall x \in \beta_{\delta_1}(x_0) \quad \|h(x)\| < \frac{1}{2} \|x - x_0\|$.

Пусть $\rho < \delta_1$ и y | $\|y - y_0\| < \frac{\rho}{2\|K\|}$, тогда $\|\varphi_y(x - x_0)\| = \|x_0 + K(y - y_0) - h(x) - x_0\| = \|K(y - y_0) - h(x)\| \leq \|K(y - y_0)\| + \|h(x)\| \leq \|K\| \cdot \|y - y_0\| + \frac{\|x - x_0\|}{r} \leq \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho$.

D-709

Шаг 3. Докажем сжимаемость.

D-716

$\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| = \|x_0 + K(y - y_0) - h(x_1) - x_0 - K(y - y_0) + h(x_2)\| = \|h(x_2) - h(x_1)\|$.

Т. к. $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = 0$ и $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ непрерывно в точке x_0 , то можно выбрать шар радиуса δ_3 такой, что

D-721

$$\frac{\forall x \in \beta_{\delta_3} \quad \|\partial y}{\partial x_i\|} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

тогда $\|h(x_1) - h(x_2)\| < \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n} \cdot \|x_1 - x_2\| = \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| \implies h(x)$ — сжимающее с коэффициентом $q = \frac{1}{2}$.

$\varphi_y(x): \overline{\beta}_{\rho}(x_0) \rightarrow \overline{\beta}_{\rho}(x_0)$ — отображающее в себя и сжимающее, значит шары из условия теоремы: $\beta_{\delta}(x_0)$ и $\beta_{\frac{\delta}{2\|K\|}}(y_0)$.

D-729

Шаг 4. Итого: $\forall y \in \beta_{\frac{\delta}{2\|K\|}}(y_0) \quad \exists x$ | $f(x) = y$, причём x — неподвижная точка отображения $\varphi_y(x)$, x единственна. Значит, определено отображение $f^{-1}: \beta_{\frac{\delta}{2\|K\|}}(y_0) \rightarrow \beta_{\delta}(x_0)$.

D-734

Докажем непрерывность. Пусть $y = f(x)$, тогда $x = f^{-1}(y)$. $\|x - x_0\| = \|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\| \leq \frac{\|y - y_0\|}{2\|K\|} \implies \|y - y_0\| \rightarrow 0$ при $\|x - x_0\| \rightarrow 0 \implies f^{-1}$ непрерывно в y_0 .

D-741

Дифференцируемость в точке y_0 отображения. $f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + K(y - y_0) + h(f^{-1}(y))$

D-747

$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) - K(y - y_0) = h(f^{-1}(y)) \rightarrow 0$.

Из непрерывности $f^{-1}(y)$ в точке y_0 функция $h(x)$ непрерывна в 0; f^{-1} дифференцируема. Значит, $h(f^{-1}(y)) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow y_0$.

D-751

$K = (D_{x_0} f)^{-1}$; получаем, что $D_{y_0}(f^{-1}) = (D_{x_0} f)^{-1}$; $y_0 = f(x_0)$. ◀

D-755

Подводные камни. $u = x^2 - y^2$. $x_0 = (1, 1)$, $y_0 = (0, 1)$, $V = xy$.

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 + \varepsilon \\ xy = 1 + \varepsilon. \end{cases}$$

Теорема
о неявной функции

$\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n + \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^{n+m}$, $z = (v, w)$, $u \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^m$.

$$z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Пусть $f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^k$. $f(u, w)$.

\forall фиксированной ω : $f_\omega(u) = f(u, \omega)$. $f_\omega: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Df_ω — частный дифференциал отображения f по переменной ω .

Теорема
о неявных отображениях

Пусть U открыто в \mathbb{R}^{n+m} , $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Предположим, что $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ и $\exists \frac{\partial f}{\partial y_j}$, $j = 1, \dots, m$. f непрерывна в U , отображение f дифференцируемо в U . Предположим, что \exists точка $(a, b) \in U$ такая, что $f(a, b) = 0$ и $d_k f(a, b)$ — обратимое линейное отображение.

Тогда \exists окрестность V точки a , окрестность W точки b такие, что $V \times W \subset U$ и $\forall y \in W \exists! x \in U$, следовательно определено отображение $x \mapsto g(y)$ ($g: W \rightarrow V$) такое, что $\forall y \in W$ $f(g(y), y) = 0$.

$g(y)$ дифференцируема в W .

Замечание 1. «куча формул» $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$. $(*) \{ f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \}$

Замечание 2. Всякое условие вида $f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0$ определяет гиперповерхность в \mathbb{R}^{n+m} .

Пример: $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $f_2(x, y, z) = x + y + z$.

Замечание 3. Сопоставим линейное отображение $D_{(a,b)} f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Выпишем матрицу Якоби линейного отображения.

Предположим, что $\text{rk}(D_{(a,b)} f) = n$.

Замечание 4. «опять формулы»

► $F(x, y): \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$. «дописать» ◀

Пример

«дописать»

§ 13. Высшие производные

Вторая производная

Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, U открыто в \mathbb{R}^n . Если $\exists \frac{df}{dx_i}$ в U , то определено отображение $\frac{df}{dx_i}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Если $\frac{df}{dx_i}$ таково, что $\exists \frac{d}{dx_i} \left(\frac{df}{dx_i} \right)$, то записывается $\frac{d^2 f}{dx_i dx_i}$.

D-837 **Теорема**
о порядке диф-
ференцирования

Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \frac{df}{dx_i}, \frac{df}{dx_j}, \frac{d^2f}{dx_i dx_i}, \frac{d^2f}{dx_j dx_i}$ существуют и непрерывны. Тогда $\frac{d^2f}{dx_i dx_i} = \frac{d^2f}{dx_j dx_i}$.

Определение

Будем говорить, что $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $C^n(U)$, если U открыто в \mathbb{R}^n и $\forall k \leq r$ существуют и непрерывны все частные производные до порядка k .

D-843

Определение:
мультииндексный
формализм

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \geq 0$. Определим:

$$(1) \quad \alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!;$$

$$(2) \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

$\varphi(x_1, \dots, x_n) = a x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_n}$ — элементарный полином.

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha}}.$$

D-849

D-852

D-855

§ 14. Формула Тейлора для многочленов

Теорема

Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in C^r(U)$, $x_0 \in U$. Тогда $\forall x$ имеет место

D-864

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + \sum_{0 < |\alpha| \leq r} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha}}(x_0) \cdot x^{\alpha} + \varepsilon_r(x) \cdot \|x\|^r,$$

где $\varepsilon_r(x) \rightarrow 0$ при $\|x\| \rightarrow 0$.

► Пусть $\varphi(t) = f(\bar{x}_0) + t\bar{x}$, $\varphi(0) = f(\bar{x}_0)$, $\varphi^{(k)}(0) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha}}(x_0) \cdot$

D-871

$\cdot x^{\alpha}$. Пусть $\exists \nu > 0 \mid B_{\nu}(x_0) \subseteq U$. Будем считать $\|x\| < \nu$.

Тогда $\forall |t| < 1 \quad x_0 + tx \in B_{\nu}(x_0)$ и

$$\forall |t| \leq 1 \quad \|tx + x_0 - x_0\| = \|t\| \cdot \|x\| \leq \|t\| \cdot \nu.$$

Значит $\varphi(t)$ определена на $[0, 1]$ и дифференцируема n раз.

Применим обычную формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

D-882

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \dots + \frac{\varphi^{(r-1)}(0)}{(r-1)!} + \frac{\varphi^{(r)}(\theta)}{r!},$$

где $\theta \in [0, 1]$.

$$= \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \dots + \frac{\varphi^{(r-1)}(0)}{(r-1)!} + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!} + \frac{\varphi^{(r)}(\theta)}{r! - \varphi^{(r)}(0)}.$$

D-886

Т. к. $\varphi^{(k)}(0) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha}}(x_0) \cdot x^{\alpha}$, то первая часть формулы

D-890

$$\frac{\varphi^{(r)}(\theta)}{r! - \varphi^{(r)}(0)} = \sum_{\alpha} \frac{\frac{\partial^{\alpha} f}{\partial x^{\alpha}}(x_0 + x\theta) - \frac{\partial^{\alpha} f}{\partial x^{\alpha}}(x_0)}{\alpha!} \cdot \frac{x^{\alpha}}{\|x\|^{\alpha}} \cdot \|x\|^{\alpha} = \|x\|^{\alpha} \cdot \varepsilon_r(x).$$

D-894

$\frac{\partial^{\alpha} f}{\partial x^{\alpha}}(x_0 + x\theta) - \frac{\partial^{\alpha} f}{\partial x^{\alpha}}(x_0) \rightarrow 0$ (следует из непрерывности производ-

D-900

$$\text{ной}). \frac{x^{\alpha}}{\|x\|^{\alpha}} \leq 1, \text{ т. к. } \frac{|x^{\alpha_i}|}{\|x\|^{\alpha_i}} \leq 1. \blacktriangleleft$$

§ 15. Экстремумы функций многих переменных

D-910 **Определение**

Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, U открыто. Предположим, $x_0 \in U$, тогда x_0 называется *точкой локального минимума (максимума)*, если $\exists \varepsilon > 0$ такой, что

$$B_\varepsilon(x_0) \subset U, \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \quad f(x) \geq f(x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0)).$$

D-918 **Определение**

Всякая точка, которая является локальным минимумом или локальным максимумом функции f , называется *экстремальной точкой* функции f .

D-923 **Теорема Ферма**

Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, U открыто, f дифференцируема в U . Тогда если x_0 — точка экстремума функции f , то $D_{x_0}f = 0$ — нулевое линейное отображение:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) x_i = 0.$$

D-929 ► Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| > 0$, $x \neq 0$. Пусть x_0 — точка экстремума:

$$\forall \delta > 0 \quad \exists B_\delta(x_0) \subset U \quad | \quad \forall x_1 \in B_\delta(x_0) \quad f(x_1) \geq f(x_0).$$

Пусть $\nu > 0$, $|t| < \nu$, $\bar{x}_0 + t\bar{x} \in B_\delta(x_0)$.

D-937

$$\|\bar{x}_0 + t\bar{x} - \bar{x}_0\| = \|t\bar{x}\| = |t| \cdot \|\bar{x}\|, \quad |t| = \frac{\delta}{\|\bar{x}\|} = \nu.$$

D-943

$$\varphi(t) = f(x_0) + t\nu, \quad \varphi(0) = f(x_0).$$

φ дифференцируема на отрезке $prange -\nu\nu$.

D-947

$$\varphi(t) = \varphi(x_0) + t\nu = f(x_0) = \varphi(0).$$

$\varphi(t)$ имеет минимум в $t + 0$ на отрезке $(-\nu, \nu)$, значи $\varphi'(0) = 0$.

Из теоремы прошлого семестра:

$$\varphi'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) x_i = 0 \quad \forall x,$$

значит $\dots x_0 f$ — нулевое. Если в качестве x взять вектор $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, то $\forall i \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$. ◀

§ 16. Квадратичные формы

D-959 **Определение**

Определим $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле $Q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$,

причём $a_{ij} = a_{ji}$.

D-963

Отображение $Q(x)$ называется *квадратичной формой*;

$n \times n$ -матрица a — матрицей квадратичной формы.

D-968 **Свойства кв. формы**

$$(1) \quad Q(0) = 0;$$

$$(2) \quad Q(tx) = t^2 Q(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

D-974 **Классификация**

D-975

Квадратичная форма $Q(x)$ называется:

- (1) *положительноопределённой*, если

$$\forall x \mid \|x\| \neq 0 \quad Q(x) > 0;$$
- (2) *отрицательноопределённой*, если

$$\forall x \mid \|x\| \neq 0 \quad Q(x) < 0;$$
- (3) *положительной*, если

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad Q(x) \geq 0;$$
- (4) *отрицательной*, если

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad Q(x) \leq 0;$$
- (5) *неопределённой*, если

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \mid Q(x_1) > 0, \quad Q(x_2) < 0.$$

D-977

D-979

D-981

D-983

Теорема:
свойства положи-
тельно определённой
кв. формы

Пусть $Q(x)$ — положительно определённая квадратичная форма. Тогда $\exists k_1, k_2 > 0, k_1, k_2 \in \mathbb{R} \mid k_2 \cdot \|x\|_n^2 \leq Q(x) \leq k_1 \cdot \|x\|_n^2$.

D-987

► Если $x = 0$, то выполняется.

D-992

Пусть $S_1(0) = \{x \mid \|x\| = 1\}$. Очевидно, $S_1(0)$ ограничено и замкнуто в \mathbb{R}^n . Значит, $S_1(0)$ — компактное метрическое пространство.

Рассмотрим квадратичную форму $Q(x)$, где $x \in S_1(0)$. $Q(x)$ непрерывна, определена на компактном множестве $S_1(0)$. Согласно теореме Вейерштрасса $\exists x_1, x_2 \in S_1(0)$ такие, что

D-999

$$\max_{\|x\|=1} \{Q(x)\} = Q(x_1) = k_1, \quad \min_{\|x\|=1} \{Q(x)\} = Q(x_2) = k_2.$$

Пусть $y \in \mathbb{R}^n, |y| \neq 0$. Имеем $\frac{y}{\|y\|} \in S_1(0)$. Значит, имеет место

D-1005

$$k_2 \leq Q\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \leq k_1 \implies k_2 \leq \frac{1}{\|y\|^2} Q(y) \leq k_1 \implies$$

$$k_2 \|y\|^2 \leq Q(y) \leq k_1 \|y\|^2. \quad \blacktriangleleft$$

Матрица Гёссе и ассоциированная с функцией кв. форма

Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^2(x)$. Из формулы Тейлора:

D-1014

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} (x_i - x_{i0}) (x_j - x_{j0}) + \varepsilon_2(x) \|x\|^2,$$

где $a_{ij} = \frac{D^2 f}{dx_i dx_j}(x_0)$. Из $f \in C^2(x)$: $a_{ij} = a_{ji}$.

Матрица (a_{ij}) называется *матрицей Гёссе*, а квадратичная форма — квадратичной формой, *ассоциированной* с функцией f в точке x_0 .

D-1021

Имеем:

D-1024

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \frac{1}{2} Q(x - x_0) + \varepsilon_2(x) \|x\|_n^2.$$

Теорема
о кв. форме, ассоциированной с функцией в точке

Пусть U открыто в $\mathbb{R}^n, f: U \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^2(U)$. Пусть x_0 — экстремальная точка. Если x_0 — локальный максимум, то кв. форма f в точке x_0 отрицательна. Если локальный минимум, то положительна.

D-1028

- По теореме Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \frac{1}{2}Q(x - x_0) + \varepsilon_2(x) \|x\|_n^2.$$

Пусть x_0 — экстремальная точка, тогда L — нулевое отображение, значит

$$f(x_0 + tx) = f(x_0) + \frac{1}{2}Q(tx) + \varepsilon_2(tx) \|tx\|_n^2;$$

$$f(x_0 + tx) - f(x_0) = \frac{t^2}{2}Q(x) + t^2\varepsilon_2(tx) \|x\|_n^2$$

Т. к. $f(x_0)$ — локальный минимум, то $f(x_0 + tx) - f(x_0) \geq 0$, значит

$$\frac{t^2}{2}Q(x) + t^2\varepsilon_2(tx) \|x\|_n^2 \geq 0;$$

$$\frac{1}{2}Q(x) + \varepsilon_2(tx) \|x\|_n^2 \geq 0 \quad \forall x.$$

Поскольку $\|tx\|_n \rightarrow 0$, $\varepsilon_2(tx) \rightarrow 0$, то $\forall x$ $Q(x) \geq 0$, т. е. форма $Q(x)$ положительна. ◀

D-1052 Определение

$x_0 \in U$ называется *стационарной точкой* $f \in C^2(U)$, если $\forall i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$.

D-1057 Следствие

Экстремальная точка является стационарной.
(Обратное неверно: $f = x^2 - y^2$.)

D-1062 Теорема: достаточные условия экстремума

Пусть U открыто в \mathbb{R}^n , $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(U)$. Пусть x_0 — стационарная точка f . Тогда если кв. форма, ассоциированная с f в точке x_0 , положительноопределена, то x_0 — точка максимума; если отрицательноопределена — точка минимума.

D-1068

- Т. к. $f \in C^2(U)$, то имеет место формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \frac{1}{2}Q(x - x_0) + \varepsilon_2(x) \|x\|_n^2.$$

Т. к. x_0 — стационарная точка, то $L = 0$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}Q(x - x_0) + \varepsilon_2(x) \|x\|_n^2.$$

Пусть Q положительно определена. Тогда в силу теоремы о квадратичной форме имеет место

$$k_2 \|x - x_0\|_n^2 \leq Q(x - x_0) \leq k_1 \|x - x_0\|_n^2, \quad k_1, k_2 > 0.$$

Выберем $B_\varepsilon(x_0) \mid \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \mid \varepsilon_2(x) < \frac{k_1}{2}$. Это возможно, т. к. $\varepsilon_2(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$. Имеем

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x_0) + \frac{1}{2}Q(x - x_0) - \frac{1}{2}k_1 \|x - x_0\|_n^2 \geq \\ &\geq f(x_0) + \frac{1}{2}k_1 \|x - x_0\|_n^2 - \frac{1}{2}k_1 \|x - x_0\|_n^2 = f(x_0), \end{aligned}$$

значит

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \mid f(x) > f(x_0). \quad \blacktriangleleft$$

D-1091 Следствие

Если $Q(x)$ не определена, то $\exists B_\varepsilon(x_0) \subset U$ и $\exists x_1, x_2 \mid f(x_1) > f(x_0), f(x_2) < f(x_0)$.

§ 17. Условный экстремум

17.1. Аналитические многообразия

D-1100	Определение	<p>Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется <i>аналитическим многообразием</i> размерности $n - k$, если \exists такие функции $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, что $\forall \bar{x} \in M$ имеет место $\varphi_i(\bar{x}) = 0, i = 1, \dots, k$.</p> <p>Будем считать, что φ_i дважды непрерывно дифференцируемы.</p>	D-1106
	Определение	<p>Точка $x_0 \in M$ называется <i>регулярной</i>, если $\text{rk} \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\} (x_0) = k$, где $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n$.</p> <p>В противном случае точка называется <i>особенной</i>.</p>	D-1109 D-1113
	Определение	Аналитическое многообразие M называется <i>регулярным</i> , если $\forall x \in M$ точка x — регулярная.	D-1117
	Определение	<p>Аналитическое многообразие M назовём <i>параметризуемым</i> в окрестности точки x_0, если \exists такое отображение $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n, U \subset \mathbb{R}^{n-k}$, что $g(y_0) = x_0$.</p> $\begin{cases} \forall g \in U & \varphi_1(g_1(y_1, \dots, y_{n-k}), \dots, g_n(y_1, \dots, y_{n-k})) \equiv 0, \\ \vdots \\ \forall g \in U & \varphi_k(g_1(y_1, \dots, y_{n-k}), \dots, g_n(y_1, \dots, y_{n-k})) \equiv 0 \end{cases}$ <p>$x_1 = g_1(y_1, \dots, y_{n-k}), \dots, x_n = g_n(y_1, \dots, y_{n-k})$.</p> <p>Если окрестность $\langle \langle ??? \rangle \rangle$, то M называется <i>параметризуемой глобально</i>.</p>	D-1121 D-1126 D-1131
	Следствие	Из теоремы о неявном отображении: если $\bar{x}_0 \subset M$ регулярна, то \exists окрестность x_0 , допускающая параметризуемость.	D-1136
	Определение	<p>Аналитическое многообразие M называется <i>линейным</i>, если функции φ_i имеют вид $\varphi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + e_i$, где $i = 1, \dots, k$.</p> <p>Если $\forall i e_i = 0$, то такое линейное многообразие называется <i>линейным подпространством</i>.</p>	D-1141 D-1145
	Определение	<p>Пусть M — аналитическое многообразие, x_0 — регулярная точка, L — матрица $\left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} (x_0) \right\}$. Тогда линейное многообразие $L \cdot (x - x_0) = 0$ называется <i>касательным пространством</i> к аналитическому многообразию M в точке x_0.</p>	D-1149
	Замечание	«Скипнуто из-за неразорчивости, дописать со стр. 67»	D-1157
	Определение	<p>Пусть $(a, b) \subset \mathbb{R}, \bar{\gamma}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда определена кривая в \mathbb{R}^n. Будем говорить, что кривая лежит на аналитическом многообразии U, если $\forall t \in (a, b)$ выполняется $\varphi_i(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) = 0$, где $i = 1, \dots, k$.</p>	D-1161

Лемма

Пусть $\exists t_0 \mid \bar{x}_0 = \bar{\gamma}(t_0)$. Тогда касательный вектор в точке x_0 к кривой γ принадлежит касательному пространству к M в точке x_0 . D-1169

D-1174

- Напомним, что касательный вектор кривой в точке t_0 определяется как $\delta = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}(t_0), \dots, \frac{d\gamma_n}{dt}(t_0) \right)$.

D-1179

Рассмотрим $\varphi_j(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$.

$$\forall t, t_0 \in (a, b) \quad \frac{d}{dt} \varphi_j(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\varphi_j}{dx_i}(\gamma(t_0)) \cdot \frac{d\gamma_i}{dt}(t_0) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\varphi_j}{dx_i} \cdot \frac{d\gamma_i}{dt}(t_0) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

D-1187

Значит, $L \frac{d\gamma}{dt}(t_0) = 0$. ◀

D-1192

Определение независимости

Будем говорить, что кривые $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ независимы в x_0 , если касательные вектора линейно независимы.

D-1196

Лемма

Пусть x_0 — регулярная точка аналитического многообразия M . Тогда если k — число функций $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, определяющих аналитическое многообразие, то $\exists n - k$ независимых кривых, проходящих через точку x_0 .

D-1202

- Пусть x_0 — регулярная точка, то уравнения

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_k(x_1, \dots, x_n) = 0$$

определяют многообразие. В силу теоремы о неявных отображениях $\exists y_0$ и отображение $g: \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что $g(y_0) = x_0$ и

$$\varphi_1(g_1(y_1, \dots, y_{n-k}), \dots, g_k(y_1, \dots, y_{n-k})) = 0,$$

$$\vdots$$

$$\varphi_k(g_1(y_1, \dots, y_{n-k}), \dots, g_k(y_1, \dots, y_{n-k})) = 0.$$

D-1214

«Что дальше?» ◀

17.2. Условный экстремум

D-1221

Определение

Пусть M — аналитическое многообразие, $M \subset \mathbb{R}^n$; пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда точка $\bar{x}_0 \in M$ называется *точкой условного локального максимума (минимума)*, если \exists такое $\varepsilon > 0$, что $\forall x \in B_\varepsilon(x_0) \cap M$ имеет место $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$).

D-1230

Определение

Если \bar{x}_0 — точка условного локального максимума или минимума функции f , то \bar{x}_0 называется *точкой условного экстремума*.

D-1235

Теорема

о необходимом

условии условного

экстремума

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — аналитическое многообразие, заданное в виде $\varphi_i(\bar{x}) = 0$, где $i = 1, \dots, m$. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

D-1239

Предположим, $\bar{x}_0 \in M$ — регулярная точка условного экстремума f . Тогда $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}.$$

► Пусть $x_0 \in M$, $\exists \varphi: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \forall t \mid t \mid < \delta \Rightarrow \varphi(t) \in M$, $\varphi(0) = x_0$ (кривая φ лежит на аналитическом многообразии). D-1243

Рассмотрим $F(t) = f(\varphi(t))$, $F: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$. Точки экстремума: D-1248

$$\frac{dF}{dt}(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(0)) \cdot \frac{d\varphi_i}{dt}(0) = 0.$$

Следовательно, вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$ перпендикулярен касательному вектору.

Можно выбрать $n - m$ кривых так, что их касательные вектора образуют базис касательного пространства. D-1255

В предыдущем разделе доказано, что вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$, где $j = 1, \dots, m$, перпендикулярен любому вектору из касательного пространства. Т.к. x_0 — регулярная точка, что m векторов линейно независимы. ◀ D-1258

*Следствие:
метод Эйлера-Лагранжа для отыскания точек условного экстремума*

Пусть M — многообразие; $\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0$; $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Функция Лагранжа $H = f + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_n \varphi_n$. D-1265

Напишем условие, что x_0 — безусловный экстремум H : D-1269

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(x) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

$\varphi_i(x) = 0$ — система Эйлера-Лагранжа.

Интегралы, зависящие от параметра



§ 18. Дифференцирование интегралов, зависящих от параметров • § 19. Интегрирование по параметру • § 20. Несобственные интегралы, зависящие от параметра • § 21. Эйлеровы интегралы (гамма-, бета-функции)

E-5 Пусть...

Пусть $f: [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Тем самым задана $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, зависящая от параметра $\alpha \in U \subseteq \mathbb{R}^n$.

E-10 Определение

Будем говорить, что $f(x, \alpha)$ равномерно сходится к функции $f(x, \alpha_0)$, если $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists \delta > 0$ такая, что

$$\|\alpha - \alpha_0\| < \delta \implies \forall x \in [a, b] \|f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)\| < \varepsilon.$$

Обозначение: $f(x, \alpha) \rightrightarrows f(x, \alpha_0)$ на $[a, b]$.

E-18

Обозначим

$$M(\alpha) = \sup_{\alpha \in [a, b]} |f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)|,$$

тогда

$$f(x, \alpha) \rightrightarrows f(x, \alpha_0) \text{ на } [a, b] \iff \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} M(\alpha) = 0.$$

E-25 Определение

Интегралом, зависящим от параметра, называется выражение вида

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx.$$

E-30 Лемма 1:
предельный переход

Пусть $f(x, \alpha) \rightrightarrows f(x, \alpha_0)$ на $[a, b]$. Тогда $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} F(\alpha) =$
 $= \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x, \alpha) dx =$
 $= \int_a^b f(x, \alpha_0) dx = F(\alpha_0).$

E-41

► Пусть $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{b-a}$, тогда:

$$\begin{aligned} |f(\alpha) - f(\alpha_0)| &= \left| \int_a^b f(x, \alpha) dx - \int_a^b f(x, \alpha_0) dx \right| = \\ &= \left| \int_a^b (f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)) dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)| dx. \end{aligned}$$

Выберем $\delta > 0$: $|\alpha - \alpha_0| < \delta \implies |f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)| < \varepsilon$
 $\forall x \in [a, b]$: $\int_a^b |f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)| dx \leq \int_a^b \varepsilon_1 dx = \varepsilon_1 (b-a) = \varepsilon$;
 $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(\alpha) = f(\alpha_0)$. ◀

Е-58 Следствие 1

Пусть $f(x, \alpha)$ непрерывна, как функция $n - 1$ переменного на $[a, b] \times U$, где U открыто в \mathbb{R}^n . Тогда $F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$ является первообразной в U .

- Пусть $\alpha_0 \in U$, $\exists B_\varepsilon(\alpha_0) \subseteq U$, $\exists J_n \subseteq B_\varepsilon(\alpha_0)$ J_n замкнуто в \mathbb{R}^n , $[a, b] = J_{n+1}$. J_{n+1} ограничено и замкнуто \implies компактно, $J_n + 1$ — полное метрическое пространство. $f(x, \alpha)$ непрерывна на компактном множестве $\implies f(x, \alpha)$ равномерно непрерывна. Е-63

Пусть $(x, \alpha) \rightarrow (x, \alpha_0)$, тогда $f(x, \alpha) \rightrightarrows f(x, \alpha_0) \implies$ в силу леммы 2 Е-72 $F(\alpha) \rightarrow F(\alpha_0)$ — непрерывность. ◀

§ 18. Дифференцирование интегралов, зависящих от параметров

Теорема

Предположим, что $f: [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$, где $U \subseteq \mathbb{R}$. Пусть $a \in U$ и \exists частная производная $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$ непрерывна в окрестности α_0 . Тогда, если $F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$, то $F(x)$ дифференцируема в α_0 и $\frac{dF}{d\alpha}(\alpha_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx$. Е-79

- Рассмотрим: Е-87

$$\begin{aligned} \frac{F(\alpha) - F(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} &= \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \int_a^b (f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)) dx = \\ &= \int_a^b \frac{f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} dx. \end{aligned}$$

По определению

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} = \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}.$$

Т. к. непрерывна в окрестности α_0 , то это означает, что

$$\frac{f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \rightrightarrows \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$$

на $[a, b]$.

В силу следствия к лемме 1 получаем, что

$$\exists \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{F(\alpha) - F(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} = \frac{dF}{d\alpha}(\alpha_0). \quad \blacktriangleleft$$

Теорема

Пусть $F(\alpha)$ определена. Предположим, что $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ непрерывны и $a'(\alpha)$, $b'(\alpha)$ определены в α_0 . Тогда $\frac{dF}{d\alpha}(\alpha_0) = \int_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} \frac{dF}{d\alpha}(x, \alpha_0) dx + b'(\alpha_0) f(b(\alpha_0), \alpha_0) - a'(\alpha_0) f(a(\alpha_0), \alpha_0)$. Е-111

- Рассмотрим: Е-119

$$\begin{aligned} \frac{F(\alpha) - F(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} &= \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \left(\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx - \int_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} f(x, \alpha_0) dx \right) = \\ &= \int_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} \frac{f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} + \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx - \\ &\quad - \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \int_{a(\alpha_0)}^{a(\alpha)} f(x, \alpha_0) dx. \end{aligned}$$

По теореме о дифференцировании

$$\exists \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} \frac{dF}{d\alpha}(x, \alpha_0) dx.$$

Далее:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx - \frac{b(\alpha) - b(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} f(b(\alpha_0), \alpha) \right| = \\ & = \left| \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx - \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)} f(b(\alpha_0), \alpha) dx \right| = \\ & = \left| \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)} (f(x, \alpha) - f(b(\alpha_0), \alpha)) dx \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)} |f(x, \alpha) - f(b(\alpha_0), \alpha)| dx \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)} \varepsilon dx \right| = \frac{\varepsilon (b(\alpha_0) - b(\alpha))}{|\alpha - \alpha_0|}. \end{aligned}$$

При выводе используется, что

$$|f(x, \alpha) - f(b(\alpha_0), \alpha)| < \varepsilon,$$

если $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ (из непрерывности $b(\alpha)$, $f(x, \alpha)$).

Т. к. функция b дифференцируема, то

$$\left| \frac{b(\alpha) - b(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \right| < M.$$

Отсюда

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{b(\alpha) - b(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} f(b(\alpha_0), \alpha) = b'(\alpha_0) f(b(\alpha_0), \alpha_0). \quad \blacktriangleleft$$

§ 19. Интегрирование по параметру

Теорема об интегрирова- нии по параметру

Пусть $F(x, y)$ непрерывна на $[a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$. Тогда этой функции можно сопоставить две функции, зависящие от параметра:

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad \text{и} \quad F(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Тогда

$$\int_c^d \Phi(y) dx = \int_a^b F(x) dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$$

— двойному интегралу.

► Пусть $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, $h(x, t) = \int_c^t f(x, y) dy$. Обозначим

$$\varphi(t) = \int_c^t \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad \text{и} \quad \psi(t) = \int_a^b \left[\int_c^t f(x, y) dy \right] dx.$$

Найдём производные

$$\frac{d\varphi}{dt} = \int_a^b f(x, t) dx$$

и

$$\frac{d\psi}{dt} = \int_a^b \left(\int_c^t f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b f(x, t) dx.$$

Они совпадают, следовательно, $\varphi(t) - \psi(t) = \text{const}$.

Заметим, что $\varphi(c) = 0$ и $\psi(c) = 0$. Значит, $\varphi(t) = \psi(t)$. ◀

§ 20. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Определение

$$\int_a^\omega f(x, \alpha) dx = \lim_{p \rightarrow \omega} \int_a^p f(x, \alpha) dx.$$

E-190

Определение

Будем говорить, что

E-194

$$F(\alpha) = \int_a^\omega f(x, \alpha) dx, \quad \alpha \in [a, b] \quad (*)$$

равномерно сходится на $[a, b]$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall b > B$ имеет место

$$\forall x \in [a, b] \quad \int_p^\omega f(x, \alpha) dx < \varepsilon.$$

Теорема:

условие непрерывности несобственного интеграла

Если $f(x, \alpha)$ равномерно непрерывна на $[a, \omega]$ и $(*)$ равномерно сходится на $[c, d]$, то $f(\alpha)$ непрерывна на $[c, d]$.

E-203

► Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу расходимости $(*)$

E-208

$$\exists p \mid \forall a \in [c, d] \quad \left| \int_p^\omega f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon.$$

Рассмотрим функцию

$$G(\alpha, p) = \int_a^p f(x, \alpha) dx$$

на $[a, p] \times [c, d]$. Т. к. $f(x, \alpha)$ непрерывна, то по теореме о непрерывности обычных интегралов $G(\alpha, p)$ непрерывна по α .Обозначим через $G(\alpha, \omega) = \int_a^\omega f(x, \alpha) dx$ — этот интеграл существует. Рассмотрим

E-218

$$\begin{aligned} |G(\alpha, \omega) - G(\alpha, p)| &= \left| \int_a^\omega f(x, \alpha) dx - \int_a^p f(x, \alpha) dx \right| = \\ &= \left| \int_p^\omega f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon \quad \forall \alpha \in [c, d]. \end{aligned}$$

Значит, $G(\alpha, p) \rightrightarrows G(\alpha, \omega)$ при $p \rightarrow \omega$.Из равномерной сходимости $G(\alpha, \omega)$ непрерывна. ◀**Теорема**
о дифференцируемостиПусть $F(\alpha) = \int_a^\omega f(x, \alpha) dx$. Пусть $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ равномерно непрерывна на $[a, \omega] \times [c, d]$ и $\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx$ равномерно сходится на $[c, d]$. Тогда $\forall \alpha \in (c, d)$

E-233

$$\frac{dF}{d\alpha} = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx.$$

► Пусть $\varepsilon > 0$, p взято из равномерной сходимости. Тогда

E-241

$$F(\alpha, p) = \int_a^p f(x, \alpha) dx.$$

Для неё выполнены все условия теоремы о дифференцируемости на $[a, p] \times [c, d]$. Следовательно, имеет место

$$\frac{dF}{d\alpha}(\alpha, p) = \int_a^p \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx.$$

Т. к. $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ равномерно непрерывна, то применим предыдущую теорему.Получим, что $\frac{dF}{d\alpha}(\alpha, p) \rightrightarrows \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, \omega)$. ◀**Теорема:**Пусть $F(\alpha) = \int_a^\omega f(x, \alpha) dx$, где $\alpha \in [c, d]$. Пусть $\exists h(x) \in$

E-253

$\in [a, \omega] \mid \forall a \in [c, d]$
 $f(x, \alpha) < h(x)$. Тогда $\int_a^\omega f(x, \alpha) dx$ сходится.

► Очевидно. ◀

§ 21. Эйлеровы интегралы (гамма-, бета-функции)

Е-264 Эйлеровы интегралы (1) $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$, $x \geq 0$ — гамма-функция;

Е-266 (2) $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ — бета-функция.

Е-270 Связь между Γ и B $B(x, y) = \Gamma(x) \cdot \Gamma(y) / \Gamma(x + y)$.

Е-272 (Без доказательства.)

Е-276 Теорема: (1) Γ имеет смысл (определена) для $\forall x > 0$.

Е-278 свойства гамма-функций

► $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$.

Е-282 Пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда $\int_\alpha^1 e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_\alpha^1 t^{x-1} dt = \frac{1-\alpha^2}{x} \leq \frac{1}{x}$.

Е-285 Т. к. $x > 0$, то $\exists \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_\alpha^1 e^{-t} t^{x-1} dt \leq$.

Е-287 Очевидно, что $\exists p > 0 \mid \forall t > p \ e^{-t} t^{x-1} < \frac{1}{t^2}$ для $\forall x > 0$. Тогда

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_1^p e^{-t} t^{x-1} dt + \int_p^\infty e^{-t} t^{x-1} dt < \infty,$$

то есть сходится.

Е-293 Итак, гамма-функция определена для $\forall x > 0$. ◀

(2) $\Gamma(x) > 0 \ \forall x > 0$.

Е-298 ► $e^{-t} t^{x-1} > 0$. ◀

(3) $\Gamma(1) = 1$.

Е-304 ► $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$. ◀

Е-308 (4) $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ — факториал.

► Пусть $0 < \alpha < \beta < \infty$, тогда

$$\int_\alpha^\beta e^{-t} t^x dt = \left(-e^{-t} t^x \right) \Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta e^{-t} x t^{x-1} dt.$$

Перейдём к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, затем при $\beta \rightarrow \infty$. ◀

Е-317 (5) $\Gamma(n) = (n-1)!$.

► По индукции. ◀

Е-323 (6) Формула дополнения. Пусть $0 < x < 1$. Тогда

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$