

Лекции  
по математическому анализу  
за второй семестр первого курса  
ФИТ НГУ за 2004 г.

Сценарий:  
**Кренделев Сергей Фёдорович.**

*Художник-постановщик:*  
Брусенцов Леонид Евгеньевич.  
*Звукооператор и художник:*  
Тютюньков Вячеслав Евгеньевич.

*Гримёрная:*  
 $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$   
*Конструктор:*  
Pentium MMX 166 64 MB

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Интегрирование</b>	<b>6</b>
1.1	Первообразная	6
1.1.1	Задача	6
	ОПР 1.1.2 (Точной первообразной)	6
	ОПР 1.1.4 (выполнения в основном)	6
	ОПР 1.1.5 (обобщённой первообразной)	6
	ОПР 1.1.6 (интегрируемости)	6
	Лемма 1.1.7 (Об единственности первообразной)	7
	Теорема 1.1.8 (Линейность первообразной)	7
	Теорема 1.1.9 (Интегрирование по частям)	7
	Теорема 1.1.10 (Уточнённый критерий монотонности)	7
	ОПР 1.1.12 (Неопределённого интеграла)	8
	Следствие 1.1 ()	8
	ОПР 1.1.14 (Определённого интеграла)	8
	ОПР 1.1.15 (Площади)	8
	ОПР 1.1.16 (Криволинейной трапеции)	8
	Лемма 1.1.17 (Ньютона — связь точной первообразной и площади)	8
	Следствие 1.1.18.0 (Связь первообразной и площади криволинейной трапеции)	9
1.2	Методы нахождения неопределённых интегралов	9
	Пример 1.2.1 (Элементарных функций, не имеющих элементарные первообразные)	9
	Теорема 1.2.2 (Первообразная для дробно-рациональных функций)	9
1.3	Свойства определённых интегралов	11
	Теорема 1.3.1 (Об интегрируемости на объединении отрезков)	11
	Теорема 1.3.2 (Линейность определённого интеграла)	11
	Теорема 1.3.3 (Ориентированность определённого интеграла)	12
	Следствие 1.3.4.0 (Интеграл одного предела)	12
	Теорема 1.3.5 (Монотонность определённого интеграла)	12
	Следствие 1.3 (Неравенство интегралов)	12
	Следствие 1.3 (Неравенство интегралов с модулем)	12
	Следствие 1.3 (Неравенство интегралов с модулями)	13
	Следствие 1.3 (Неравенство интеграла и константы)	13
	Теорема 1.3.10 (Аддитивность интегралов по отрезкам)	13
	Теорема 1.3.11 (О замене переменных в определённом интеграле)	13
	Следствие 1.3.12.0 (Условия на $\phi(t)$ )	14
1.4	Критерий интегрируемости. Несобственные интегралы	14
	Пример 1.4.1 (Применение несобственного интеграла)	14
	Замечание 1.4.2 (Нахождение первообразной)	14
	Теорема 1.4.3 (О несобственном интеграле)	14
	ОПР 1.4.4 (Определение интеграла на отрезке)	15
	Теорема 1.4.5 (Интегрирование по частям для не собственных интегралов)	15
	Теорема 1.4.6 (Коши о существовании не собственного интеграла)	15
	Теорема 1.4.7 (Асимптотический признак существования несобственного интеграла)	15
	Лемма 1.4.8 (интегральное неравенство Абеля)	16
	Теорема 1.4.9 (Признак Абеля-Дирихле сходимости несобственного интеграла)	16
	Пример 1.4.9.1 (К теореме)	17
	Теорема 1.4.10 (интегральный признак Коши сходимости числового ряда)	17
	Пример 1.4.10.1 (К теореме)	17
1.5	Интеграл Римана (то мы изучали интеграл Ньютона)	17
	ОПР 1.5.1 (разбиения и суммы Римана)	17
	ОПР 1.5.2 ( $R1$ . интеграл Римана)	17
	1.5.2.1 Построение Дарбу	18

ОПР 1.5.3 (R2. Интегрируемость по Риману)	18
1.5.4 Теорема Дарбу	18
ОПР 1.5.4.1 (продолжения разбиения)	18
ОПР 1.5.4.2 (суммы разбиений)	18
Лемма 1.5.4.3 (Лемма 1)	18
Лемма 1.5.4.4 (Лемма 2)	18
Лемма 1.5.4.5 (Лемма 3)	19
Лемма 1.5.4.6 (Лемма 4)	19
Теорема 1.5.4.7 (Теорема Дарбу)	19
Теорема 1.5.5 (Интегрируемость непрерывных функций)	19
<b>2 Функциональные ряды и последовательности</b>	<b>21</b>
ОПР 2.1 (числовой последовательности)	21
ОПР 2.2 (сходящейся последовательности)	21
ОПР 2.3 (множества точек сходимости)	21
Пример 2.3.1 (множества точек сходимости и предельной функции)	21
Пример 2.3.2 (Порядок взятия предела)	21
Пример 2.3.3 (Непрерывность функционального ряда)	21
Пример 2.3.4 (Сходимость производных)	21
Пример 2.3.5 (Интегрируемость $f(x)$ )	21
2.4 Равномерная сходимость	22
ОПР 2.4.1 (равномерно сходящейся последовательность функций)	22
Следствие 2.4.1.1 (Поточечная сходимость)	22
ОПР 2.4.3 (Равномерно сходящийся функциональный ряд)	22
Теорема 2.4.4 (условие Коши о равномерной непрерывности)	22
Теорема 2.4.5 (Необходимый признак Вейерштрасса о равномерной сходимости)	22
Пример 2.4.5.1 (К теореме)	22
Теорема 2.4.6 (Признак Вейерштрасса для рядов)	22
Теорема 2.4.7 (О предельном переходе)	23
Следствие 2.4.7 (теорема о непрерывности предельной точки)	23
Пример 2.4.7.2 (Не непрерывной, сходящейся неравномерно функции)	23
Теорема 2.4.8 (О равномерной сходимости и интегрируемости по Риману)	23
Замечание 2.4.8.1 (К теореме)	24
Замечание 2.4.8.2 (Для рядов)	24
Теорема 2.4.9 (О равномерной дифференцируемости и сходимости)	24
Теорема 2.4.10 (Пример Вейерштрасса непрерывной и не дифференцируемой функции)	25
Теорема 2.4.11 (Вейерштрасса о приближении многочлена к непрерывной функции)	25
Следствие 2.4.12.0 (Последовательность полиномов, сходящаяся к модулю)	26
2.5 Степенные ряды	26
ОПР 2.5.1 (степенного и других рядов)	26
Лемма 2.5.2 (Первая лемма Абеля о степенных рядах)	26
Следствие 2.5.3.0 (Расходимость ряда)	27
Следствие 2.5.4.0 (Структура области сходимости)	27
Теорема 2.5.5 (О радиусе сходимости)	27
Теорема 2.5.6 (О радиусе сходимости)	27
Лемма 2.5.7 (Вторая лемма Абеля)	27
Следствие 2.5 (Непрерывность)	28
Теорема 2.5.9 (Об интегрируемости степенного ряда)	28
Следствие 2.5 (Радиус сходимости ряда первообразных)	28
Теорема 2.5.11 (О дифференцируемости степенных рядов)	28
Следствие 2.5.12.0 (Радиус сходимости при дифференцируемости)	29
Следствие 2.5.13 (Радиусы сходимости ряда, его производной и интеграла)	29
<b>3 Метрические пространства</b>	<b>30</b>
ОПР 3.1 (метрики и метрического пространства)	30
Пример 3.1.1 (метрик)	30
УТВ 3.2 (Подмножества метрических пространств)	30
3.3 Дополнительные свойства метрики	30
3.3.0.1 Свойство 1 (Неравенство „ломанной“)	30
3.3.0.2 Свойство 2 (Неравенство параллелограмма)	30
3.3.0.3 Свойство 3 (Второе неравенство треугольника)	31
3.3.1 Последовательности	31
ОПР 3.3.1.1 (последовательности)	31
ОПР 3.3.1.2 (сходимость последовательности)	31

ОПР 3.3.1.4 (Последовательность Коши)	31
Лемма 3.3.1.5 (О сходящейся последовательности)	31
ОПР 3.3.1.6 (Специального множества)	31
ОПР 3.3.1.7 (Ограниченности множества)	31
ОПР 3.3.1.8 (Неограниченного множества)	32
ОПР 3.3.1.9 (предельной точки)	32
Лемма 3.3.1.10 (Характеризация предельных точек)	32
ОПР 3.3.1.11 (области)	32
Следствие 3.3.1.12 ( $B_r(a)$ — открыто)	32
ОПР 3.3.1.13 (замкнутого множества)	32
ОПР 3.3.1.14 (Полного метрического пространства)	32
Пример 3.3.1.15 (К определению)	32
Лемма 3.3.1.16 (О метриках в $\mathbb{R}^n$ )	32
3.3.1.17 Обозначение	32
УТВ 3.3.1.18 (Свойства сходимости)	32
Следствие 3.3.1 (Полнота $\mathbb{R}^n$ )	33
3.4 Компактные множества	33
ОПР 3.4.1 (компактного множества)	33
Пример 3.4.2 (К определению)	33
Лемма 3.4.3 (Полнота компактных множеств)	33
Следствие 3.4.3 (Замкнутость компактных множеств)	33
Лемма 3.4.4 (Ограниченность компактного подмножества)	33
Следствие 3.4.4 (Замкнутость и ограниченность компактного множества)	34
ОПР 3.4.5 ( $\varepsilon$ -сети)	34
Теорема 3.4.6 (Хаусдорфа о критерии компактности)	34
ОПР 3.4.7 (открытого покрытия)	34
Следствие 3.4.7 (условие компактности)	34
Следствие 3.4.7 (компактность ограниченных и замкнутых множеств)	34
3.5 Непрерывность	34
ОПР 3.5.1 (1 непрерывной в предельной точке функции)	34
ОПР 3.5.2 (2 непрерывной в предельной точке функции)	34
ОПР 3.5.3 (Сжимающего отображения)	35
Лемма 3.5.4 (Непрерывность сжимающего отображения)	35
Теорема 3.5.5 (О неподвижной точке)	35
<b>4 Функции многих переменных</b>	<b>36</b>
ОПР 4.1 (нормы)	36
4.2 Свойства нормы:	36
4.3 Свойства скалярного произведения	36
ОПР 4.4 (Метрика по формуле, её непрерывность)	36
4.5 Линейные отображения	37
ОПР 4.5.1 (линейного отображения)	37
Пример 4.5.1.1 (линейного отображения)	37
Теорема 4.5.2 (Об представлении решения)	37
ОПР 4.5.3 (Определение нормы линейного отображения)	37
Теорема 4.5.4 (Неравенство норм линейных отображений)	37
Следствие 4.5 (Связь нормы отображения и сжимаемости)	37
Теорема 4.5.5 (Об оценке нормы линейного отображения)	37
Теорема 4.5.6 (Непрерывность линейного отображения)	38
4.6 Аффинные отображения	38
ОПР 4.6.1 (аффинного отображения)	38
Следствие 4.6.2.0 (Непрерывность аффинного отображения)	38
Следствие 4.6.3.0 (Условие сжимаемости аффинного отображения)	38
4.7 Частная производная	38
ОПР 4.7.1 (параметризованной и дифференцируемой кривой)	38
ОПР 4.7.2 (Дифференцируемость параметризованной кривой в точке)	38
Следствие 4.7.3.0 (Условие дифференцируемости в точке)	38
4.7.4 Соглашение	39
Теорема 4.7.5 (Умножение матрицы на вектор)	39
Теорема 4.7.6 (Аналог теорем о среднем для дифференцируемых функций)	39
Следствие 4.7 (Неравенство)	40
4.7.8 Конструкция для частных производных	40
ОПР 4.7.9 (i-ая частная производная)	40

	Следствие 4.7.11.0 (Условия „имения“ частной производной)	40
4.8	Дифференцируемость функции от многих переменных	41
	ОПР 4.8.1 (дифференцируемости)	41
	4.8.2 Конструкция	41
	Теорема 4.8.3 (Дифференциал)	41
	Следствие 4.8.3.1 (Условие существования всех частных производных)	41
	Следствие 4.8.3.2 (Формулы дифференциала)	41
	ОПР 4.8.4 (производной по направлению)	41
	ОПР 4.8.5 (градиента)	42
	Пример 4.8.6 (непрерывной, с частной производной и не дифференцируемой функции)	42
	ОПР 4.8.7 (Элементарного параллелепипеда или $n$ -интервала)	42
	Лемма 4.8.8 (Свойства элементарного параллелепипеда)	42
	УТВ 4.8.9 (Достаточное условие дифференцируемости отображения в точке)	43
	Теорема 4.8.10 (О дифференцируемости суперпозиции отображений)	43
	Следствие 4.8 (Обратное отображение)	44
	Теорема 4.8.11 (Об обратном отображении)	44
	Пример 4.8.12 (Нахождения)	45
	Теорема 4.8.13 (О неявных отображениях)	45
	Замечание 4.8.13.1 ()	45
	Замечание 4.8.13.2 (Гиперповерхность)	46
	Пример 4.8.13.1 (Пересечения поверхностей)	46
	Замечание 4.8.13.3 (Линейное отображение)	46
	Замечание 4.8.13.4 (Тождественное равенство)	46
	Пример 4.8.13.2 (к замечанию)	47
4.9	Высшие производные	47
	Теорема 4.9.1 (равенство частных производных)	47
	Пример 4.9.1.1 (Взятие смешанных производных в разном порядке)	47
	Теорема 4.9.1.2 (Равенство частных производных)	47
	ОПР 4.9.2 (принадлежности классу)	48
	Теорема 4.9.3 (Формула Тейлора для многих переменных)	48
4.10	Экстремумы функций многих переменных	49
	ОПР 4.10.1 (Точка локального минимума)	49
	ОПР 4.10.2 (экстремальной точки)	49
	Теорема 4.10.3 (Ферма)	49
4.11	Квадратичная форма	50
	ОПР 4.11.1 (квадратичной формы)	50
	УТВ 4.11.2 (Свойства квадратичной формы)	50
	ОПР 4.11.3 (положительно определённой квадратичной формы)	50
	Пример 4.11.3.1 (Определённость формы)	50
	Теорема 4.11.4 (Монотонность положительно определённой квадратичной формы)	50
	ОПР 4.11.5 (Матрица Гессе)	51
	Теорема 4.11.6 (О квадратичной форме, ассоциативной с функцией в точке)	51
	ОПР 4.11.7 (стационарной точки)	51
	Теорема 4.11.8 (Достаточные условия экстремума)	51
	Следствие 4.11.8 (Случай неопределённой квадратичной формы)	52
	Пример 4.11.8.2 (Стационарных, не экстремальных точек)	52
4.12	Аналитические многообразия	52
	ОПР 4.12.1 (аналитического многообразия)	52
	ОПР 4.12.2 (регулярной точки)	52
	ОПР 4.12.3 (регулярного аналитического многообразия)	52
	Пример 4.12.4 (Аналитических многообразий)	52
	ОПР 4.12.5 (параметризуемое аналитическое многообразие)	53
	Следствие 4.12.5.1 (Теорема о неявном отображении)	53
	ОПР 4.12.6 (линейного аналитического многообразия)	53
	ОПР 4.12.7 (касательного проектора)	53
	Замечание 4.12.8 (Из алгебры)	53
	Пример 4.12.8.1 (перпендикулярности градиента)	53
	ОПР 4.12.9 (лежания на параметрическом многообразии)	53
	Лемма 4.12.10 (принадлежность касательного вектора)	53
	ОПР 4.12.11 (независимых кривых)	54
	Лемма 4.12.12 (Существование независимых кривых)	54
	ОПР 4.12.13 (точки условного локального максимума)	55
	Пример 4.12.13.1 (Простой)	55

Пример 4.12.14.2 (Тривиальный) . . . . .	55
<b>5 Интегралы, зависящие от параметра</b>	<b>56</b>
ОПР 5.1 (равномерного стремления) . . . . .	56
ОПР 5.2 (интеграла, зависящего от параметра) . . . . .	56
Лемма 5.3 (Предельный переход) . . . . .	56
Следствие 5.3 (Случай непрерывности) . . . . .	56
5.4 Дифференцирование интеграла, зависящего от параметра . . . . .	57
Теорема 5.4.1 (О дифференцируемости такого интеграла) . . . . .	57
Пример 5.4.1.1 (Взятия интеграла) . . . . .	57
Теорема 5.4.2 (Разложение производной) . . . . .	57
Пример 5.4.2.1 (Типичные пример применения теоремы) . . . . .	58
5.5 Интегрирование по параметру . . . . .	58
Теорема 5.5.1 (Об интегрировании по параметру) . . . . .	58
Пример 5.5.1.1 (Типичный) . . . . .	59
5.6 Несобственный интеграл, зависящий от параметра . . . . .	59
ОПР 5.6.1 (равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра) . . . . .	59
Теорема 5.6.2 (Условие непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра) . . . . .	59
Теорема 5.6.3 (О дифференцируемости несобственного интеграла, зависящего от параметра) . . . . .	59
Теорема 5.6.4 (Признак Вейерштрасса о равномерной сходимости) . . . . .	60
5.7 Эйлеровы интегралы (Гамма- и Бета-функции) . . . . .	60
ОПР 5.7.1 (Эйлеровых интегралов) . . . . .	60
УТВ 5.7.2 (Связь между Гамма- и Бета-функциями) . . . . .	60

# Глава 1

## Интегрирование

### 1.1 Первообразная

#### 1.1.1 Задача

- ▷ Пусть на  $(a, b)$  задана  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  и требуется найти  $F(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , причём  $F$  — непрерывна и дифференцируема, где  $\forall x \in (a, b): F'(x) = f(x)$ .

#### ОПР 1.1.2 (Точной первообразной).

Если функция  $F$  — существует для задачи, то она называется точной первообразной для функции  $f$ .

#### Пример 1.1.3.

- ▷ Пусть

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

и предположим, что существует первообразная на  $\mathbb{R}$ , обозначим за  $F(x)$ .

- ▷ Тогда

- При  $x > 0$  — рассмотрим  $F(x) - F(0) \stackrel{(\text{теорема Лагранжа})}{=} F'(\xi) \cdot x, \xi \in (0, x) \Rightarrow f(\xi) \cdot x = F(x) - F(0) \Rightarrow F(x) = x + F(0)$ .
- При  $x < 0$ :  $F(x) = -x + F(0) \Rightarrow F(x) = |x| + F(0)$ , тогда  $F(x)$  — непрерывна, но не дифференцируема в нуле.

#### ОПР 1.1.4 (выполнения в основном).

Будем говорить, что некоторое высказывание  $P(x)$ , при  $x \in A$  — выполняется в основном, если множество  $E = \{x | P(x) \text{ — не верно}\}$  — не более, чем счётно.

- $f$  — определена в основном на  $A$ , если множество  $M \subset A: f$  не определена на  $M$  — не более, чем счётно.
- $f$  — непрерывна в основном на  $A \subseteq \mathbb{R}$ , если  $f$  — непрерывна на  $A \setminus M$ , причём  $M$  — не более, чем счётно.
- $f$  — дифференцируема в основном на множестве  $A \subseteq \mathbb{R}$ , если множество  $M$ , где  $f'(x)$  не существует  $\forall x \in M$  — обладает следующим свойством:  $A \setminus M$  — не более, чем счётно.

#### ОПР 1.1.5 (обобщённой первообразной).

Функция  $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , определённая всюду называется обобщённой первообразной для функции  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , если выполняется:

- $F$  — непрерывна на  $(a, b)$ ;
- $F$  — дифференцируема в основном;
- $F'(x) = f(x)$  — в основном.

#### ОПР 1.1.6 (интегрируемости).

Будем говорить, что  $f$  — интегрируема на  $\langle a, b \rangle$ , если  $f$  — определена на  $\langle a, b \rangle$  и существует обобщённая первообразная  $F$  на  $\langle a, b \rangle$ .

**Пример**

- Функция  $\operatorname{sgn} x$  — интегрируема на  $\mathbb{R}$ , причём  $|x|$  для неё первообразная;
- $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x) \cdot \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , т.к.  $x = \pi \cdot n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  — счётно  $\Rightarrow F(x) = |\sin x|$ ;
- Функция Дирихле:  $d(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ — иррациональный;} \\ 1, & x \text{ — рациональный.} \end{cases}$

**Лемма 1.1.7 (Об единственности первообразной).**

▷ Пусть

$f$  — интегрируема на  $(a, b)$  и  $F$  — её первообразная на  $(a, b)$ ;  $g$  — определена на  $(a, b)$  и  $g(x) = f(x)$  — в основном.

▷ Тогда

$F$  — первообразная для  $g$  на  $(a, b)$ .

▷ Доказательство.

- Пусть  $E_1 = \{x \in (a, b) \mid F'(x) \text{ — не определена}\}$ ,  $E_2 = \{x \in (a, b) \mid f(x) \neq g(x)\}$ , тогда  $E_1$  — счётно из определения первообразной,  $E_2$  — счётно из определения  $g(x) \neq f(x)$ .
- Пусть  $E = E_1 \cup E_2$  — счётно по определению и  $x \in (a, b) \setminus E$ , тогда  $F'(x) = f(x) = g(x) \Rightarrow F'(x) = g(x)$  на  $(a, b) \setminus E \Rightarrow F$  — первообразная для  $g \Rightarrow g$  — интегрируема.

□

**Теорема 1.1.8 (Линейность первообразной).**

▷ Пусть

$f$  и  $g$  — интегрируемы на  $(a, b)$ ; существуют  $F$  и  $G$  — первообразные для  $f$  и  $g$  соответственно.

▷ Тогда

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: h = \lambda \cdot f + \mu \cdot g$  — интегрируема на  $(a, b)$  и  $H = \lambda \cdot F + \mu \cdot G$  — первообразная для функции  $h$ .

▷ Доказательство.

- Пусть  $E_1 = (a, b) \setminus \{x \in (a, b) \mid F'(x) = f(x)\}$ , а  $E_2 = (a, b) \setminus \{x \mid G'(x) = g(x)\}$ , тогда  $E_1$  и  $E_2$  — счётны.
- $E = E_1 \cup E_2$  — счётное, тогда  $\forall x \in (a, b) \setminus E: H' = \lambda \cdot F' + \mu \cdot G' = \lambda \cdot f + \mu \cdot g =_{\text{по опр.}} h \Rightarrow H$  — первообразная.

□

**Теорема 1.1.9 (Интегрирование по частям).**

▷  $F' = f, G' = g \Rightarrow (F \cdot G)' = F' \cdot G + G' \cdot F = f \cdot G + g \cdot F$  — упражнение на экзамен.

**Теорема 1.1.10 (Уточнённый критерий монотонности).**

▷ Пусть

$f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  — непрерывна и дифференцируема в основном, причём существует не более, чем счётное множество  $E \subseteq \langle a, b \rangle: \forall x \in (a, b) \setminus E: f'(x) \geq 0$ .

▷ Тогда

$f$  — монотонно возрастает.

▷ Доказательство.

- Из определения первообразной и теоремы о характеристизации монотонных функций прошлого семестра.

□

**Следствие 1.1.11.**

1. Если  $f'(x) \geq 0$  — в основном и  $f$  — непрерывна, то  $f$  — возрастает;
2. Если  $f'(x) = 0$  — в основном и  $f$  — непрерывна, то  $f$  — постоянна;
3. Если  $f(x) = g(x)$  — в основном и  $f(x), g(x)$  — непрерывны на  $\langle a, b \rangle$ , то  $F = G = \text{const}$



**ОПР 1.1.12 (Неопределённого интеграла).**

Пусть  $f$  — интегрируема на  $(a, b)$ ,  $f$  — функция; обозначим за  $[F(x)]$  — множество всех первообразных функции  $f$ , тогда  $\int f(x) dx = [F(x)]$  называется неопределённым интегралом.

Если  $F(x)$  — первообразная  $f(x)$  на  $(a, b)$ , то любая другая первообразная имеет вид  $F(x) + C$ , где  $C$  — константа (следует из леммы 1.1.7).

Следствие 1.1.13.

▷ Пусть

$f$  — интегрируема на  $[a, b]$ ,  $F$  — первообразная.

▷ Тогда

$F(b) - F(a)$  — не зависит от первообразной.

▷ Доказательство.

◦ Пусть  $F_1$  — первообразная, тогда  $F_1(x) = F(x) + C$ , т.е.  $F_1(b) - F_1(a) = F(b) - C - F(a) + C = F(b) - F(a)$ .

□

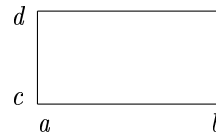
**ОПР 1.1.14 (Определённого интеграла).**

Пусть  $f$  — интегрируема на  $[a, b]$ , тогда  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  — называется определённым интегралом, где  $F$  — первообразная.

**ОПР 1.1.15 (Площади).**

Пусть в  $\mathbb{R}^2$  определено некоторое отображение  $\mu_2(S)$ , которое всякому подмножеству из  $\mathbb{R}^2$  сопоставляет положительное число:

- Если прямоугольник  $(\square)$ , то  $\mu_2(\square) = |b - a| \cdot |d - c|$ ;
- Если  $S_1 \subseteq S_2$ , то  $\mu_2(S_1) \leq \mu_2(S_2)$ ;
- Если  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ , то  $\mu_2(S_1 \cup S_2) = \mu_2(S_1) + \mu_2(S_2)$ .

**ОПР 1.1.16 (Криволинейной трапеции).**

Пусть  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Определим  $W_f(p, t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (p, t), y \in (0, f(x))\}$ , — где  $f \geq 0$ . Тогда  $W_f(p, t)$  — криволинейная трапеция.

**Лемма 1.1.17 (Ньютона — связь точной первообразной и площади).**

▷ Пусть

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  — положительная и непрерывная на  $[a, b]$ .

▷ Тогда

$f$  — обладает точной первообразной  $F(x)$  на  $[a, b]$ , причём  $F(x) = \mu_2(W_f(a, x))$ .

▷ Доказательство.

- Идём с конца: пусть  $x_0 \in (a, b)$ , тогда  $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0$ : если  $|x - x_0| < \delta$ , то  $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$  — следует из непрерывности функции  $f$  на  $[a, b]$ .
- Т.к.  $F(x) = \mu_2(W_f(a, x)) \Rightarrow F(x) - F(x_0) = \mu_2(W_f(a, x)) - \mu_2(W_f(a, x_0)) = [\mu_2(W_f(a, x_0)) + \mu_2(W_f(x_0, x))] - \mu_2(W_f(a, x_0)) = \mu_2(W_f(x_0, x))$ .
- Рассмотрим:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\varepsilon}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow (x - x_0) \cdot \left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \mu_2(W_f(x_0, x)) \leq (x - x_0) \cdot \left(f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow (x - x_0) \cdot \left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq F(x) - F(x_0) \leq (x - x_0) \cdot \left(f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow (\text{т.к. } x < x_0) \\
 & \Rightarrow \left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{(x - x_0)} \leq \left(f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{(x - x_0)} - f(x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

- Аналогично для случая  $x_0 > x$ .
- Переходя к пределу, при  $x \rightarrow x_0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем, что  $|F'(x_0) - f(x_0)| = 0 \Rightarrow F$  — первообразная.

□

*Следствие 1.1.18 (Связь первообразной и площади криволинейной трапеции).*

- ▷  $F(b) - F(a)$ , где  $F$  — первообразная положительной функции  $f$ , является площадью криволинейной трапеции. Если  $\phi$  — произвольная функция, то можно рассмотреть  $\phi^+ \geq 0$  и  $\phi^- \leq 0$ .

## 1.2 Методы нахождения неопределённых интегралов

**Пример 1.2.1 (Элементарных функций, не имеющих элементарные первообразные).**

$$\frac{\sin x}{x}; \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; e^{-x^2}; e^{-1/x}.$$

Методы нахождения неопределённых интегралов:

1. Надо взять таблицу производных, переставить столбцы и обозвать таблицей интегралов.
2. Из линейности и однородности: если  $F_i(x)$  — неопределённый интеграл от  $f_i(x)$ , т.е.  $\int f_i(x) dx = F_i(x) + C$ ; тогда

$$C + \sum_i \lambda_i \cdot F_i(x) = \int \sum_i \lambda_i \cdot f_i(x) dx.$$

3. Замена переменной: если  $[F(x)] = \int f(x) dx$ , а  $x = \phi(y)$ , то  $[F(\phi(y))] = \int f(\phi(y)) \cdot \phi'(y) dy$ , т.к.  $F'(\phi(y)) = F'_x(x) \cdot \phi'(y)$  и учитывая, что  $F'_x(x) = f(\phi(y))$ .
4. Интегрирование по частям: т.к.  $(F \cdot G)' = F' \cdot G + G' \cdot F$ , то  $F \cdot G = \int F' \cdot G dx + \int G' \cdot F dx \Rightarrow$

$$\int F' \cdot G dx = F \cdot G - \int G' \cdot F dx.$$

5. Угадывание ответа: например для  $\int \sin(\alpha x) \cdot e^{\beta x} dx$ :

$$F(x) = e^{\beta x} \cdot G(x) =_{\text{(ожидается)}} e^{\beta x} \cdot (A \cdot \sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x)),$$

где  $A$  и  $B$  — можно найти из  $F'(x) = f(x)$ . Так же:  $\int x^2 \cdot e^{2x} dx = e^{2x} \cdot (A \cdot x^2 + b \cdot x + c)$ .

6. Дробно-рациональных функций: пусть  $P_n(x)$  и  $Q_m(x)$  — два многочлена, причём  $\deg P_n = n < m = \deg Q_m \Rightarrow f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  — имеет элементарную производную.

**Теорема 1.2.2 (Первообразная для дробно-рациональных функций).**

- ▷ Первообразная для дробно-рациональных функций является элементарной функцией.
- ▷ Доказательство.

- Из алгебры известно, что  $Q(x)$  можно разложить:

$$Q(x) = A_0 \cdot (x - x_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (x - x_m)^{r_m} \cdot (x^2 + p_q \cdot x + q_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_t \cdot x + q_t)^{s_t},$$

где  $r_1 + r_2 + \dots + r_m + 2 \cdot (s_1 + s_2 + \dots + s_t) = \deg Q$ ;  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — вещественные корни уравнения  $Q(x) = 0$ ;  $r_1, r_2, \dots, r_m$  — кратности соответствующих корней и  $A_0, p_1, p_2, \dots, p_t, q_1, q_2, \dots, q_t$  — вещественные числа.

○ Преобразуем:

$$\begin{aligned}
 P(x) &= u_{11} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_1)^1} + u_{12} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_1)^2} + \dots + u_{1r_1} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_1)^{r_1}} + \dots + \\
 &\quad + u_{m1} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_m)^1} + u_{m2} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_m)^2} + \dots + u_{mr_m} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_m)^{r_m}} + \\
 &\quad + \dots + \\
 &\quad + (v_{11} \cdot x + w_{11}) \cdot \frac{Q(x)}{(x^2 + p_1 \cdot x + q_1)^1} + \dots + (v_{1s_1} \cdot x + w_{1s_1}) \cdot \frac{Q(x)}{(x^2 + p_1 \cdot x + q_1)^{s_1}} + \dots + \\
 &\quad + (v_{k1} \cdot x + w_{k1}) \cdot \frac{Q(x)}{(x^2 + p_k \cdot x + q_k)^1} + \dots + (v_{ks_k} \cdot x + w_{ks_k}) \cdot \frac{Q(x)}{(x^2 + p_k \cdot x + q_k)^{s_k}} = \\
 &= \sum_{\alpha_1=1}^{r_1} \left( u_{1\alpha_1} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_1)^{\alpha_1}} \right) + \sum_{\alpha_2=1}^{r_2} \left( u_{2\alpha_2} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_2)^{\alpha_2}} \right) + \dots + \sum_{\alpha_m=1}^{r_m} \left( u_{m\alpha_m} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_m)^{\alpha_m}} \right) + \\
 &\quad + \sum_{\beta_1=1}^{s_1} \left( (v_{1\beta_1} \cdot x + w_{1\beta_1}) \cdot \frac{Q(x)}{(x^2 + p_1 \cdot x + q_1)^{\beta_1}} \right) + \dots + \sum_{\beta_t=1}^{s_t} \left( (v_{t\beta_t} \cdot x + w_{t\beta_t}) \cdot \frac{Q(x)}{(x^2 + p_t \cdot x + q_t)^{\beta_t}} \right) = \\
 &= \sum_{j=1}^m \left( \sum_{\alpha_j=1}^{r_j} u_{j\alpha_j} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_j)^{\alpha_j}} \right) + \sum_{k=1}^t \left( \sum_{\beta_k=1}^{s_k} (v_{k\beta_k} \cdot x + w_{k\beta_k}) \cdot \frac{Q(x)}{(x^2 + p_k \cdot x + q_k)^{\beta_k}} \right),
 \end{aligned}$$

тогда можно представить

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{\alpha_j=1}^{r_j} \frac{u_{j\alpha_j}}{(x-x_j)^{\alpha_j}} \right) + \sum_{k=1}^t \left( \sum_{\beta_k=1}^{s_k} \frac{v_{k\beta_k} \cdot x + w_{k\beta_k}}{(x^2 + p_k \cdot x + q_k)^{\beta_k}} \right),$$

где  $u_{j\alpha_j}$ ,  $v_{k\beta_k}$  и  $w_{k\beta_k}$  — вещественные числа, определённые единственным способом.

○ Получается, что для взятия интеграла от такой  $f(x)$  — достаточно уметь брать интегралы вида

1.  $\int \frac{dx}{(x-a)^k}$ ,  $k > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$

2.  $\int \frac{a \cdot x + b}{(x^2 + p \cdot x + q)^k} dx$ ,  $k > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\checkmark \int \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} \ln|x-a|, & k = 1; \\ \frac{1}{(1-k) \cdot (x-a)^{k-1}}, & k > 1. \end{cases}$$

$\checkmark \int \frac{a \cdot x + b}{(x^2 + p \cdot x + q)^k} dx$ : рассмотрим  $x^2 + p \cdot x + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ . Пусть  $q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 > 0$ , тогда  $\exists \delta: \delta^2 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ , получается:

$$x^2 + p \cdot x + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \delta^2 = \delta^2 \cdot \left(\left(\frac{x + p/2}{\delta}\right)^2 + 1\right).$$

Пусть  $t = \frac{x+p/2}{\delta} \Rightarrow x = \delta \cdot t - \frac{p}{2} \Rightarrow dx = \delta dt \Rightarrow$

$$\int \frac{a \cdot x + b}{(x^2 + p \cdot x + q)^k} dx = \int \frac{a \cdot (\delta \cdot t - p/2) + b}{(\delta^2 \cdot (t^2 + 1))^k} \cdot \delta dt = \frac{1}{\delta^{2k-1}} \cdot \int \frac{a\delta \cdot t - a \cdot p/2 + b}{(t^2 + 1)^k} dt$$

или просто

$$\int \frac{a \cdot x + b}{(x^2 + 1)^k} dx = \int \frac{a \cdot x}{(x^2 + 1)^k} dx + \int \frac{b}{(x^2 + 1)^k} dx.$$

$$\int \frac{a \cdot x}{(x^2 + 1)^k} dx = \int \frac{a \cdot 2x}{(x^2 + 1)^k} dx = \frac{a}{2} \cdot \int \frac{dy}{y^k} = \begin{cases} \frac{a}{2} \cdot \ln|x^2 + 1|, & k = 1; \\ \frac{1}{2 \cdot (1-k) \cdot (x^2 + 1)^{k-1}}, & k \neq 1. \end{cases}$$

Пусть  $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$ , тогда  $I_0 = x$ ,  $I_1 = \arctg x$ . Представим

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = \int \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^2 + 1)^{n+1}} = \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^{n+1}} + \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}},$$

значит

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^{n+1}}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{x \cdot (x^2 + 1)' dx}{(x^2 + 1)^{n+1}} \stackrel{\text{по частям}}{=} \\
& \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 1) \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^{n+1}} - \frac{1}{2} \cdot \int (x^2 + 1) \cdot \frac{(x^2 + 1)^{n+1} - x \cdot (n+1) \cdot (x^2 + 1)^n \cdot 2x}{(x^2 + 1)^{2n+2}} dx = \\
& \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^n} - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x^2 \cdot (n+1)}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx = \\
& \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^n} - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} + (n+1) \cdot \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx \Rightarrow \\
& \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^n} - \frac{1}{2} \cdot I_n + n \cdot \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx + \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx \Rightarrow \\
& \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx = \frac{1}{2n} \cdot I_n - \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^n} \Rightarrow \\
& I_n = \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx + I_{n+1} = \frac{1}{2n} \cdot I_n - \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + I_{n+1} \Rightarrow \\
& I_{n+1} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n.
\end{aligned}$$

**Вывод:** Первообразная для дробно-рациональной функции является элементарной функцией.

□

### 1.3 Свойства определённых интегралов

**Теорема 1.3.1 (Об интегрируемости на объединении отрезков).**

▷ Пусть

$J = \langle a, b \rangle$ ; для  $c \in (a, b)$ :  $J_+ = (c, \infty)$ ,  $J_- = (-\infty, c)$ ;  $f$  — интегрируема на  $J \cap J_+$  и на  $J_- \cap J$ .

▷ Тогда

$f$  — интегрируема на  $J$ .

▷ Доказательство.

◦ Пусть  $F_1$  — первообразная к  $f$  на  $J_- \cap J$ , а  $F_2$  — на  $J \cap J_+$ ; выберем

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) - F_1(c), & x < c; \\ F_2(x) - F_2(c), & x > c; \\ 0, & x = c. \end{cases}$$

тогда  $F$  — непрерывна при  $x < c$  и при  $x > c$ ;  $\lim_{x \rightarrow c+0} F(x) = 0 = F(c)$ ,  $\lim_{x \rightarrow c-0} F(x) = 0 = F(c) \Rightarrow F$  — непрерывна.

◦ Пусть  $E_1$  — множество, где  $F_1$  не дифференцируема,  $E_2$  — множество, где  $F_2$  не дифференцируема; тогда  $F$  — не дифференцируема на  $E_1 \cup E_2 \cup \{c\}$ , но  $E_1$  и  $E_2$  — не более, чем счётны  $\Rightarrow F$  — первообразная.

□

**Теорема 1.3.2 (Линейность определённого интеграла).**

▷ Пусть

$f$  и  $g$  — интегрируемы на  $[a, b]$ .

▷ Тогда

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ :  $h = \lambda \cdot f + \mu \cdot g$  — интегрируема на  $(a, b)$  и при этом  $\int_a^b h(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx + \mu \cdot \int_a^b g(x) dx$  — свойство линейности или аддитивности.

▷ Доказательство.

◦ Пусть  $F$  и  $G$  — первообразные для  $f$  и  $g$  соответственно, тогда согласно теореме 1.1.8 на стр. 7:  $\int_a^b h(x) dx \stackrel{def}{=} F(b) - F(a) = \lambda(F(b) - F(a)) + \mu(G(b) - G(a)) = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$ .

□

**Теорема 1.3.3 (Ориентированность определённого интеграла).**

▷ Пусть

 $f$  — интегрируема на  $[a, b]$ .

▷ Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

▷ Доказательство.

◦ Пусть  $F$  — первообразная, тогда  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = - \int_b^a f(x) dx$ .

□

**Следствие 1.3.4 (Интеграл одного предела).**▷  $\int_a^a f(x) dx = 0$ .**Теорема 1.3.5 (Монотонность определённого интеграла).**

▷ Пусть

 $f$  — интегрируема на  $[a, b]$  и  $f(x) \geq 0$  на  $[a, b]$  в основном.

▷ Тогда

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

▷ Доказательство.

◦ Пусть  $F$  — первообразная для  $f(x)$ , тогда  $F'(x) = f(x) \geq 0$  — в основном  $\Rightarrow F'(x) \geq 0$  — в основном  $\Rightarrow$  (согласно уточнёному критерию монотонности 1.1.10 на стр. 7)  $F(x)$  — возрастает  $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ . Если  $b > a$ , то из возрастания  $\Rightarrow F(b) \geq F(a) \Rightarrow F(b) - F(a) \geq 0$ .

◦ Если хотя бы в одной точке  $c \in (a, b): f(c) > 0$ , то  $\int_a^b f(x) dx > 0$ , действительно: пусть  $c$  — такая точка, тогда  $\exists(\alpha, \beta) \subseteq [a, b]: f(x) > 0 - \forall x \in (\alpha, \beta)$ , но т.к.  $F(x)$  — монотонно возрастает и непрерывна  $\Rightarrow F(x)$  — строго монотонно возрастает в окрестности точки  $c$ , т.е.  $(\alpha, \beta) \Rightarrow F(\beta) > F(\alpha)$ . А в силу монотонности получается:  $F(b) \geq F(\beta) > F(\alpha) \geq F(a) \Rightarrow F(b) > F(a) \Rightarrow F(b) - F(a) > 0$ .

□

**Следствие 1.3.6 (Неравенство интегралов).**

▷ Пусть

Пусть  $f$  и  $g$  — интегрируемы на  $[a, b]$  и  $f(x) \leq g(x)$  — в основном на  $[a, b]$ .

▷ Тогда

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

▷ Доказательство.

◦ Рассмотрим функцию  $h(x) = g(x) - f(x)$ , заметим, что  $h(x) \geq 0$  — в основном, теперь применим теорему 1.3.5.

□

**Следствие 1.3.7 (Неравенство интегралов с модулем).**

▷ Пусть

 $f$  и  $h$  — интегрируемы на  $[a, b]$ ,  $|f(x)| \leq h(x)$  — на  $[a, b]$  в основном.

▷ Тогда

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b h(x) dx.$$

▷ Доказательство.

- Т.к.  $|f(x)| \leq h(x)$  — в основном на  $[a, b]$ , то это эквивалентно, что  $-h(x) \leq f(x) \leq h(x)$  на  $[a, b]$  в основном, а согласно Следствию 1.3.6 получаем:  $-\int_a^b h(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b h(x) dx \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b h(x) dx$ .

□

*Следствие 1.3.8 (Неравенство интегралов с модулями).*

▷ Пусть

$f(x)$  — интегрируема на  $[a, b]$ .

▷ Тогда

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

▷ Доказательство.

- Получается из Следствия 1.3.7, если положить  $h(x) = |f(x)|$ .

□

*Следствие 1.3.9 (Неравенство интеграла и константы).*

▷ Пусть

$f(x)$  — интегрируема на  $[a, b]$  и  $f(x) \leq M - \forall x \in [a, b]$ .

▷ Тогда

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M \cdot |b - a|.$$

▷ Доказательство.

- $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (\text{Следствие 1.3.8}) \int_a^b |f(x)| dx \leq (\text{Следствие 1.3.6}) \int_a^b M dx = M \cdot \int_a^b dx = M \cdot |b - a|.$

□

**Теорема 1.3.10 (Аддитивность интегралов по отрезкам).**

▷ Пусть

$f(x)$  — интегрируема на  $[a, b]$  и  $c \in (a, b)$ .

▷ Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

▷ Доказательство.

- Пусть  $F$  — первообразная на  $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

□

**Теорема 1.3.11 (О замене переменных в определённом интеграле).**

▷ Пусть

$f$  — интегрируема на  $I = \langle a, b \rangle$ ;  $F$  — первообразная  $f$  на  $I$ ;  $\phi$  — определена на некотором отрезке  $J = \langle c, d \rangle$ :  $\phi(J) \subseteq I$  и выполнены следующие условия

- $\phi$  дифференцируема и непрерывна на  $(c, d)$  — в основном;
- Множество  $\{t \in J \mid \text{в точках } x = \phi(t) - F(x) \text{ не определена}\}$  — не более, чем счётно.

▷ Тогда

Функция  $(f \circ \phi(t)) \cdot \phi'(t)$  — интегрируема на  $J$  и  $(F \circ \phi)(t)$  — первообразная для неё на  $J$ , причём  $\forall p, q \in J$  имеет место:  $\int_p^q f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = \int_{\phi(p)}^{\phi(q)} f(x) dx.$

▷ Доказательство.

- ✓  $E_1 = \{t \in \langle c, d \rangle \mid \phi - \text{не дифференцируема в точке } t\}$ , тогда по условию  $E_1$  — не более, чем счётно.
- ✓  $E_2 = \{t \in \langle c, d \rangle \mid \text{в точке } x = \phi(t) - F(x) - \text{не дифференцируема}\}$ , тогда согласно условию теоремы  $E_2$  — тоже не более, чем счётное;
- ✓ обозначим  $E = E_1 \cup E_2$  — не более, чем счётное из очевидных соображений.
- Пусть  $t \in (c, d) \setminus E$ , тогда  $\phi$  — дифференцируема в этой точке и, соответственно  $(F \circ \phi)(t)$  — тоже; следовательно  $F(x)$  — дифференцируема в точке  $x = \phi(t) \Rightarrow$  функция  $G(t) = F(\phi(t))$  — дифференцируема в точке  $t \Rightarrow$  (теорема о дифференцировании суперпозиции)  $G'(t) = F'_x(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$ . Это равенство выполняется в основном  $\Rightarrow G(t)$  — является первообразной для  $f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$  на  $J \Rightarrow f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$  — интегрируема на  $J$ .
- Пусть  $p$  и  $q \in J$ , тогда в силу того, что  $G(t)$  — первообразная  $\Rightarrow \int_p^q f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = G(p) - G(q) = F(\phi(p)) - F(\phi(q)) = \int_{\phi(p)}^{\phi(q)} F(x) dx$ .

□

*Следствие 1.3.12 (Условия на  $\phi(t)$ ).*

- ▷ Самое трудное — это разобраться, когда выполнена  $\phi$ ; требуются условия:
- Если функция  $\phi$  — дифференцируема и монотонна на  $(c, d)$ , то  $\phi$  — взаимнооднозначно отображение, но при взаимнооднозначном отображении счётное множество переходит в счётное  $\Rightarrow$  если  $F(x)$  — дифференцируема в основном, то множество точек  $\{t \mid x = \phi(t) : F(x) - \text{не дифференцируема}\}$  — не более, чем счётно.
  - Если  $F(x)$  — дифференцируема в точном смысле (т.е. во всех точках), то множество точек  $\{t \in (c, d) \mid F(x) - \text{не определена в } x = \phi(t)\}$  — пусто.

## 1.4 Критерий интегрируемости функций на интервале $[a, b]$ . Несобственные интегралы

**Пример 1.4.1 (Применение несобственного интеграла).**

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = F(1) - \lim_{x \rightarrow 0} F(x),$$

где

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x},$$

т.е. на  $[\varepsilon, 1]$ ,  $\varepsilon > 0$  — интегрируема. Как обойти? Лекарство — несобственный интеграл.

**Замечание 1.4.2 (Нахождение первообразной).**

- ▷ Пусть  $f(x)$  — интегрируема на  $[a, b]$ , тогда  $\forall x, x_0 \in [a, b] : x > x_0 : F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$  — первообразная для  $f$  (из Леммы (Ньютона) 1.1.17 на стр. 8 (или из формулы Ньютона-Лейбница)).

**Теорема 1.4.3 (О несобственном интеграле).**

▷ Пусть

Пусть  $f$  — интегрируема на  $[a, b]$ .

▷ Тогда

Для того, чтобы  $f$  была интегрируемой на  $[a, b]$  — необходимо и достаточно, чтобы предел  $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) \cdot dt$  — существовал. Если он существует, то  $\int_a^b f(t) \cdot dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) \cdot dt$  (★). Это и есть определение несобственного интеграла. Совершенно аналогично определяется интеграл на  $(a, b]$  и  $(a, b)$ .

▷ Доказательство.

- Необходимость: пусть  $f$  — интегрируема на  $[a, b]$ , а  $F(x)$  — её первообразная там же, тогда в силу определения первообразной:  $F(x)$  — непрерывна на  $[a, b] \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow b} F(x) = F(b)$ . Заметим также, что  $\lim_{x \rightarrow b} (F(x) - F(a)) = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) \cdot dt$  С другой стороны  $\lim_{x \rightarrow b} (F(x) - F(a)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) \cdot dt$ .
- Достаточность: пусть  $F_1(x)$  — такая, что  $F_1(x) = F(x)$  на  $[a, b)$ , а  $F_1(b) = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x)$ , тогда  $F'_1(x) = f(x)$  в основном.

**ОПР 1.4.4 (Определение интеграла на отрезке).**

Пусть  $f(x)$  — интегрируема на  $(a, b)$ , а  $F(x)$  — её первообразная там же и ещё существуют  $\lim_{x \rightarrow b-0} F(x) = K$  и  $\lim_{x \rightarrow a+0} F(x) = L$ , тогда  $\int_a^b f(x) \cdot dx =$  (по определению интеграла)  $K - L = F(x)|_{x=a+0}^{x=b-0}$  (определение интеграла на  $[a, b]$ ).

**Теорема 1.4.5 (Интегрирование по частям для не собственных интегралов).**

▷ Пусть

$f$  и  $g$  — интегрируемы на  $\langle a, b \rangle$ , а  $F, G$  — их первообразные там же соответственно,  $f \cdot g$  и  $f \cdot G$  — интегрируемы на  $[a, b]$ .

▷ Тогда

$F \cdot g$  — интегрируема и имеет место равенство:  $\int_a^b f \cdot G = [F(x) \cdot G(x)]|_{x=a+0}^{x=b-0} - \int_a^b F \cdot g \cdot dx$ .

**Теорема 1.4.6 (Коши о существовании не собственного интеграла).**

▷  $\int_a^b f(x) \cdot dx$  — сходится (если существует)  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists c \in [a, b] : \forall [\alpha, \beta] \subset [c, b] : \left| \int_\alpha^\beta f(x) \cdot dx \right| < \varepsilon$ , т.е. если  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , то интегрируема и на  $[a, b]$ .

▷ Доказательство.

○ Необходимость: пусть  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$  на  $[a, b]$ , т.е.  $F(x) = \int_a^{x \in [a, b]} f(t) \cdot dt$ . Т.к. всюду существует  $\lim_{x \rightarrow b-0} F(x)$ , то  $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in [a, b] : |F(x) - F(b)| < \frac{\varepsilon}{2} - \forall x \in [c, b]$  (из непрерывности функции). Рассмотрим:

$$\begin{aligned} \left| \int_\alpha^\beta f(x) \cdot dx \right| &= \left| \int_a^\beta f(x) \cdot dx - \int_a^\alpha f(x) \cdot dx \right| = |F(\beta) - F(\alpha)| = |F(\beta) - F(\alpha)| = \\ &= |F(\beta) - F(b) + F(b) - F(\alpha)| \leq |F(\beta) - F(b)| + |F(b) - F(\alpha)| < \\ &<_{([\alpha, \beta] \subset [c, b] \Rightarrow \alpha, \beta \in [c, b])} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

○ Достаточность: пусть  $x_n$  — пробная последовательность:  $x_n \rightarrow b$ ,  $x_n \neq b$ ;  $\varepsilon > 0$ , тогда  $\exists c : \forall [\alpha, \beta] \subset [c, b] : \left| \int_\alpha^\beta f(t) \cdot dt \right| < \varepsilon$ . Раз уж  $x_n \rightarrow b$ , стало быть существует номер  $M : x_n \in [c, b] - \forall n > M$ .

Пусть  $i, j > M$ , возьмём  $x_i = \alpha$ , а  $x_j = \beta$ , т.к.  $\left| \int_\alpha^\beta f(t) \cdot dt \right| = |F(\beta) - F(\alpha)| < \varepsilon - \forall \alpha, \beta \Rightarrow |F(x_i) - F(x_j)| < \varepsilon$ . Получается, что  $F(x_n)$  — последовательность Коши  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} F(x_n) = Z$ , но т.к.  $x_n$  — произвольная последовательность, то в силу теоремы Гейна:  $\exists \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = Z$ . С другой стороны  $Z = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} \int_a^x f(t) \cdot dt \Rightarrow$  интеграл существует.

□

**Теорема 1.4.7 (Асимптотический признак существования несобственного интеграла).**

▷ Пусть

$f$  — интегрируема на  $[a, b]$ ,  $h(x)$  — интегрируема на  $[a, b]$ ,  $h(x) > 0$ .

▷ Тогда

Если

1.  $f(x) = O(h(x))$  или
2.  $f(x) = o(h(x))$  или
3.  $f(x) \sim h(x)$

то в любом из этих случаев  $f(x)$  — интегрируема на  $[a, b]$ .

▷ Доказательство.



- Пусть  $f(x) = O(h(x))$ , говорят, что при этом:  $\exists c \in [a, b]$  такая, что  $|f(x)| \leq K \cdot |h(x)| - \forall x \in [c, b], K \in \mathbb{R}$ .  
Т.к.  $h(x)$  — интегрируема на  $[a, b]$ , то

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 : \exists d \in [c, b] : \forall [\alpha, \beta] \subset [d, b] : \left| \int_{\alpha}^{\beta} h(x) \cdot dx \right| &< \frac{\varepsilon}{K}. \\ \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot dx \right| &\leq_{(\text{из монотонности интеграла и его свойств})} \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| \cdot dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} K \cdot |h(x)| \cdot dx \leq \\ &\leq_{(\text{т.к. } h(x) \text{ — положительная})} K \cdot \int_{\alpha}^{\beta} h(x) \cdot dx \leq \left| K \cdot \int_{\alpha}^{\beta} h(x) \cdot dx \right| \leq K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon \Rightarrow \\ \forall \varepsilon > 0 : \exists d : \forall [\alpha, \beta] \subset [d, b] : \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot dx \right| &< \varepsilon, \end{aligned}$$

а в силу критерия Коши для несобственных интегралов получаем, что  $f$  — интегрируема на  $[a, b]$ .

- Пусть  $f(x) = o(h(x))$ , тогда по свойствам  $O$  и  $o$  получаем, что  $f(x) = O(h(x))$ .
- Если  $f(x) \sim h(x)$ , то  $f(x) = O(h(x))$ .
- Запас положительных интегрируемых функций для использования этой теоремы:

$h(x) = \frac{1}{(x-b)^k}$  : если  $k < 1$ , то  $h(x)$  — интегрируема на  $[a, b]$  — это следует из определения, т.к.

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x \frac{1}{(t-b)^k} \cdot dt = \lim_{x \rightarrow b} \left( \frac{1}{(x-b)^{k+1}} \cdot \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(a-b)^{k+1}} \cdot \frac{1}{k+1} \right).$$

□

#### Лемма 1.4.8 (интегральное неравенство Абеля).

▷ Пусть

Дан  $\int_a^b u(t) \cdot v(t) \, dt$ , где  $u(t) \geq 0$  — дифференцируема на  $(a, b)$ , непрерывна и убывает на  $[a, b]$  (т.е.  $u'(x) \leq 0 - \forall x \in (a, b)$ ;  $\sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x v(t) \cdot dt \right| \leq S \in \mathbb{R}$ ;  $v$  — интегрируема на  $[a, b]$ ).

▷ Тогда

$\left| \int_a^b u(t) \cdot v(t) \cdot dt \right| \leq u(a) \cdot S$  — интегральное неравенство Абеля.

▷ Доказательство.

- Рассмотрим функцию  $\tau(x) = \int_a^x v(t) \, dt$ : в силу того, что  $v$  — интегрируема,  $\tau(x)$  — является первообразной для  $v$ , т.е.  $\tau'(x) = v(x)$ ,  $\tau(a) = 0$ .
- Пусть  $c \in (a, b)$ , рассмотрим

$$\begin{aligned} \left| \int_a^c u(t) \cdot v(t) \, dt \right| &= \left| \int_a^c u(t) \cdot \tau'(t) \, dt \right| =_{(\text{по частям})} \left| u(t) \cdot \tau(t) \Big|_{t=a}^{t=c} - \int_a^c u'(t) \cdot \tau(t) \, dt \right| = \\ &= \left| u(c) \cdot \tau(c) - u(a) \cdot \tau(a) + \int_a^c (-u'(t)) \cdot \tau(t) \, dt \right| = \left| u(c) \cdot \tau(c) + \int_a^c (-u'(t)) \cdot \tau(t) \, dt \right| \leq \\ &\leq |u(c) \cdot \tau(c)| + \left| \int_a^c (-u'(t)) \cdot \tau(t) \, dt \right| = u(c) \cdot |\tau(c)| + \left| \int_a^c (-u'(t)) \cdot \tau(t) \, dt \right| \leq \\ &\leq u(c) \cdot S + \int_a^c |-u'(t)| \cdot |\tau(t)| \, dt \leq u(c) \cdot S + S \cdot \int_a^c |-u'(t)| \, dt = \\ &=_{(\text{т.к. } u'(t) < 0)} u(c) \cdot S - S \cdot \int_a^c u'(t) \, dt = S \cdot (u(c) - u(c) + u(a)) = S \cdot u(a). \end{aligned}$$

□

#### Теорема 1.4.9 (Признак Абеля-Дирихле сходимости несобственного интеграла).

▷ Функция  $u(x) \cdot v(x)$  — интегрируема на  $[a, b]$ , если выполнены следующие условия:

- $u(x) \geq 0$  — непрерывна и дифференцируема на  $[a, b]$ , причём  $\lim_{t \rightarrow b} u(t) = 0$  и  $u(x)$  — монотонно убывает.
- Функция  $v(x)$  — интегрируема на  $[a, b]$ , а её первообразная ограничена на  $[a, b]$  (т.е.  $\sup \int_{-}^x v(t) \, dt \leq S \in \mathbb{R}$

▷ Доказательство.

- Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $S = \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x v(t) dt \right|$ , т.к.  $\lim_{t \rightarrow b-0} u(t) = 0$ , то  $\exists c \in [a, b] \forall t \in [c, b] : u(t) < \frac{\varepsilon}{2 \cdot S}$
- Пусть  $[\alpha, \beta] \subset [c, b]$ , рассмотрим

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\alpha}^{\beta} u(t) \cdot v(t) \cdot dt \right| \leq \\ & \leq (\text{неравенство Абеля}) u(\alpha) \cdot \sup_{x \in [\alpha, \beta]} \left| \int_{\alpha}^x v(t) dt \right| = u(\alpha) \cdot \sup_{x \in [\alpha, \beta]} \left| \int_a^x v(t) dt - \int_a^{\alpha} v(t) dt \right| \leq \\ & \leq u(\alpha) \cdot \left( \sup_{x \in [\alpha, \beta]} \left| \int_a^x v(t) dt \right| + \sup_{x \in [\alpha, \beta]} \left| \int_a^{\alpha} v(t) dt \right| \right) \leq u(\alpha) \cdot (S + S) < \frac{\varepsilon}{2 \cdot S} \cdot 2 \cdot S = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Пример 1.4.9.1 (К теореме).**

- $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot dx$  — интеграл Дирихле, сходится ли? Пусть  $v(x) = \sin x$ , а  $u(x) = \frac{1}{x}$  — непрерывна, дифференцируема и положительна,  $u'(x) < 0$  (т.е. удовлетворяет всему на  $[1, \infty)$ ). Первообразная  $v(x) : \int_1^x \sin t \cdot dt = -\cos t \Big|_{t=1}^{t=x} = -\cos x + \cos 1$ , а  $|\cos x + \cos 1| < 2 \Rightarrow$  всё выполнено  $\Rightarrow$  сходится.

**Теорема 1.4.10 (интегральный признак Коши сходимости числового ряда).**▷ Пусть

Дан интервал  $[a, \infty]$ , где  $f(x)$  обладает следующими свойствами:

- $f(x) \geq 0$  на  $[a, \infty)$
- $f(x)$  — монотонно убывает, причём  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .
- $a_n = f(n)$ .

▷ Тогда

Ряд  $\sum a_n$  — сходится, если  $\exists \int_a^{\infty} f(x) dx$  и наоборот: если  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  — не существует, то ряд расходится.

▷ Доказательство.

- Рассмотрим две функции:  $u(t) = f(n+1) - \forall t \in [n, n+1)$  и  $v(t) = f(t) - \forall t \in [n, n+1)$ , тогда  $u(t) \leq v(t) - \forall t$   $u(t) \leq f(t) \leq v(t) - \forall t \Rightarrow \int_a^{\alpha} u(t) \cdot dt \leq \int_a^{\alpha} f(t) \cdot dt \leq \int_a^{\alpha} v(t) \cdot dt$  — из свойств монотонности интеграла.
- $\int_a^{\alpha} u(t) dt = \sum_{n=a}^{\alpha-1} \int_n^{n+1} u(t) dt = \sum_{n=a}^{\alpha-1} \int_n^{n+1} f(n+1) \cdot dt = \sum_{n=a}^{\alpha-1} f(n+1) \cdot \int_n^{n+1} dt = \sum_{n=a}^{\alpha-1} a_{n+1} \Rightarrow \sum_{n=a}^N a_{n+1} \leq \int_a^N f(t) dt \leq \sum_{n=a}^N a_n$  Если ряд  $\sum a_n$  — сходится, то интеграл существует.

□

**Пример 1.4.10.1 (К теореме).**

- $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^k} : f(x) = \frac{1}{x^k}$ , если  $k > 0$ , то  $f(x)$  — монотонно убывает и  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ,  $f(x) > 0$  на  $[1, \infty)$ .

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \frac{t^{-k+1}}{-k+1} \Big|_1^x = \frac{x^{-k+1}}{-k+1} - \frac{1}{-k+1},$$

где  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-k+1}$  — существует.

**1.5 Интеграл Римана (то мы изучали интеграл Ньютона)****ОПР 1.5.1 (разбиения и суммы Римана).**

Пусть  $I = [a, b]$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , причём  $f$  — определена во всех точках интервала и  $|f(x)| \leq M - \forall x \in [a, b]$  (т.е. ограничена). Разбиением интервала  $[a, b]$  называется набор чисел  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b$ , обозначим за  $\xi = (a, x_1, \dots, x_n, b)$ . Будем говорить, что разбиение пунктировано, если указан набор точек  $t_i \mid t_i \in [x_i, x_{i+1}]$ . Нормой разбиения  $\xi$  называется  $\|\xi\| = \max_{\forall i} |x_{i+1} - x_i|$ . Для любого пунктированного разбиения  $\xi$  определим число

$$R(f, \xi) = \sum_{i=1}^N f(t_i) \cdot |x_{i+1} - x_i|, \text{ где } R(f, \xi) \text{ — называется суммой Римана функции } f \text{ и разбиения } \xi.$$

**ОПР 1.5.2 (R1. интеграл Римана).**

Пусть  $f$  — определена на  $[a, b]$  и ограничена, тогда  $f$  — называется интегрируемой по Риману, если  $\exists L \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \mid \forall \xi : \|\xi\| < \delta \Rightarrow |R(f, \xi) - L| < \varepsilon$  — независимо от пунктирования (!). В этом случае  $L$  — называется

### 1.5.2.1 Построение Дарбу

▷ Пусть  $f$  — определена на  $[a, b]$  и ограничена, тогда существуют  $m$  и  $M$  такие, что  $m \leq f(x) \leq M - \forall x \in [a, b]$ , где  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ .

Пусть  $\xi$  — некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$ , тогда возьмём  $m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x)\}$ ,  $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x)\}$ ,  $\Delta_k =$

$|x_k - x_{k-1}|$ , тогда  $S_\xi = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta_k$ , где  $n$  — количество отрезков разбиения, называется *верхней интегральной*

*суммой*, а  $s_\xi = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta_k$  — соответственно нижней.

### 1.5.2.2 Факт

▷  $\forall k: m \leq m_k \leq M_k \leq M$  (по определению)  $\Rightarrow \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta_k \leq M \cdot \sum_{k=1}^n \Delta_k = M \cdot (b - a)$ , т.е.  $\forall \xi: S_\xi \leq M \cdot (b - a)$ ,

аналогично:  $\sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta_k \geq m \cdot \sum_{k=1}^n \Delta_k = m \cdot (b - a)$ ,  $\forall \xi: s_\xi \geq m \cdot (b - a) \Rightarrow \forall \xi: m \cdot (b - a) \leq s_\xi \leq S_\xi \leq M \cdot (b - a)$ .

### ОПР 1.5.2.3 (Верхнего и нижнего интеграла).

Обозначим через  $\bar{J} = \inf S_\xi$ , где  $\inf$  берётся по всевозможным разбиениям отрезка  $[a, b]$ .  $\bar{J}$  — называется верхним интегралом и обозначается:  $\bar{J} = \int_a^b f(x) \cdot dx$ . Аналогично для нижнего:  $\underline{J} = \sup s_\xi$  и обозначается как  $\underline{J} = \int_a^b f(x) \cdot dx$ .

### ОПР 1.5.3 (R2. Интегрируемость по Риману).

Пусть  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — ограничена, тогда  $f$  — называется интегрируемой по Риману, если  $\bar{J}$  совпадает с  $\underline{J}$ , в этом случае  $J = \bar{J} = \underline{J}$  — называется интегралом Римана и обозначается:  $J = \int_a^b f(x) \cdot dx$ .

## 1.5.4 Теорема Дарбу

### ОПР 1.5.4.1 (продолжения разбиения).

Разбиение  $\xi_1$  — называется продолжением разбиения  $\xi_2$ , если все точки разбиения  $\xi_2$  содержатся в разбиении  $\xi_1$ .

### ОПР 1.5.4.2 (суммы разбиений).

Пусть  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — пара разбиений, через  $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$  назовём разбиение, которое содержит точки разбиения  $\xi_1$  и точки разбиения  $\xi_2$ . В этом случае называется суммой разбиения.

### Лемма 1.5.4.3 (Лемма 1).

▷ Пусть

$\xi_1$  — продолжение разбиения  $\xi_2$ .

▷ Тогда

$S_{\xi_1} \leq S_{\xi_2}$ , а  $s_{\xi_1} \geq s_{\xi_2}$ .

▷ Доказательство.

◦ Рассмотрим разбиение  $\xi_2$ :  $S_{\xi_2} = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta_k$ . Т.к.  $\xi_1$  — продолжение разбиения  $\xi_2$ , то в интервале  $[x_{k-1}, x_k]$

есть  $S$  точек из  $\xi_1$ . Тогда для разбиения  $\xi_1$  на  $[x_{k-1}, x_k]$  имеем:  $\sum_{j=1}^S M_{k_j} \cdot \Delta_{k_j} \leq \sum_{j=1}^S M_k \cdot \Delta_{k_j} = M_k \cdot \sum_{j=1}^S \Delta_{k_j} =$

$M_k \cdot \Delta_k \Rightarrow$  суммируя ещё и по  $k$  получится, что  $S_{\xi_1} \leq S_{\xi_2}$

◦ Аналогично.  $s_{\xi_1} \geq s_{\xi_2}$ .

□

### Лемма 1.5.4.4 (Лемма 2).

▷ Для любой пары разбиений  $\xi_1$  и  $\xi_2$  имеет место:  $S_{\xi_1} \geq s_{\xi_2}$

▷ Доказательство.

◦ Пусть выполнено условие, рассмотрим:  $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$  по построению —  $\xi$  является продолжением  $\xi_1$  и  $\xi_2$

□

**Лемма 1.5.4.5 (Лемма 3).**

▷ Если  $f$  — ограниченная функция, то  $\underline{J} \leq \bar{J}$ .

▷ Доказательство.

- Т.к. для любых разбиений  $\xi_1$  и  $\xi_2$ :  $s_{\xi_1} \leq S_{\xi_2}$ , в силу Леммы 2 1.5.4.4. Возьмём  $\sup$  по всем  $\xi_1$ , получим, что  $\underline{J} \leq S_{\xi_2}$ ; а если взять  $\sup$  по всем  $\xi_2$ , то в общем:  $\underline{J} \leq \bar{J}$ .

□

**Лемма 1.5.4.6 (Лемма 4).**

▷  $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0 \mid \forall \xi \mid \|\xi\| < \delta: S_\xi \leq \bar{J} + \varepsilon$ , а  $s_\xi \geq \underline{J} - \varepsilon$

▷ Доказательство.

- Будем считать, что  $f(x) \geq 0$ , если не так, то в силу ограниченности функции можно найти  $A \mid f(x) + A \geq 0$ .
- По определению точной нижней грани — существует разбиение  $\xi_0$  такое, что  $S_{\xi_0} \leq \bar{J} + \frac{\varepsilon}{2}$  (из теоремы о существовании точной верхней грани). Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — точки разбиения  $\xi_0$ ;  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ ;  $\lambda = \frac{\varepsilon}{4 \cdot n \cdot M}$ ;  
 $\xi$  — такое разбиение, что  $\|\xi\| < \lambda$ . Отрезки из разбиения  $\xi$  разобьём на два класса: к первому классу относятся отрезки, которые целиком попадают в отрезок  $[x_k - \lambda, x_k + \lambda]$ , тогда  $S_\xi = S_\xi^I + S_\xi^{II}$  — из положительности функции, тогда  $S_\xi^I \leq \sum_k M_k \cdot \Delta_k \leq M \cdot \sum_k \Delta_k \leq M \cdot \sum_k \frac{2 \cdot \varepsilon}{4 \cdot M \cdot n} \leq \frac{2 \cdot \varepsilon \cdot M}{4 \cdot M \cdot n} \cdot \sum_{k=1}^n 1 = \frac{n \cdot 2 \cdot \varepsilon \cdot M}{4 \cdot M \cdot n} = \frac{\varepsilon}{2}$ ,  
 очевидно  $S_\xi^{II} \leq S_{\xi_0} \Rightarrow S_\xi \leq \bar{J} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \bar{J} + \varepsilon$

□

**Теорема 1.5.4.7 (Теорема Дарбу).**

▷ Пусть

$f$  — ограничена и  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ .

▷ Тогда

определения  $R1$  и  $R2$  — эквивалентны.

▷ Доказательство.

- $R2 \rightarrow R1$ : Пусть  $f$  — интегрируема на  $[a, b]$  в смысле  $R2$ ;  $\xi$  — разбиение. Надо доказать, что  $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0 \mid \|\xi\| < \delta \Rightarrow |R(f, \xi) - L| < \varepsilon$ ;  $|\sum_k f(t_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) - L| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < \sum_k f(t_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) < L + \varepsilon$ . Заметим, что  $\forall t_k \in [x_{k-1}, x_k]: m_k \leq f(t_k) \leq M_k$ , следовательно  $\sum_k m_k \cdot \Delta x \leq \sum_k f(t_k) \cdot \Delta x \leq \sum_k M_k \cdot \Delta x$ , где  $\Delta x = x_k - x_{k-1}$ . Из Леммы 4 1.5.4.6 следует  $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0 \mid \forall \xi \mid \|\xi\| < \delta: \underline{J} - \varepsilon \leq s_\xi \leq S_\xi \leq \bar{J} + \varepsilon$ . Т.к.  $f$  — интегрируема согласно  $R2$ , то  $\bar{J} = \underline{J}$ . Получаем, что  $\forall \varepsilon > 0: |\sum_k f(t_k) \cdot \Delta x - J| < \varepsilon$ , значит функция интегрируема в смысле  $R1$ .
- $R1 \rightarrow R2$ : Выпишем условие интегрируемости по Риману  $R1$ :  $\forall \xi \mid \|\xi\| < \delta: |\sum_k f(t_k) \cdot \Delta x - L| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < \sum_k f(t_k) \cdot \Delta x < L + \varepsilon$ .  $\sum_k m_k \cdot \Delta x \leq \sum_k f(t_k) \cdot \Delta x \leq \sum_k M_k \cdot \Delta x$ ; отсюда следует:  $\sum_k f(t_k) \cdot \Delta x \leq L + \varepsilon$ ,  $\sum_k M_k \cdot \Delta x \leq L + \varepsilon$ ;  $S_\xi \leq L + \varepsilon$ ;  $\sum_k m_k \cdot \Delta x \geq L - \varepsilon$ ;  $\Rightarrow \forall \xi \mid \|\xi\| < \delta: L - \varepsilon \leq s_\xi \leq S_\xi \leq L + \varepsilon \Rightarrow f$  — интегрируема, согласно  $R2$ .

□

**Теорема 1.5.5 (Интегрируемость непрерывных функций).**

▷ Пусть

$f$  — непрерывна на  $[a, b]$ .

▷ Тогда

$f$  — интегрируема по Риману и интеграл по Риману совпадает с интегралом по Ньютону.

▷ Доказательство.

- Так как  $f$  — непрерывна на  $[a, b]$ , то она равномерно непрерывна на  $[a, b]$ , значит  $\exists w(t)$  — модуль непрерывности. Пусть  $\xi$  — разбиение  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ;

$$\begin{aligned} r(\xi) &= \int_a^b f(x) dx - R(f, \xi) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(t_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \\ &= \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \sum_k f(t_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \\ &= \sum_k \left[ \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - f(t_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \right] = \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(t_k)) dx, \end{aligned}$$

где  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ .

- Т.к.  $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ,  $f(x) - f(t_k) \leq w(\|\xi\|)$ , следует  $\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(t_k)) dx \right| \leq w(\|\xi\|) \cdot (x_k - x_{k-1})$ .  $|r(\xi)| \leq \sum_k w(\|\xi\|) \cdot (x_k - x_{k-1}) = w(\|\xi\|) \cdot \sum_k (x_k - x_{k-1}) = w(\|\xi\|) \cdot (b - a)$ ; т.к.  $w(\|\xi\|) \rightarrow 0$ , при  $\|\xi\| \rightarrow 0$ , то  $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0 \mid w(\|\xi\|) \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)} \cdot \|\xi\| < \delta \Rightarrow r(\xi) < \varepsilon$ , значит функция — интегрируема.

□

## Глава 2

# Функциональные ряды и последовательности

### ОПР 2.1 (числовой последовательности).

Пусть  $f_n(x)$ ,  $x = 1, 2, \dots, n$  — набор функций;  $A \subset \mathbb{R}$  — область определения  $\forall f_n(x)$ , где  $A \neq \emptyset$ . Пусть  $x_0 \in A$ , тогда можно сопоставить числовую последовательность  $f_n(x_0)$ .

### ОПР 2.2 (сходящейся последовательности).

Будем говорить, что последовательность сходится в точке  $x_0$ , если числовая последовательность  $f_n(x_0)$  — сходится.

### ОПР 2.3 (множества точек сходимости).

Множество точек сходимости последовательности  $f_n(x)$  — область сходимости. Если  $S \subseteq A$  и  $S$  — является областью сходимости, то если  $\forall x \in S$  сопоставить число  $a = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)$ , то определена функция  $f(x) = a - \forall x \in S$ .  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  — поточечно, т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .

Выражение вида  $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x)$  — будем называть функциональным рядом, тогда  $S_m(x) = \sum_{k=0}^m \phi_k(x)$  — назовём частичной суммой функционального ряда. Будем говорить, что ряд сходится, если последовательность частичных сумм сходится.

Из того, что  $f_n(x)$  — непрерывна, следует ли, что  $f(x)$  — непрерывна?  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = f_n(a)$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$ ?

Если  $f_n(x)$  — дифференцируема, сходится ли  $f'_n(x)$  к  $f'(x)$ ? Пусть  $f_n(x)$  — интегрируема на  $[a, b]$ , будет ли интегрируема  $f(x)$ ?

### Пример 2.3.1 (множества точек сходимости и предельной функции).

$$\triangleright f(x) = x^n; x_0 = \frac{1}{3} \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n - \text{сходится. } S = (-1, 1] \text{ и } f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

### Пример 2.3.2 (Порядок взятия предела).

$$\triangleright \text{Рассмотрим } S_{mn} = \frac{m}{m+n} : \text{ чем отличается } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{m \rightarrow \infty} S_{mn} \right), \text{ от } \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} S_{mn} \right)? \lim_{n \rightarrow \infty} S_{mn} = 1 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} 1 = 1; \text{ а } \lim_{m \rightarrow \infty} S_{mn} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 0;$$

### Пример 2.3.3 (Непрерывность функционального ряда).

$$\triangleright \text{Пусть } f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \text{ рассмотрим } \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+x^2} \right)^n = f(x) - \text{сходится в любой точке } x, \text{ кроме } 0, f(0) = 0. \text{ Пусть } x \neq 0, \text{ тогда } S_n(x) = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+x^2} \right)^n = x^2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}^{n+1}}{1 - \frac{1}{1+x^2}}; S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2 \cdot (1+x^2)}{x^2} = 1 + x^2 = f(x) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ 1 + x^2, & x \neq 0. \end{cases} - \text{не непрерывна.}$$

### Пример 2.3.4 (Сходимость производных).

$$\triangleright \text{Рассмотрим } f_n(x) = \frac{\sin(n \cdot x)}{\sqrt{n}}, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, f'(x) = 0; f'_n(x) = \sqrt{n} \cdot \cos(n \cdot x) \Rightarrow f_n(x) \not\rightarrow f'(x).$$

### Пример 2.3.5 (Несходимость производных).

- ▷ Пусть  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $f_n(x) = n^2 x \cdot (1 - x^2)^n$  — по Риману интегрируема  $\Rightarrow f_n(x) \rightarrow 0$  на  $[0, 1]$ ,  $f_n(x) \rightarrow f(x) \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 0$ ;
- $$\int_0^1 f_n(x) dx = n^2 \cdot \int_0^1 x \cdot (1 - x^2)^n dx = -\frac{n^2}{2} \cdot \int_0^1 (1 - x^2)^n d(1 - x^2) = -\frac{n^2}{2} \cdot \frac{(1 - x^2)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{n^2}{2 \cdot (n+1)},$$
- но  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2 \cdot (n+1)} = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 f_n(x) dx \right) \neq \int_0^1 f(x) dx$ .
- ▷  $f_n(x) = nx \cdot (1 - x^2)$ ,  $f_n(x) \rightarrow 0$ ,  $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{n}{2 \cdot (n+1)}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2 \cdot (n+1)} = \frac{1}{2}$ .

## 2.4 Равномерная сходимость

### ОПР 2.4.1 (равномерно сходящейся последовательность функций).

Последовательность функций  $f_n(x)$  — называется равномерно сходящейся на множестве  $S \subseteq \mathbb{R}$  к функции  $f(x)$ , если  $\forall \varepsilon > 0: \exists M \big| \forall n > m: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon - \forall x \in S$ .

Следствие 2.4.1.1 (Поточечная сходимость).

- ▷ Если  $f_n(x)$  — сходится равномерно к  $f(x)$  на множестве  $S$ , то  $f_n(x)$  — сходится к  $f(x)$  поточечно на  $S$ , обратное неверно.

### Обозначение 2.4.2

- ▷  $f_n(x)$  — сходится равномерно к  $f(x)$ :  $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ ,  $x \in S$ .

### ОПР 2.4.3 (Равномерно сходящийся функциональный ряд).

Функциональный ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x)$  — равномерно сходится на  $S$ , если его последовательность частичных сумм — сходится.

### Теорема 2.4.4 (условие Коши о равномерной непрерывности).

- ▷ Последовательность  $f_n(x)$  — равномерно сходится на множестве  $S \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists M \in \mathbb{N} \big| \forall n, m > M: (\star) |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon - \forall x \in S$ .
- ▷ Доказательство.
- ( $\Rightarrow$ ): Пусть  $f_n(x)$  — такое, тогда  $\exists M \big| \forall n > M: |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$  (Определение 2.4.1 на стр. 22), рассмотрим  $|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon - (\star)$ .
  - ( $\Leftarrow$ ): Пусть  $(\star)$  — выполнено  $\forall x \in S$ ,  $f_n(x)$  — является последовательностью Коши, значит существует предел  $f_n(x)$ , при  $n \rightarrow \infty$  в каждой точке;  $\Rightarrow$  определяет  $f(x)$ . В  $(\star)$  перейдем к пределу, при  $m \rightarrow \infty: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon - \forall x \in S$  — равномерная сходимость.

□

### Теорема 2.4.5 (Необходимый признак Вейерштрасса о равномерной сходимости).

- ▷ Пусть  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  на  $S$ ,  $M_n = \sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)|$ ;  $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$  на  $S \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$ .
- ▷ Доказательство.
- ( $\Rightarrow$ ): Очевидно из определения равномерной сходимости 2.4.1 на стр. 22:  $\forall \varepsilon > 0: \exists M \big| \forall n > M: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon - \forall x \in S$ , тогда  $M_n = \sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$ .
  - ( $\Leftarrow$ ):  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon: \exists M \big| \forall n > M: |M_n| < \varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

□

### Пример 2.4.5.1 (К теореме).

- ▷ Рассмотрим  $f_n(x) = x^n$ ,  $S = (0, 1)$ ,  $f_n(x) \rightarrow 0$  на  $(0, 1)$ .  $M_n = \sup_{x \in S} |x^n - 0| = \sup_{x \in S} x^n = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 1 \Rightarrow$  равномерно не сходится, а на  $(0, \frac{1}{2}) - M_n = \sup_{x \in (0, \frac{1}{2})} x^n = \frac{1}{2^n}$  — равномерная сходимость.

### Теорема 2.4.6 (Признак Вейерштрасса для рядов).

▷ Пусть

$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x)$ , предположим, что  $M_n = \sup_{x \in S} |\phi_n(x)|$ .

▷ Тогда

Если ряд  $M_n$  — сходится, то ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x)$  — равномерно сходится и непрерывен на  $S$ .

**Теорема 2.4.7 (О предельном переходе).**

▷ Пусть

Пусть  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  на  $S$ ,  $p$  — предельная точка множества  $S$ ; обозначим предел  $\lim_{x \rightarrow p} f_n(x) = A_n$ .

▷ Тогда

Если  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ , то  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow p} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow p} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)$ .

▷ Доказательство.

- Пусть  $\varepsilon > 0$  — произвольно,  $M \mid \forall n, m > M: (\star) |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$  — из равномерной непрерывности, а т.к.  $(\star)$  — верно  $\forall x \Rightarrow$  можем перейти к пределу, при  $x \rightarrow p: |A_n - A_m| \leq \varepsilon \Rightarrow A_n$  — последовательность Коши  $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ .
- Рассмотрим  $|f(x) - A| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) + A_n - A_n - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|$ :
  - ✓ Из равномерной сходимости —  $\forall n > M: |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} - \forall x \in S$ .
  - ✓ Если надо, увеличиваем номер  $M$ , т.е.  $\exists M_1 \mid \forall n > M_1: |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}$  — т.к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ .
  - ✓ Если выбрать  $n > \max\{M, M_1\}$ , то  $\forall \varepsilon > 0$ : существует окрестность  $V$  точки  $p$  такая, что  $|f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3} - \forall x \in V$ .
- $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists$  окрестность точки  $p \mid |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$ .

□

*Следствие 2.4.7.1 (теорема о непрерывности предельной точки).*

▷ Пусть  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  на  $S$ , тогда если  $f_n(x)$  — непрерывна на  $S$ , то  $f(x)$  — непрерывна на  $S$ .

▷ Доказательство.

- Используя предыдущую теорему, получим, что существуют  $A$  и  $A_n$ .

□

**Пример 2.4.7.2 (Не непрерывной, сходящейся неравномерно функции).**

▷  $[0, 1], x^n, f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$  — не непрерывная, сходимость — неравномерная.

**Теорема 2.4.8 (О равномерной сходимости и интегрируемости по Риману).**

▷ Пусть

$f_n(x)$  — интегрируема по Риману на  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}; f_n(x) \Rightarrow f(x)$ .

▷ Тогда

Выполнено:

1.  $f(x)$  — интегрируема на  $[a, b]$ ;
2.  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right)$  и  $\int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right)$

▷ Доказательство.

- Пусть  $\varepsilon > 0$ , выберем  $\sigma \mid \sigma \cdot |b - a| < \frac{\varepsilon}{3}$  (можно, т.к. отрезок ограничен), тогда в силу равномерной сходимости —  $\exists M \mid \forall n > M: (\star) |f_n(x) - f(x)| < \sigma - \forall x \in [a, b]$ .



- Пусть  $n > M$ , тогда в силу того, что  $f_n(x)$  — интегрируема по Риману, из теоремы Дарбу 1.5.4.7 на стр. 19:  $\exists$  разбиение  $\xi \mid S(\xi, f_n) - s(\xi, f_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ . В силу  $(\star) : f(x) - \sigma < f_n(x) < f(x) + \sigma$ , рассмотрим  $S(\xi, f) = S(\xi, f - f_n + f_n) = S(\xi, f - f_n) + S(\xi, f_n) \leq S(\xi, \sigma) + S(\xi, f_n) = \sigma \cdot |b - a| + S(\xi, f_n) = S(\xi, f_n) + \frac{\varepsilon}{3}$ , т.е.  $S(\xi, f) \leq S(\xi, f_n) + \frac{\varepsilon}{3}$ .
- Аналогично:  $s(\xi, f) \geq s(\xi, f_n) - \frac{\varepsilon}{3}$ , т.е.:  $-s(\xi, f) \leq -s(\xi, f_n) + \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow S(\xi, f) - s(\xi, f) \leq S(\xi, f_n) - s(\xi, f_n) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \frac{\varepsilon}{3} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow f$  — интегрируема по Риману в силу теоремы Дарбу.
- Рассмотрим  $\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b f(x) - f_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq \int_a^b \sigma dx = \sigma \cdot |b - a| = \varepsilon$  — для  $n > M$  из пункта 1  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right) = \int_a^b f(x) dx$ .

□

Замечание 2.4.8.1 (К теореме).

- ▷ Условие, что отрезок  $[a, b]$  ограничен — по существу! Рассмотрим на  $\mathbb{R}$ :  $\frac{m}{m^2 + x^2} = f_m(x) \Rightarrow 0$ , т.к.  $\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{m}{m^2 + x^2} = \frac{1}{m}$  и т.к.  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} = 0$ ;  $f_m(x) = \left( \arctan \frac{x}{m} \right)^m$ , но  $\int_{-\infty}^{\infty} f_m(x) dx = \pi$ .

Замечание 2.4.8.2 (Для рядов).

- ▷ Пусть ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  — сходится равномерно к функции  $f(x)$ ;  $f_n$  — интегрируема на  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ; тогда
1.  $f(x)$  — интегрируема на  $[a, b]$ ;
  2.  $\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right)$ .

(Упражнение).

**Теорема 2.4.9 (О равномерной дифференцируемости и сходимости).**

- ▷ Пусть
- $f_n(x)$  — последовательность дифференцируемых на  $a, b]$  функций,  $\exists$  точка  $x_0 \in (a, b]$   $| f_n(x_0)$  — сходится.
- ▷ Тогда
- Если последовательность  $f'_n(x)$  — сходится равномерно на  $[a, b]$ , то
1.  $f_n(x)$  — сходится равномерно на  $[a, b]$ ;
  2.  $f(x)$  — дифференцируема  $\forall x \in [a, b]$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x) - \forall x \in (a, b)$ .

▷ Доказательство.

- Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $M \mid \forall n, m > M$  — выполнено одновременно:

1.  $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ;
2.  $|f'_n(t) - f'_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot |b - a|} - \forall t \in [a, b]$ .

Рассмотрим  $|f_n(x) - f_m(x)|$  — по теореме Лагранжа:  $\exists x \in (x, t) \subseteq [a, b] \mid (f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(t) - f_m(t)) = (f'_n(c) - f'_m(c)) \cdot (x - t) \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| = |f'_n(c) - f'_m(c)| \cdot |x - t| \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot |b - a|} \cdot |x - t| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

- Рассмотрим:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= \\ &= |f_n(x) - f_m(x) + f_n(x_0) - f_n(x_0) + f_m(x_0) - f_m(x_0)| \leq \\ &\leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow f_n(x) \Rightarrow f(x)$ ;  $f(x)$  — непрерывна на  $[a, b]$ .

- Рассмотрим  $\phi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}$  и  $\phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ , где  $x \neq t$ . Заметим, что  $\lim_{x \rightarrow t} \phi_n(t) = f'_n(t)$  — т.к.  $f(x)$  дифференцируема и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \phi(t)$  — из первой части теоремы. Рассмотрим

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| = \left| \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} - \frac{f_m(t) - f_m(x)}{t - x} \right| = \frac{|f_n(t) - f_n(x) - f_m(t) + f_m(x)|}{|x - t|} \leq \frac{\varepsilon \cdot |x - t|}{2 \cdot |b - a|} \cdot \frac{1}{|x - t|}$$

□

**Теорема 2.4.10 (Пример Вейерштрасса непрерывной и не дифференцируемой функции).**

▷ Существует непрерывная на  $\mathbb{R}$  функция, не дифференцируемая ни в одной точке

▷ Доказательство.

○ Пусть отрезок  $[0, 2]$ , тогда определим  $\phi(x) = \begin{cases} x; & x \geq 0; x \leq 1; \\ 2 - x & x > 1; x \leq 2. \end{cases}$ . Определим, что  $\phi(x+2) = \phi(x)$ . Пусть

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \left( \frac{3}{4} \right)^n \cdot \phi(4^n \cdot x) \right), \text{ рассмотрим:}$$

✓ Очевидно, что  $\phi$  — непрерывна  $\Rightarrow \phi(4^n \cdot x)$  — непрерывна  $\Rightarrow f(x)$  — непрерывна. Пусть  $M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \left( \frac{3}{4} \right)^n \cdot \phi(4^n \cdot x) \right| = \left( \frac{3}{4} \right)^n \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(4^n \cdot x)| = \left( \frac{3}{4} \right)^n$ . Ряд и сумма  $\sum M_n$  — сходятся,  $\left( \frac{3}{4} \right)^n$  — сходится равномерно  $\Rightarrow$  поточечно по следствию 2.4.1.1 на стр. 22  $\Rightarrow f$  — непрерывна.

✓ Пусть  $x \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{Q}$  — произвольные; в силу аксиомы Архимеда  $\forall x \forall m: \exists k \in \mathbb{Q} \mid k \leq 4^m \cdot x \leq k+1 \Rightarrow x \leq 4^{-m} \cdot (k+1)$  и  $x \geq 4^{-m} \cdot k$ ; введём  $\alpha_m = 4^{-m} \cdot k$  и  $\beta_m = 4^{-m} \cdot (k+1)$ :  $\alpha_m < \beta_m$  и  $\alpha_m \leq x \leq \beta_m - \forall m$ . При  $m \rightarrow \infty: |\alpha_m - \beta_m| \rightarrow 0 \Rightarrow$  (в силу леммы о двух милиционерах)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = x$  и  $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = x$ .

Рассмотрим числа  $4^n \cdot \alpha_m$  и  $4^n \cdot \beta_m$ :

$$|\phi(4^n \cdot \beta_m) - \phi(4^n \cdot \alpha_m)| = \begin{cases} 0, & n > m; \\ 1, & n = m; \\ 4^{n-m}, & n < m. \end{cases}$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} |f(\beta_m) - f(\alpha_m)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{3}{4} \right)^n \cdot (\phi(4^n \cdot \beta_m) - \phi(4^n \cdot \alpha_m)) \right| = \left| \sum_{n=0}^m \left( \frac{3}{4} \right)^n \cdot (\phi(4^n \cdot \beta_m) - \phi(4^n \cdot \alpha_m)) \right| \geq \\ &\geq \left( \frac{3}{4} \right)^m - \sum_{n=0}^{m-1} \left( \frac{3}{4} \right)^n \cdot 4^{n-m} = \left( \frac{3}{4} \right)^m - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{3^n}{4^m} = \\ &= \left( \frac{3}{4} \right)^m - \frac{1}{4^m} \cdot \frac{1-3^m}{1-3} = \left( \frac{3}{4} \right)^m - \frac{1}{4^m} \cdot \frac{3^m-1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{3}{4} \right)^m + \frac{1}{2 \cdot 4^m}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим:

$$\left| \frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \right| = \frac{|f(\beta_m) - f(\alpha_m)|}{\beta_m - \alpha_m} = \frac{|f(\beta_m) - f(\alpha_m)|}{4^{-m}} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{3}{4} \right)^m \cdot \frac{1}{4^{-m}} = \frac{3^m}{2} \Rightarrow$$

при  $m \rightarrow \infty$  предел не существует.

Предположим, что в точке  $x$  — производная существует, тогда  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f(\alpha_m) - f(x)}{\alpha_m - x} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f(\beta_m) - f(x)}{\beta_m - x} = f'(x)$ .

Рассмотрим

$$\frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} = \lambda_m \cdot \frac{f(\beta_m) - f(x)}{\beta_m - x} + (1 - \lambda_m) \cdot \frac{f(\alpha_m) - f(x)}{\alpha_m - x},$$

где  $\lambda_m = \frac{\beta_m - x}{\beta_m - \alpha_m} \Rightarrow$  предел существует — противоречие.

□

**Теорема 2.4.11 (Вейерштрасса о приближении многочлена к непрерывной функции).**

▷ Пусть

Пусть  $f(x)$  — непрерывна на  $[a, b]$ .

▷ Тогда

Существует такая последовательность многочленов  $P_n(x)$ , что  $p_n(x) \Rightarrow f(x)$  на  $[a, b]$ , стало быть  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$ .

▷ Доказательство.

○ Успешно

- ✓  $f(0) = 0, f(1) = 0, g(x) = f(x) - f(0) - x \cdot (f(1) - f(0))$ , если  $x \neq [0, 1]: f(x) = 0; f(x)$  — непрерывна на  $\mathbb{R}$ , равномерно непрерывна на  $[0, 1]$  по теореме Кантера и, стало быть, равномерна непрерывна на  $\mathbb{R}$ .
- Введём  $Q_n(x) = C_n(x) \cdot (1 - x^2)^n$  и потребуем, чтобы удовлетворяла следующим условиям: равна нулю для  $|x| > 1, C_n \cdot (1 - x^2)^n - |x| < 1$  и  $\int_{-1}^1 Q_n(t) dt = 1 \Rightarrow C_n = \frac{1}{\int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx}, Q_n$  — „шапочка“ или „Дельта последовательность“.
- $\int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx = 2 \cdot \int_0^1 (1 - x^2)^n dx \geq 2 \cdot \int_0^{1/\sqrt{n}} (1 - x^2)^n dx \geq$  (неравенство Бернулли)  $2 \cdot \int_0^{1/\sqrt{n}} (1 - n \cdot x^2) dx = 2 \cdot \left(x - \frac{nx^3}{3}\right) \Big|_0^{1/\sqrt{n}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{3\sqrt{n}}\right) \cdot \frac{4}{3\sqrt{n}} \Rightarrow C_n < \sqrt{n}$ .
- Пусть  $\sigma > 0$  — произвольно, тогда  $0 \leq Q_n(x) \leq \sqrt{n} \cdot (1 - \delta^2)^n - \forall x | \delta < |x| \leq 1. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} \cdot (1 - \delta^2)^n) = 0 \Rightarrow$  (Теорема Вейерштрасса 2.4.5 на стр. 22)  $Q_n(x) \Rightarrow 0$  на интервале  $[-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$ , т.к.  $(1 - \delta^2)^n \rightarrow 0$ .
- $P_n(x) = \int_{-1}^1 f(x+t) \cdot Q_n(t) dt$  — нужный многочлен. Докажем, что это вообще-то многочлен: рассмотрим  $f(x+t)$ : если  $f(x+t) > 1$ , то  $f(x+t) = 0$ ; а если  $(x+t) < 0$ , то  $f(x+t) = 0 \Rightarrow t \in [-x, 1-x] \Rightarrow P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t) \cdot Q_n(t) dt =_{(x+t=u)} \int_0^1 f(u) \cdot Q_n(u-x) du$ . Заметим:  $Q_n(u-x) = C_n \cdot (1 - (u-x)^2)^n = C_n \cdot \sum_{\ell} (C_n^{\ell} \cdot (u-x)^{2\ell} \cdot (-1)^{\ell}) = C_n \cdot \sum_k (x^k \cdot \phi_k(u))$ , где  $\phi_k(u)$  — многочлен по  $u \Rightarrow \int_0^1 f(u) \cdot Q_n(u-x) du = \int_0^1 f(u) \cdot \sum_k \phi_k(u) du = \sum_k x^k \cdot \int_0^1 f(u) \cdot \phi_k(u) du = \sum_k \alpha_k \cdot x^k = P_n(x) \Rightarrow P_n(x)$  — многочлен.
- $P_n(x) \Rightarrow f(x)$ : пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда существует  $\delta > 0$  такая, что из  $|x-y| < \delta$  следует, что  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} - \forall x, y \in \mathbb{R}$  — из равномерной непрерывности  $f(x)$ . Введём  $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$  — в силу теоремы Вейерштрасса о максимуме/минимуме:  $M < \infty$ .

$$\begin{aligned} \text{Вычислим: } |P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^1 f(x+t) \cdot Q_n(t) dt - f(x) \cdot \int_{-1}^1 Q_n(t) dt \right| = \left| \int_{-1}^1 (f(x+t) - f(x)) \cdot Q_n(t) dt \right| = \\ &= \left| \int_{-1}^{-\delta} (\dots) dt + \int_{-\delta}^{\delta} (\dots) dt + \int_{\delta}^1 (\dots) dt \right| \leq \left| \int_{-1}^{-\delta} (\dots) dt \right| + \left| \int_{-\delta}^{\delta} (\dots) dt \right| + \left| \int_{\delta}^1 (\dots) dt \right| \leq \underbrace{\int_{-1}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)| \cdot Q_n(t) dt}_{\leq \varepsilon/2} + \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| \cdot Q_n(t) dt + \int_{\delta}^1 |f(x+t) - f(x)| \cdot Q_n(t) dt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \int_{-1}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)| \cdot Q_n(t) dt &\leq 2M \cdot \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t) dt \leq 2M \cdot \int_{-1}^{-\delta} \sqrt{n} \cdot (1 - \delta^2)^n dt = 2M \cdot \sqrt{n} \cdot (1 - \delta^2)^n \cdot \\ &\cdot \int_{-1}^{-\delta} dt \leq 2M \cdot \sqrt{n} \cdot (1 - \delta^2)^n \end{aligned}$$

$$\checkmark \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| \cdot Q_n(x) dt \leq (\text{в силу непрерывности}) \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_{-1}^1 Q_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |P_n(x) - f(x)| &\leq 2 \cdot (2M \cdot \sqrt{n} \cdot (1 - \delta^2)^n) + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ а т.к. } 4M \cdot \sqrt{n} \cdot (1 - \delta^2)^n \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ то } \exists M \forall n > M: 4M \cdot \\ &\cdot \sqrt{n} \cdot (1 - \delta^2)^n < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |P_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists M \forall n > M \text{ и } \forall x \in \mathbb{R}: |P_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \\ &P_n(x) \Rightarrow f(x). \end{aligned}$$

□

Следствие 2.4.12 (Последовательность полиномов, сходящаяся к модулю).

- ▷ Пусть  $f(x) = |x|$ , при  $|x| < a$ , тогда существует последовательность полиномов  $P_n(x) | P_n(x) \Rightarrow |x|$  и  $P_n(0) = 0$ .

## 2.5 Степенные ряды

### ОПР 2.5.1 (степенного и других рядов).

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x)$  — называется степенным, если  $\phi_n(x) = a_n \cdot x^n$ , так и будем писать:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ . Если  $\phi_n(x) = (x - x_0)^n$ , то ряд называется центрированным в точке  $x_0$ . Симметричным степенной ряд — тот, что сходится в точке  $x = 0$ .

### Лемма 2.5.2 (Первая лемма Абеля о степенных рядах).

- ▷ Если степенной ряд сходится в точке  $x_0 \neq 0$ , то  $\forall x | |x| < |x_0|$  — ряд  $\sum_n a_n \cdot x^n$  — сходится абсолютно.

#### ▷ Доказательство.

- Пусть ряд  $\sum_n a_n \cdot x_0^n$  — сходится, тогда в силу необходимого признака сходимости:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot x_0^n = 0 \Rightarrow$  последовательность  $\{a_n \cdot x_0^n\}$  — ограничена (из теоремы о том, что любая сходящаяся последовательность ограничена)  $\Rightarrow \exists M \forall n: |a_n \cdot x_0^n| \leq M$ .

- Рассмотрим ряд  $\sum_n a_n \cdot x^n$ , при  $|x| < |x_0|$ , тогда  $|a_n \cdot x^n| =_{(\text{т.к. } x_0 \neq 0)} \left| a_n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \cdot x_0^n \right| = |a_n \cdot x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n;$

т.к.  $|x| < |x_0|$ , то  $\left| \frac{x}{x_0} \right| = q < 1 \Rightarrow$  ряд  $M \cdot \sum q^n$  — геометрическая прогрессия и сходится  $\Rightarrow$  (по признаку

□

**Следствие 2.5.3 (Расходимость ряда).**

- ▷ Если ряд расходится в точке  $x_0 \neq 0$ , то  $\forall x \mid |x| > |x_0|$  — ряд расходится (очевидное доказательство от противного: если сходится, то сходится и в  $x_0$ ).

**Следствие 2.5.4 (Структура области сходимости).**

- ▷ Для любого степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  :  $\exists R \geq 0 \mid \forall x \mid |x| < R$  — ряд сходится абсолютно;  $\forall x \mid |x| > R$  — расходится, а если  $|x| = R$  — всё, что угодно.

Если  $R = 0$ , то ряд сходится только в точке  $x_0$ , а если  $R = \infty$ , то ряд сходится всюду. Причём эта  $R$  — существует и единственна для любой функции.

**Теорема 2.5.5 (О радиусе сходимости).**

- ▷ Пусть

$$\text{Ряд } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n.$$

- ▷ Тогда

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

- ▷ Доказательство.

- Пусть  $x_0 \neq 0$  — произвольно из  $\mathbb{R}$ . Рассмотрим  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x_0^n$ , применим признак Даламбера:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} \cdot x_0^{n+1}|}{|a_n \cdot x_0^n|} =$

$|x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , если равен нулю, то ряд сходится всегда  $\Rightarrow R = \infty$ ; если равен  $\infty$ , то ряд расходится

всюду, кроме 0, тогда получается, что ряд сходится, когда  $|x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow |x_0| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n|} =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = R$ , а если  $|x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow |x_0| > R$  — расходится  $\Rightarrow$  такая  $R$  эквивалентна радиусу сходимости.

□

**Теорема 2.5.6 (О радиусе сходимости).**

- ▷ Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n.$$

- ▷ Тогда

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

- ▷ Доказательство.

- То же самое, о вместо Даламбера — радикальный признак Коши.

□

**Лемма 2.5.7 (Вторая лемма Абеля).**

- ▷ Пусть

$$\text{Ряд } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n; \quad R > 0 \text{ — радиус сходимости.}$$

- ▷ Тогда

Для любого интервала  $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$  — ряд сходится равномерно.

- ▷ Доказательство.

- Пусть  $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ , тогда  $0 < \gamma < R \Rightarrow$  ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \gamma^n$  — сходится абсолютно; тогда  $|a_n \cdot x^n| \leq |a_n \cdot \gamma^n|$

□

Следствие 2.5.8 (Непрерывность).

▷ Пусть

$$\text{Пусть } S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n.$$

▷ Тогда

$\forall x \mid |x| < R$ :  $S(x)$  — непрерывна.

▷ Доказательство.

- Т.к.  $|x| < R \Rightarrow \exists [\alpha, \beta] \mid [\alpha, \beta] \subset (-R, R)$  и  $x \in (\alpha, \beta)$  — по второй лемме Абеля 2.5.7 на стр. 27 ряд сходится равномерно на  $[\alpha, \beta]$ , а т.к.  $x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow S(x)$  в точке  $x$  — непрерывна.

□

**Теорема 2.5.9 (Об интегрируемости степенного ряда).**

▷ Пусть

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ ,  $R$  — радиус сходимости,  $R > 0$ ; определена функция  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n - \forall x \mid |x| < R$ ;

▷ Тогда

$\forall [\alpha, \beta] \subseteq (-R, R)$ :  $S(x)$  — интегрируема на  $[\alpha, \beta]$  и имеет место:

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_n \cdot x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \left( \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{n+1} \right).$$

▷ Доказательство.

- Если  $[\alpha, \beta] \subseteq (-R, R)$ , то согласно второй леммы Абеля 2.5.7 на стр. 27 —  $S(x)$  — непрерывна и ряд сходится к  $S(x)$  равномерно на  $[\alpha, \beta]$ . Функция  $a_n \cdot x^n - \forall n$  — интегрируема на  $[\alpha, \beta]$ , т.к. она непрерывна и ограничена  $\Rightarrow$  выполнены все условия теоремы об интегрируемости ряда.

□

Следствие 2.5.10 (Радиус сходимости ряда первообразных).

▷ Пусть

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  имеет радиус сходимости  $R > 0$ .

▷ Тогда

Ряд из первообразных  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$  имеет радиус сходимости не меньший, чем  $R$ .

▷ Доказательство.

- Пусть  $x \in (-R, R)$ ;  $r > 0 \mid |x| < r < R \Rightarrow [0, r] \subset (-R, R)$ . Применим к ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  теорему об интегрируемости ряда на интервале  $[0, r]$ , тогда  $\int_0^r \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^r a_n \cdot x^n dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{r^{n+1}}{n+1}$  — сходится  $\Rightarrow$  согласно первой лемме Абеля 2.5.2 на стр. 26 — ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{r^{n+1}}{n+1}$  — сходится равномерно  $\forall x \mid |x| < r$ ; т.к.  $r < R$  — произвольно  $\Rightarrow$  радиус сходимости не уменьшится.

□

**Теорема 2.5.11 (О дифференцируемости степенных рядов).**

▷ Пусть

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n - \forall x \mid |x| < R$ ,  $R > 0$  — радиус сходимости.

1.  $S(x)$  — дифференцируема на интервале  $(-R, R)$ ;

2.  $\forall x: S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n-1} \cdot n$

▷ Доказательство.

◦  $\phi_n(x) = a_n \cdot x^n$  — непрерывна на  $(-R, R)$  — очевидно.

◦ Существует хотя бы одна точка, где ряд сходится, очевидно, что при  $x = 0$  — сходится.

◦  $(\phi^n(x))' = n \cdot x^{n-1} \cdot a_n$  — сходится равномерно на каком то подинтервале (теорема об дифференцируемости).

Пусть  $r_0$  и  $r$   $0 < r_0 < r < R$ ;  $x \in (-R, R) \mid |x| < r$ . Т.к. ряд  $\sum_n a_n \cdot x^n$  — сходится для этих  $x$ , то это означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n \cdot x^n| = 0 - \forall x \mid |x| \leq r \Rightarrow$  последовательность  $|a_n \cdot x^n|$  — ограничена, в частности  $|a_n \cdot x^n| \leq M$ .

Рассмотрим  $|\phi_n(x)|' = |a_n \cdot n \cdot x^{n-1}| \leq |a_n| \cdot n \cdot |x^{n-1}| \leq |a_n| \cdot n \cdot r_0^{n-1} = |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1} \cdot (\frac{r_0}{r})^{n-1} = |a_n| \cdot r \cdot r^n \cdot (\frac{r_0}{r})^{n-1}$ . Обозначим через  $\frac{r_0}{r} = q < 1$  (очевидно); тогда  $\sum_{n=0}^{\infty} |\phi'_n(x)| \leq M \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^{n-1}$ . Применяя к ряду

признак Даламбера:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot q^n \cdot n \cdot q^{n-1}}{n \cdot q^{n-1}} = q \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = q < 1 \Rightarrow \sum_n \phi'_n(x)$  — по признаку Вейерштрасса сходится равномерно  $\Rightarrow$  третье условие выполнено.

□

*Следствие 2.5.12 (Радиус сходимости при дифференцируемости).*

▷ Радиус сходимости не уменьшается при дифференцировании, т.к.  $r_0 < r < R$  — были произвольными.

*Следствие 2.5.13 (Радиусы сходимости ряда, его производной и интеграла).*

▷ Если есть ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  и ряды  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$ , то у всех этих рядов — одинаковый радиус сходимости.

▷ Доказательство.

◦  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ ,  $R_1$  — его радиус сходимости. Рассмотрим  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$  и его радиус сходимости  $R_2$ , тогда согласно теоремам:  $R_2 \geq R_1$ .

Ещё рассмотрим  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ , радиус сходимости  $R_2 \Rightarrow R_2 \geq R_1$ .

□

## Глава 3

# Метрические пространства

### ОПР 3.1 (метрики и метрического пространства).

Пусть  $M$  — произвольное множество; отображение  $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  — называется метрикой, если

1.  $\forall x, y \in M: \rho(x, y) \geq 0$ ;
2.  $\forall x, y \in M: \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
3.  $\forall x, y \in M: \rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
4.  $\forall x, y, z \in M: \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ .

Пара  $(M, \rho)$  — называется метрическим пространством.

### Пример 3.1.1 (метрики).

- ▷ 1.  $M = \mathbb{R}: \rho(x, y) = |x - y|$ ;
- 2.  $M = \mathbb{R}^n: \rho_1(X, Y) = \max_{i \in [1, \dots, n]} x_i - y_i$ , где  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ .
- 3.  $M = \mathbb{R}^n: \rho_2(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ .

### УТВ 3.2 (Подмножества метрических пространств).

- ▷ Если  $M$  — метрическое пространство, то  $\forall S \subseteq M$ ,  $S$  — метрическое пространство.

## 3.3 Дополнительные свойства метрики

### 3.3.0.1 Свойство 1 (Неравенство „ломанной“)

- ▷ Пусть  
 $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ ,
- ▷ Тогда  
 $\rho(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \dots + \rho(x_{n-1}, x_n)$ .
- ▷ Доказательство.
  - Очевидно из основного свойства 4 определения 3.1.

□

### 3.3.0.2 Свойство 2 (Неравенство параллелограмма)

- ▷ Пусть  
 $x, y, z, u \in M$ .
- ▷ Тогда  
 $|\rho(x, y) - \rho(z, u)| \leq \rho(x, z) + \rho(y, u)$ .
- ▷ Доказательство.

- Из свойства 1  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, u) + \rho(u, y) \Rightarrow \begin{cases} \rho(x, y) - \rho(z, u) \leq \rho(x, z) + \rho(u, y); \\ \rho(z, u) - \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(u, y). \end{cases} \Rightarrow \rho(x, y) - \rho(z, u) \geq -(\rho(x, z) + \rho(u, y)).$

**3.3.0.3 Свойство 3 (Второе неравенство треугольника)**

▷ Пусть

$$x, y, z \in M.$$

▷ Тогда

$$|\rho(x, y) - \rho(z, y)| \leq \rho(x, z).$$

▷ Доказательство.

◦ В свойстве 2 положим  $u = y$ .

□

**3.3.1 Последовательности****ОПР 3.3.1.1 (последовательности).**

Последовательностью в метрическом пространстве  $M$  — называется любое отображение  $\phi: \mathbb{N} \in M$ .

**ОПР 3.3.1.2 (сходимости последовательности).**

Будем говорить, что последовательность  $x_n$  точек из метрического пространства сходится к  $a \in M$ , если последовательность  $b_n = \rho(x_n, a) \rightarrow 0$ , при  $n \rightarrow \infty$ .

**Лемма 3.3.1.3 (Единственность предела).**

▷ Пусть

Последовательность  $x_n$  — имеет предел в  $M$ .

▷ Тогда

Этот предел — единственный.

▷ Доказательство.

◦ Пусть  $x_n \xrightarrow{p} p$  и  $x_n \xrightarrow{q} q$ , рассмотрим расстояние  $\rho(p, q) \leq \rho(p, x_n) + \rho(x_n, q)$ , т.к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(p, x_n) = 0$ , то  $\exists M_1 | \forall n > M_1: \rho(p, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ ; т.к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(q, x_n) = 0$ , то  $\exists M_2 | \forall n > M_2: \rho(q, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ .  $M = \max M_1, M_2 \Rightarrow \forall n > M: \rho(p, q) \leq \rho(p, x_n) + \rho(x_n, q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \rho(p, q) = 0 \Rightarrow p = q$ .

□

**ОПР 3.3.1.4 (Последовательность Коши).**

Последовательность  $x_n \subset M$  — называется последовательностью Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0: \exists R | \forall n, m > R: \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

**Лемма 3.3.1.5 (О сходящейся последовательности).**

▷ Всякая сходящаяся в  $M$  последовательность является последовательностью Коши.

▷ Доказательство.

◦  $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, y) + \rho(y, x_m)$ , где  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Т.к. последовательность  $x_n$  — сходится, то  $\exists R | \forall n > R: \rho(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Если  $n > R, m > R$ , то  $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

□

**ОПР 3.3.1.6 (Специального множества).**

$B_r a = \{x \in M   \rho(x, a) < r\}$	открытый шар радиуса $r$ с центром $a$ .
$\bar{B}_r a = \{x \in M   \rho(x, a) \leq r\}$	закрытый шар радиуса $r$ с центром $a$ .
$S_r a = \{x \in M   \rho(x, a) = r\}$	сфера радиуса $r$ с центром $a$ .
$B_{\frac{1}{n}} a, n \in \mathbb{N}$	стандартная шаровая окрестность точки $a$ .

**ОПР 3.3.1.7 (Ограниченности множества).**

Будем говорить, что  $S \subseteq M$  — ограничено, если  $\exists K \in \mathbb{R} | \forall x, y \in S: \rho(x, y) \leq K$ . В частности  $K = \sup_{x, y \in S} \rho(x, y) =$



**ОПР 3.3.1.8 (Неограниченного множества).**

Будем говорить, что  $S \subseteq M$  — не ограничено, если  $\forall k \in \mathbb{N}: \exists x, y \in S \mid \rho(x, y) > k$ .

**ОПР 3.3.1.9 (предельной точки).**

Пусть  $S \subseteq M$ . Будем говорить, что  $a \in M$  — предельная точка  $S$ , если  $\forall \varepsilon > 0: \exists B_\varepsilon(a) \mid B_\varepsilon(a) \cap (S \setminus \{a\}) \neq \emptyset$ .

**Лемма 3.3.1.10 (Характеризация предельных точек).**

▷  $a$  — является предельной точкой  $S \subseteq M \Leftrightarrow$  существует последовательность  $x_n \in S \mid \forall n: x_n \neq a, x_n \xrightarrow{p} a$ .

▷ Доказательство.

◦ ( $\Rightarrow$ ): Пусть  $B_{\frac{1}{n}}(a) \cap (S \setminus \{a\}) \neq \emptyset$ , тогда  $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \cap (S \setminus \{a\})$ .  $\rho(x_n, a) \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$ .

◦ ( $\Leftarrow$ ): Пусть существует сходящаяся  $x_n$ , тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$ , значит  $\forall \varepsilon > 0: \exists k \mid \forall n > k: \rho(x_n, a) < \varepsilon$ , т.к.  $x_n \in B_\varepsilon(a)$ ,  $x_n \neq a$ , то  $(S \setminus \{a\}) \cap B_\varepsilon(a) \neq \emptyset$ .

□

**ОПР 3.3.1.11 (области).**

$S \subseteq M$  — называют открытым (областью), если  $\forall a \in S: \exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(a) \subseteq S$ .

Следствие 3.3.1.12 ( $B_r(a)$  — открыто).

▷  $B_r(a)$  — открыто

**ОПР 3.3.1.13 (замкнутого множества).**

$S \subseteq M$  — называется замкнутым, если  $M \setminus S$  — открыто.

**ОПР 3.3.1.14 (Полного метрического пространства).**

Метрическое пространство  $M$  — называется полным, если всякая последовательность Коши имеет предел в  $M$ .

**Пример 3.3.1.15 (К определению).**

▷  $\mathbb{R}$  с метрикой  $\rho(x, y) = |x - y|$  — полное метрическое пространство.

**Лемма 3.3.1.16 (О метриках в  $\mathbb{R}^n$ ).**

▷  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n: \rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq \sqrt{n} \cdot \rho_1(x, y)$ .

▷ Доказательство.

◦  $|x_k - y_k|^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_{ki} - y_{ki})^2 \Rightarrow |x_k - y_k| \leq \sqrt{(\sum_{i=1}^n |x_{ki} - y_{ki}|^2)} - \forall k = 1, 2, \dots, n. \Rightarrow \max_{k=1, \dots, n} |x_k - y_k| \leq \sqrt{(\sum_{i=1}^n |x_{ki} - y_{ki}|^2)}$ .

◦  $\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2 \leq \sum_{i=1}^n \max_{k=1, \dots, n} |x_k - y_k|^2 = n \cdot \max_{k=1, \dots, n} |x_k - y_k|^2 \Rightarrow \rho_2(x, y) \leq \sqrt{n} \cdot \rho_1(x, y)$ .

□

**3.3.1.17 Обозначение**

▷  $x_k \in \mathbb{R}^n: \vec{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}), \vec{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}), \dots; \vec{x}_l = (x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{ln}); \dots \Rightarrow x_k \in \mathbb{R}^n$

Это означает, что это — последовательность Коши относительно метрики  $\rho_2$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta \mid \forall l, m > \delta: \rho_2(x_l, x_m) =$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{li} - x_{mi})^2} < \varepsilon.$$

**УТВ 3.3.1.18 (Свойства сходимости).**

▷ Если последовательность  $\vec{x}_k$  — сходится к вектору  $\vec{x}_0$  в  $\mathbb{R}^n$  относительно метрики  $\rho_2$ , то это означает, что  $\forall i: \exists \lim_{l \rightarrow \infty} x_{li} = x_{0i}$  и наоборот: если существует  $\lim_{l \rightarrow \infty} x_{li} = x_{0i}$ , то последовательность  $x_l$  — сходится в метрике  $\rho_2$ .

▷ Доказательство.

- ✓ ( $\Rightarrow$ ): Пусть  $\vec{x}_l$  — сходится к  $\vec{x}_0$  в  $\rho_2$ , тогда  $\rho_1(\vec{x}_l, \vec{x}_0) = \max_k |x_{lk} - x_{0k}| \leq \rho_2(\vec{x}_l, \vec{x}_0) < \varepsilon$  — начиная с некоторого номера,  $\Rightarrow \max_k |x_{lk} - x_{0k}| < \varepsilon \Rightarrow |x_{lk} - x_{0k}| < \varepsilon$  — эта последовательность сходится.
- ✓ ( $\Leftarrow$ ): Очевидно.

□

*Следствие 3.3.1.19 (Полнота  $\mathbb{R}^n$ ).*

▷ Пространство  $\mathbb{R}^n$  — полно, относительно метрики  $\rho_2$ .

▷ Доказательство.

- Если  $x_l$  — последовательность Коши, то  $x_{li}$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$  — также являются последовательностями Коши в  $\mathbb{R}$ . Т.к.  $\mathbb{R}$  — полно, следовательно существует предел  $x_{0i} = \lim_{l \rightarrow \infty} x_{li} = \forall i = 1, 2, \dots, n$ . Отсюда следует, в силу полноты  $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$  — предел  $x_l$ , относительно метрики  $\rho_1$ . Значит наше пространство полно, а в силу неравенства этот предел относительно  $\rho_2$ .

□

## 3.4 Компактные множества

**ОПР 3.4.1 (компактного множества).**

Пусть  $M$  — метрическое пространство, подмножество  $S$  пространства  $M$  — называется компактным, если для каждой ограниченной последовательности  $x_n \in S$  можно выбрать сходящуюся в  $S$  подпоследовательность (т.е. предел сходящейся подпоследовательности принадлежит  $S$ ).

**Пример 3.4.2 (К определению).**

- ▷ Множество  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  — компактно, т.к. в силу теоремы Вейерштрасса можно выбрать сходящуюся подпоследовательность и отрезок — замкнут.

**Лемма 3.4.3 (Полнота компактных множеств).**

- ▷ Всякое компактное подмножество  $S$  метрического пространства  $M$  — полно.

▷ Доказательство.

- Пусть  $x_n$  — последовательность Коши в  $S$ ,  $x_0$  — предельная точка, тогда  $x_n \rightarrow x_0$  в смысле метрики  $\rho_1$ , которая там есть. Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда выберем  $p$  и  $q$  такие, что  $\rho(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2} = \forall p, q$ , начиная с некоторого номера. Т.к.  $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ , то начиная с некоторого номера  $\rho(x_q, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$  (следует из сходимости)  $\Rightarrow \rho(x_p, x_0) \leq \rho(x_p, x_q) + \rho(x_q, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow x_0$  — предел любой подпоследовательности  $\Rightarrow S$  — полно.

□

*Следствие 3.4.3.1 (Замкнутость компактных множеств).*

- ▷ Компактное множество замкнуто.

▷ Доказательство.

- Пусть  $x_0$  — предельная точка множества  $S$ , тогда шар  $B_{\frac{1}{n}}x_0 \cap (S \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$ ;  $x_n \in B_{\frac{1}{n}}x_0 \cap (S \setminus \{x_0\})$ , стало быть  $x_n \rightarrow x_0$ , а т.к.  $S$  — компактное, то  $x_0 \in S$  (т.к. любая сходящаяся подпоследовательность должна иметь предел в  $S$ )

□

**Лемма 3.4.4 (Ограниченность компактного подмножества).**

- ▷ Всякое компактное подмножество  $S$  во множестве  $M$  — ограничено.

▷ Доказательство.

- От противного: пусть  $S$  — не ограничено, тогда в силу не ограниченности существует точка  $x_1$   $|\rho(x_0, x_1)| > 1$ . Построим последовательность  $x_2, x_3, \dots, x_n$  таких, что  $\rho(x_{n+1}, x_n) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \rho(x_k, x_{k+1})$ , это неравенство гарантирует, что точки  $x_n$  — различные. Отсюда следует, что  $\forall p, q$ , (в силу дополнительных свойств метрики)

□

Следствие 3.4.4.1 (Замкнутость и ограниченность компактного множества).

▷ Если  $S$  — компактно, то он замкнуто и ограничено; вообще говоря обратное неверно.

▷ Доказательство.

◦ Я вам дать не могу, знаний не хватает.

□

**ОПР 3.4.5 ( $\varepsilon$ -сети).**

Пусть  $M$  — метрическое пространство,  $S \subseteq M$ ;  $B \subseteq M$ .  $B$  — называется  $\varepsilon$ -сетью множества  $S$ , если  $\forall x \in S: \exists y \in B \mid \rho(x, y) < \varepsilon$ , или по другому:  $S \subseteq \bigcup_{y \in B} B_\varepsilon(y)$ .

**Теорема 3.4.6 (Хаусдорфа о критерии компактности).**

▷  $S \subseteq M$  — компактно  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ : существует конечная  $\varepsilon$ -сеть  $U_\varepsilon$  („очень важный критерий“).

▷ Доказательство.

- ( $\Rightarrow$ ): пусть  $S$  — компактно,  $\varepsilon > 0$ ,  $x_1 \in S$ , тогда выберем множество  $U_1 = \{x \mid \rho(x, x_1) < \varepsilon\}$ . Пусть  $x_2 \notin U_1$ , тогда выберем множество  $U_2 = \{x \mid \rho(x, x_2) < \varepsilon\}$ . Строим по индукции:  $U_1, U_2, \dots$ . Если при каком-нибудь  $r$  — множество покрывает  $S$ , то нужное покрытие —  $\varepsilon$ -сеть. Если не существует, получаем:  $x_1, x_2, \dots, x_n$  —  $\forall p, q \mid \rho(x_p, x_q) > \varepsilon$ ,  $p \neq q$ , но  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — не является сходящейся, что противоречит компактности.
- ( $\Leftarrow$ ): Пусть  $\forall \varepsilon$  — существует  $\varepsilon$ -сеть,  $x_0 \in S$ ,  $\varepsilon > 1$ ,  $x_1$  такой, что  $\rho(x_0, x_1) < 1$ . Выберем  $\varepsilon = \frac{1}{2}x_2: \rho(x_0, x_2) < \frac{1}{2}$ ;  $\dots$ ;  $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ ,  $x_k \mid \rho(x_0, x_k) < \frac{1}{2^k}$ .  $x_1, x_2, \dots, x_k \in S$  и  $x_n \rightarrow x_0$  в смысле метрики  $\rho$ .

□

**ОПР 3.4.7 (открытого покрытия).**

Пусть  $U_\alpha$  — открытое в  $M$  (семейство открытых множеств). Будем говорить, что  $U_\alpha$  — открытое покрытие множества  $S$ , если  $S \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ .

Следствие 3.4.7.1 (условие компактности).

▷  $S$  — компактно  $\Leftrightarrow$  для любого открытого покрытия множества  $S$  — можно выбрать конечное подпокрытие.

▷ Доказательство.

- $S, x \in S, \forall \varepsilon > 0$  рассмотрим  $B_\varepsilon(x)$  — открыто по определению  $\Rightarrow_{(\text{очевидно})} \subset \bigcup_{x \in S} B_\varepsilon(x)$ .

□

Следствие 3.4.7.2 (компактность ограниченных и замкнутых множеств).

▷ Всякое замкнутое, ограниченное подмножество в  $\mathbb{R}^n$  — компактно.

▷ Доказательство.

- Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда выберем всевозможные точки с разными координатами. Т.к. у нас сходимости эквивалентна сходимости по координатам, то  $\forall \varepsilon: \exists(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{Q} \Rightarrow$  предъявим  $\forall \varepsilon$  — конечную  $\varepsilon$ -сеть, т.е. существует шар с каким-то радиусом, который покрывает множество.

□

## 3.5 Непрерывность

Пусть  $(M_1, \rho_1)$  и  $(M_2, \rho_2)$  — два метрических пространства. Пусть  $f: M_1 \rightarrow M_2$ .

**ОПР 3.5.1 (1 непрерывной в предельной точке функции).**

Будем говорить, что  $f$  — непрерывная в т.  $\vec{p}_0$  (предельная точка  $M_1$ ), если для любой последовательности  $P_n \subset M_1: p_n \neq \vec{p}_0$  и  $p_n \xrightarrow{\rho_1} \vec{p}_0$  имеет место:  $f(p_n) \xrightarrow{\rho_2} f(\vec{p}_0)$ .

**ОПР 3.5.2 (2 непрерывной в предельной точке функции).**

...

**ОПР 3.5.3 (Сжимающего отображения).**

Пусть  $\phi: M \xrightarrow{\rho} M$ . Будем говорить, что  $\phi$  — сжимающее отображение, если  $\forall x, y \in M: \rho(\phi(x), \phi(y)) \leq q \cdot \rho(x, y)$ , где  $q < 1$ .

**Лемма 3.5.4 (Непрерывность сжимающего отображения).**

▷ Всякое сжимающее отображение — непрерывно

▷ Доказательство.

◦ УПР.

□

**Теорема 3.5.5 (О неподвижной точке).**

▷ Пусть

$M$  — полное метрическое пространство (всякая последовательность Коши имеет предел);  $f: M \rightarrow M$  и  $f$  — сжимающее отображение.

▷ Тогда

Существует единственная неподвижная точка отображения  $f$  (т.е.  $\exists x: f(x) = x$ ).

▷ Доказательство.

- Единственность: пусть  $x_1$  и  $x_2 \in \mathbb{R}$  — две разные неподвижные точки, тогда  $x_1 = f(x_1)$  и  $x_2 = f(x_2)$ . Рассмотрим  $\rho(x_1, x_2) = \rho(f(x_1), f(x_2)) \leq q \cdot \rho(x_1, x_2) \Rightarrow (1 - q) \cdot \rho(x_1, x_2) \leq 0$ , но т.к.  $0 \leq q < 1 \Rightarrow 0 \leq \rho(x_1, x_2) \leq 0 \Rightarrow \rho(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$  из свойств метрики.
- Конструкция: пусть  $x_1 \in M$  — произвольная точка, построим последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  по следующему правилу:  $x_2 = f(x_1)$ ,  $x_3 = f(x_2)$ ,  $\dots$ ,  $x_m = f(x_m)$ ,  $\dots$ . Пусть  $\ell = \rho(x_1, x_2)$ , а  $q < 1$  — показатель сжатия, рассмотрим

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+1}) &= \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq q \cdot \rho(x_{n-1}, x_n) = q \cdot \rho(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \leq q^2 \cdot \rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \dots \\ &\leq q^{n-1} \cdot \rho(x_1, x_2) = q^{n-1} \cdot \ell. \end{aligned}$$

$\rho(x_n, x_{n+k}) \leq$  (используя дополнительные свойства метрики)  $\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \rho(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \leq$   
 $\leq q^{n-1} \cdot \ell + q^n \cdot \ell + \dots + q^{n+k-2} \cdot \ell = q^{n-1} \cdot \ell \cdot (1 + q + \dots + q^{k-1}) = q^{n-1} \cdot \ell \cdot \frac{1-q^k}{1-q} \leq \ell \cdot \frac{q^{n-1}}{1-q} \Rightarrow$  последовательность — является последовательностью Коши, т.к.  $\forall \varepsilon: \exists k \mid \forall n, m > k: \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

Считаем  $n > m$ ,  $\rho(x_n, x_m) \leq \ell \cdot \frac{q^{n-1}}{1-q}$ , но т.к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell \cdot \frac{q^{n-1}}{1-q} = 0$ , т.к.  $0 < q < 1 \Rightarrow \exists k: \forall n > k: \ell \cdot \frac{q^{n-1}}{1-q} < \varepsilon \Rightarrow$  верно.

Т.к.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — последовательность Коши, а пространство  $M$  — полно, то  $\exists x_0 \in M \mid x_n \rightarrow x_0$ . Учитывая, что  $x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow x_{n+1} \xrightarrow{\rho} x_0$ , а  $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x_0)$ , т.к.  $f$  — непрерывная в силу леммы о непрерывности сжимающего отображения 3.5.4 на стр. 35  $\Rightarrow x_0 = f(x_0) \Rightarrow x_0$  — неподвижна.

□

## Глава 4

# Функции многих переменных

### ОПР 4.1 (нормы).

$\forall n: \mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}^n$ ,  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\vec{o} = (0, 0, \dots, 0)$ ,  $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ ,  $\lambda \cdot \vec{x} = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n)$ .

Норма

$$\|\vec{x}\|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

где  $n$  — размерность пространства. Обозначим через  $\vec{e}_i = \overbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}^{i\text{-ое место}}$  — базисный вектор  $\Rightarrow \forall \vec{x}: \vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n$ .

### 4.2 Свойства нормы:

- ▷  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n: \|\vec{x}\|_n \geq 0$ , причём  $\|\vec{x}\|_n = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{o}$  (очевидно из определения);
- ▷  $\|\lambda \cdot \vec{x}\|_n = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|_n$  — однородность нормы, где  $\lambda \in \mathbb{R}$  (очевидно из определения);
- ▷  $\|\vec{x} + \vec{y}\|_n \leq \|\vec{x}\|_n + \|\vec{y}\|_n$  — следует из неравенства Минковского<sup>1</sup>, при  $p = 2$ .

### 4.3 Свойства скалярного произведения

- ▷ Обозначим  $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$  — скалярное произведение:
- 1.  $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$  — симметричность;
- 2.  $(\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{z}, \vec{y}) = \lambda \cdot (\vec{x}, \vec{y}) + \mu \cdot (\vec{z}, \vec{y})$  — билинейность;
- 3.  $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\|_n \cdot \|\vec{y}\|_n$  — это следует из неравенства Коши-Буняковского<sup>1</sup>.

### ОПР 4.4 (Метрика по формуле, её непрерывность).

В  $\mathbb{R}^n$  с заданной нормой  $\|\cdot\|_n$  — можно ввести метрику по формуле:

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}.$$

Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , это означает, что  $\exists \vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid \vec{y} = f(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ . Если  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ , то  $y_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $F_i$  — координатное отображение. Будем говорить, что отображение  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — непрерывно в точке  $x_0$ , если оно — непрерывно как отображение метрических пространств  $\{\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_n\}$  в  $\{\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_m\}$ .

---

<sup>1</sup>Гласит о том, что при  $p \geq 1$  выполняется:  $\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p + \sum_{i=1}^n |y_i|^p$

<sup>1</sup>Гласит о том, что  $\forall \vec{x}, \vec{y}: \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}$ .

## 4.5 Линейные отображения

### ОПР 4.5.1 (линейного отображения).

Пусть  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $F$  — называется линейным отображением, если выполнены следующие условия:

- $F(\vec{o}) = \vec{o}$ ;
- $F(\vec{x} + \vec{y}) = F(\vec{x}) + F(\vec{y}) - \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ;
- $F(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot F(\vec{x}) - \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ и } \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .

### Пример 4.5.1.1 (линейного отображения).

▷ Пусть  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  и  $G: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ ,  $F$  и  $G$  — линейные отображения, тогда  $G \circ F = G(F)$  — так же линейное отображение.

### Теорема 4.5.2 (Об представлении решения).

▷ Пусть  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейное отображение, тогда существуют вектора  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$   $F(\vec{x}) = x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{a}_n$ , причём  $\vec{a}_i = F(\vec{e}_i)$ ,  $\vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$ . В частности, если составить таблицу вида

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то это — матрица линейного отображения.

### ОПР 4.5.3 (Определение нормы линейного отображения).

Пусть  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  и  $F$  — линейное; определим  $\|F\|$  — норма линейного отображения следующим образом:

$$\|F\| = \sup_{\substack{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \\ \|\vec{x}\|_n = 1}} \|F(\vec{x})\|_m.$$

### Теорема 4.5.4 (Неравенство норм линейных отображений).

▷  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$  — имеет место:  $\|F(\vec{x})\|_m \leq \|F\| \cdot \|\vec{x}\|_n$ .

▷ Доказательство.

- Если  $\vec{x} = \vec{o}$ , то очевидно; пусть  $\vec{x} \neq \vec{o}$ , тогда рассмотрим  $\vec{y} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_n} \neq 0$ . Очевидно из свойства однородности нормы 4.2 на стр. 36:  $\|\vec{y}\|_n = 1$  (из однородности), тогда

$$\|F\| \geq (\text{из свойств sup}) \|F(\vec{y})\|_m = \left\| F\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_n}\right) \right\|_m = \left\| F(\vec{x}) \cdot \frac{1}{\|\vec{x}\|_n} \right\|_m = \frac{1}{\|\vec{x}\|_n} \cdot \|F(\vec{x})\|_m \Rightarrow \|F\| \cdot \|\vec{x}\|_n \geq \|F(\vec{x})\|_m.$$

□

Следствие 4.5.4.1 (Связь нормы отображения и сжимаемости).

▷ Пусть

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \|F\| = q < 1.$$

▷ Тогда

Отображение  $F$  — сжимаемое.

▷ Доказательство.

- $\rho(F(\vec{x}_1), F(\vec{x}_2)) = \|F(\vec{x}_1) - F(\vec{x}_2)\|_m = (\text{линейность}) \|F(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\|_m \leq \|F\| \cdot \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|_n = q \cdot \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|_n = q \cdot \rho(\vec{x}_1, \vec{x}_2).$

□

### Теорема 4.5.5 (Об оценке нормы линейного отображения).

▷  $\|F(\vec{x})\|_m \leq M \cdot \|\vec{x}\|_n$ , где  $M = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\vec{a}_i\|_m^2} \Rightarrow \|F\| \leq M$ .

○ Рассмотрим:

$$\begin{aligned}
 \|F(\vec{x})\|_m &=_{\text{(теорема об представлении решения 4.5.2 на стр. 37)}} \|x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{a}_n\|_m \leq \\
 &\leq \|x_1\|_m \cdot \|\vec{a}_1\|_m + \|x_2\|_m \cdot \|\vec{a}_2\|_m + \dots + \|x_n\|_m \cdot \|\vec{a}_n\|_m \leq \\
 &\leq_{\text{(в силу неравенства Коши-Буняковского)}} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\vec{a}_i\|_m^2} \stackrel{\text{def}}{=} \\
 &= \|\vec{x}\|_n \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\vec{a}_i\|_m^2} = \|\vec{x}\|_n \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2 \right)} = \|\vec{x}\|_n \cdot M.
 \end{aligned}$$

□

**Теорема 4.5.6 (Непрерывность линейного отображения).**

▷ Всякое линейно отображение  $F$  из  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — непрерывное в любой точке ( $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ).

▷ Доказательство.

○ Пусть последовательность  $x_n \xrightarrow{\rho} \vec{x}_0$ , тогда  $\rho(F(x_n), F(\vec{x}_0)) = \|F(x_n) - F(\vec{x}_0)\|_m =_{\text{(линейность)}} \|F(x_n - \vec{x}_0)\|_m \leq$   
 $\leq_{\text{(Теорема 4.5.4 на стр. 37)}} \|F\| \cdot \|\vec{x}_n - \vec{x}_0\|_n = \|F\| \cdot \rho(x_n, \vec{x}_0) < \delta \Rightarrow_{\text{(Определение 3.5.1 и 3.5.2 на стр. 34)}} F(x_n) \xrightarrow{\rho} F(\vec{x}_0) - \forall \vec{x}_0.$

□

## 4.6 Аффинные отображения

**ОПР 4.6.1 (аффинного отображения).**

Пусть  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейное отображение и  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ , тогда отображение  $h(\vec{x}) = F(\vec{x}) + \vec{b}$  — называется аффинным.  $F$  — называется линейным отображением, ассоциативным с аффинным.

*Следствие 4.6.2 (Непрерывность аффинного отображения).*

▷ Всякое аффинное отображение — непрерывно (из Теоремы 4.5.6 на стр. 38).

*Следствие 4.6.3 (Условие сжимаемости аффинного отображения).*

▷ Если  $\|F\| < 1$ , то аффинное отображение — сжимающее  $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$  (из Следствия 4.5.4.1 на стр. 37)

## 4.7 Частная производная

**ОПР 4.7.1 (параметризованной и дифференцируемой кривой).**

Пусть  $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , тогда  $\forall t \in (a, b)$  — определён вектор  $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$  — параметризованная кривая в  $\mathbb{R}^n$ . Будем говорить, что кривая непрерывна, если  $\forall i: f_i(t)$  — непрерывна.  $\vec{f}$  — дифференцируемая кривая, если  $\forall i: f_i(t)$  — дифференцируема.

**ОПР 4.7.2 (Дифференцируемость параметризованной кривой в точке).**

Будем говорить, что  $\vec{f}$  — дифференцируема в точке  $t_0 \in (a, b)$ , если существует вектор

$$\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n \left| \lim_{t \rightarrow t_0} \left\| \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} - \alpha_i \right\|_n = 0, \right.$$

в этом случае  $\vec{\alpha}$  — называется касательным вектором. Если  $\vec{\alpha}$  существует, то  $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$  или  $f'_t(t_0)$ .

*Следствие 4.7.3 (Условие дифференцируемости в точке).*

▷ Пусть  $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $M \subseteq (a, b)$ , тогда  $\vec{f}(t)$  — дифференцируема в точке  $t_0 \Leftrightarrow \forall i: \exists \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} = \alpha_i \in \mathbb{R}$ , причём  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  — это компоненты вектора  $\vec{\alpha}$  из предыдущего определения.

## 4.7.4 Соглашение

▷ Пусть

$$\begin{aligned}\frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0} &= \left( \frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0}, \dots, \frac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0} \right) = \\ &= \frac{1}{t - t_0} \cdot (f_1(t) - f_1(t_0), f_2(t) - f_2(t_0), \dots, f_n(t) - f_n(t_0)).\end{aligned}$$

**Теорема 4.7.5 (Умножение матрицы на вектор).**

▷ Пусть

$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  и  $L$  — линейное отображение;  $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in (a, b)$  и  $\vec{f}$  — дифференцируема в точке  $t_0$ .

▷ Тогда

Функция  $\vec{g}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ , где  $\vec{g}(t) = L \circ \vec{f}(t)$  — дифференцируема в точке  $t_0$ , причём  $\vec{g}'(t_0) = L(\vec{f}'(t_0))$ .

▷ Доказательство.

◦ Рассмотрим

$$\frac{\vec{g}(t) - \vec{g}(t_0)}{t - t_0} = \frac{L(\vec{f}(t)) - L(\vec{f}(t_0))}{t - t_0} \stackrel{(\text{линейность})}{=} \frac{L(\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0))}{t - t_0} \stackrel{(\text{однородность})}{=} L \left( \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0} \right),$$

но

$$\lim_{t \rightarrow t_0} L \left( \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0} \right) \stackrel{(\text{в смысле метрики})}{=} L \left( \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0} \right) = L(\vec{f}'(t_0)) \equiv g'(t_0).$$

□

**Теорема 4.7.6 (Аналог теорем о среднем для дифференцируемых функций).**

▷ Пусть

$F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  — дифференцируема на  $(a, b)$  и непрерывна на  $[a, b]$ ;  $\exists M \mid \forall t \in [a, b]: \|\vec{f}'(t)\|_n < M$ , где  $\|\vec{f}'(t)\|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{df_{i2}}{dt}(t)}$ .

▷ Тогда

$$(\star) \quad \left\| \vec{f}(b) - \vec{f}(a) \right\|_n \leq M \cdot |b - a|.$$

▷ Доказательство.

- Если  $\vec{f}(b) = \vec{f}(a)$  или, что тоже самое,  $\|\vec{f}(b) - \vec{f}(a)\|_n = 0$ , то  $(\star)$  — очевидна, пусть  $\|\vec{f}(b) - \vec{f}(a)\|_n \neq 0$ , тогда рассмотрим вектор  $\vec{u} = \frac{\vec{f}(b) - \vec{f}(a)}{\|\vec{f}(b) - \vec{f}(a)\|_n}$ : очевидно, что  $\|\vec{u}\|_n = 1$ .
- Рассмотрим отображение  $L(\vec{x}) = (\vec{u}, \vec{x})$  — в силу свойств скалярного произведения 4.3 на стр. 36:  $L(\vec{x})$  — линейное отображение из  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L(\vec{x}) = \sum_{i=0}^n u_i \cdot x_i$ .
- Рассмотрим функцию  $\phi(t) = (L \circ \vec{f})(t)$ ,  $\phi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Согласно теореме 4.7.5 на стр. 39:  $\phi$  — дифференцируема на  $(a, b)$ ,  $(\vec{u}, \vec{f}(t))' = (\vec{u}, \vec{f}'(t))$ , т.е.  $\phi'(t) = L(\vec{f}'(t))$ ; а согласно Теореме 4.5.6 на стр. 38 — непрерывна на  $(a, b)$ . Применим теорему Лагранжа:  $\phi(b) - \phi(a) = (b - a) \cdot \phi'(t_0)$ , где  $t_0 \in (a, b) \Rightarrow (\blacklozenge) |\phi(b) - \phi(a)| = |b - a| \cdot |\phi'(t_0)|$ .
- Рассмотрим

$$\begin{aligned}|\phi(b) - \phi(a)| &= \left| (\vec{u}, \vec{f}(b)) - (\vec{u}, \vec{f}(a)) \right| \stackrel{(\text{Свойства скалярного произведения 4.3 на стр. 36 пункт 2})}{=} \left| (\vec{u}, \vec{f}(b) - \vec{f}(a)) \right| = \\ &= \left| \left( \frac{\vec{f}(b) - \vec{f}(a)}{\|\vec{f}(b) - \vec{f}(a)\|_n}, \vec{f}(b) - \vec{f}(a) \right) \right| = \frac{1}{\|\vec{f}(b) - \vec{f}(a)\|_n} \cdot \left| (\vec{f}(b) - \vec{f}(a), \vec{f}(b) - \vec{f}(a)) \right| = \|\vec{f}(b) - \vec{f}(a)\|_n.\end{aligned}$$

◦ Рассмотрим

$$|\phi'(t_0)| = \left| (\vec{u}, \vec{f}'(t_0)) \right| = \left| (\vec{u}, \vec{f}'(t_0)) \right| \leq (\text{Коши-Буняковского 4.3 на стр. 36}) \|\vec{u}\|_n \cdot \|\vec{f}'(t_0)\|_n = \|\vec{f}'(t_0)\|_n \leq M \Rightarrow$$



□

Следствие 4.7.7 (Неравенство).

▷ Пусть

$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{f}$  — непрерывная на  $[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$ ; вектор  $\vec{\ell} \in \mathbb{R}^n$   $\| \vec{f}'(t) - \vec{\ell} \|_n \leq \varepsilon$   $\varepsilon > 0 - \forall t \in (a, b)$ .

▷ Тогда

$$\left\| \frac{\vec{f}(b) - \vec{f}(a)}{b - a} - \vec{\ell} \right\|_n \leq \varepsilon.$$

▷ Доказательство.

◦ Рассмотрим функцию  $\vec{g}(t) = \vec{f}(t) - t \cdot \vec{\ell}$ , тогда  $\| \vec{g}'(t) \|_n = \| \vec{f}'(t) - \vec{\ell} \|_n \leq \varepsilon \Rightarrow$  (Теорема 4.7.6 на стр. 39)  $\| \vec{g}(b) - \vec{g}(a) \|_n \leq \varepsilon \cdot |b - a| \Rightarrow \left\| \frac{\vec{f}(b) - \vec{f}(a)}{b - a} - \vec{\ell} \cdot \frac{b - a}{b - a} \right\|_n \leq \varepsilon$ .

□

#### 4.7.8 Конструкция для частных производных

▷ Пусть  $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $U$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^n$  и  $\vec{f}$  — определена на  $U$ ;  $x_0 \in U$ ; тогда существует шар  $B_\varepsilon(x_0) \subset U$  т.к.  $U$  — открыто.

▷ Зафиксируем  $i$  из  $1, 2, \dots, n$  и рассмотрим интервал  $J = (x_{0i} - \varepsilon, x_{0i} + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ : определим функцию  $\vec{\phi}_i(t): J \rightarrow \mathbb{R}^m$  по формуле:  $\vec{\phi}_i(t) = \vec{f}(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0i-1}, t, x_{0i+1}, \dots, x_{0n})$ .

▷ Введём вектор  $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + t \cdot \vec{e}_i - x_{0i} \cdot \vec{e}_i$ , т.е.  $\phi_i(t) = \vec{f}(\vec{x}(t))$ .

#### ОПР 4.7.9 (i-ая частная производная).

Если функция  $\vec{\phi}_i(t)$  — дифференцируема при  $t = x_{0i}$ , то говорят, что у отображения  $\vec{f}$  — существует  $i$ -ая частная производная. Обозначается:

$$\frac{d\phi_i}{dt}(x_{0i}) = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}(x_0) = \partial_i \vec{f}(\vec{x}_0).$$

Следствие 4.7.10 (Тождества частной производной).

▷ Рассмотрим

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \rightarrow x_{0i}} \frac{\phi_i(t) - \phi_i(x_{0i})}{t - x_{0i}} = \lim_{t \rightarrow x_{0i}} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + (t - x_{0i}) \cdot \vec{e}_i) - \vec{f}(x_{0i})}{t - x_{0i}}.$$

#### Пример 4.7.10.1 (взятия частной производной).

▷ Пусть  $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $f_1(x, y, z) = x \cdot y + y \cdot z$ ;  $f_2(x, y, z) = x^2 + y \cdot z$ ; и  $\vec{x}_0 = (1, -1, -2)$ , тогда

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \left( \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^T, \text{ где } \phi_2'(t+1) = \left( 1 \cdot (t+1) + (t+1) \cdot (-2), 1^2 + (t+1) \cdot (-2) \right)' = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

вектор частных производных в точке  $x_0 - \begin{pmatrix} x+z \\ z \end{pmatrix}$ .

Следствие 4.7.11 (Условия „имения“ частной производной).

▷  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — имеет частную производную  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \Leftrightarrow \exists \frac{df_j}{dx_i} - \forall j = 1, 2, \dots, n$  — это следует из определения дифференцируемости.

## 4.8 Дифференцируемость функции от многих переменных

### ОПР 4.8.1 (дифференцируемости).

Пусть  $U$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{x}_0 \in U$ . Отображение  $f$  — называется дифференцируемым в точке  $\vec{x}_0$ , если существует такое линейное отображение  $\vec{L}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , что  $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \vec{L}(\vec{x} - \vec{x}_0) + \alpha(\vec{x}) \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n$ , где  $\alpha(\vec{x})$  — это отображение из  $U$  в  $\mathbb{R}^m \mid \alpha(\vec{x}) \xrightarrow{\rho_m} \vec{0} \in \mathbb{R}^m$ , при  $\vec{x} \xrightarrow{\rho_n} \vec{x}_0$ . (т.е.  $\|\alpha(\vec{x})\|_m \rightarrow 0$ , при  $\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n \rightarrow 0$ ).

В случае, если  $\vec{f}$  — дифференцируема в точке  $\vec{x}_0$ , то  $\mathbf{L}^1$  — называется дифференциалом отображения  $\vec{f}$  в точке  $\vec{x}_0$  и обозначается  $\mathbf{L} = \mathbf{D}_{\vec{x}_0} \mathbf{f}$ , где  $\mathbf{D}_{\vec{x}_0} \mathbf{f}$  — матрица "Якоби"  $n \times m$ .

### 4.8.2 Конструкция

- ▷ Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  — открытое;  $\vec{x}_0 \in U$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ . Составим отображение  $\phi(t) = \vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}$ ,  $\phi: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow \exists \delta_0 \mid B_{\delta_0}(x_0) \subset U$ . Пусть  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , тогда введём  $\eta_0 = \frac{\delta_0}{\|\vec{x}\|}$ , чтобы  $\forall t \mid |t| < \eta_0$  имело место:  $\|(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) - \vec{x}_0\|_n = \|t \cdot \vec{x}\|_n = |t| \cdot \|\vec{x}\|_n < \delta_0$ .

### Теорема 4.8.3 (Дифференциал).

#### ▷ Пусть

$U$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{x}_0 \in U$  и  $f$  — дифференцируемое в  $\vec{x}_0$  отображение.

#### ▷ Тогда

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n: \exists \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) - f(\vec{x}_0)}{t} = (D_{\vec{x}_0} f)(\vec{x}) = (\mathbf{D}_{\vec{x}_0} \mathbf{f}) \cdot \vec{x} = \forall \vec{x}.$$

#### ▷ Доказательство.

- Из определения дифференцируемости  $\Rightarrow f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + (\mathbf{D}_{\vec{x}_0} \mathbf{f}) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \alpha(\vec{x}) \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n - \forall \vec{x} \in U$  и  $\exists \eta_0 \mid \forall t \mid |t| < \eta_0: \vec{x}_0 + t \cdot \vec{x} \in U$ . Тогда

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) &= f(\vec{x}_0) + (\mathbf{D}_{\vec{x}_0} \mathbf{f}) \cdot (t \cdot \vec{x}) + \alpha(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) \cdot \|t \cdot \vec{x}\|_n \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) - f(\vec{x}_0) = (\mathbf{D}_{\vec{x}_0} \mathbf{f}) \cdot (t \cdot \vec{x}) + \alpha(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) \cdot |t| \cdot \|\vec{x}\|_n \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) - f(\vec{x}_0)}{t} = (\mathbf{D}_{\vec{x}_0} \mathbf{f}) \cdot \vec{x} + \alpha(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) \cdot \frac{|t|}{t} \cdot \|\vec{x}\|_n \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) - f(\vec{x}_0)}{t} = (\mathbf{D}_{\vec{x}_0} \mathbf{f}) \cdot \vec{x} + \lim_{t \rightarrow 0+0} \alpha(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) \cdot \|x\|_n \cdot \frac{|t|}{t}. \end{aligned}$$

Но  $(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{x}_0, \text{ при } t \rightarrow 0) \Rightarrow (\text{Определение 4.8.1}) \lim_{t \rightarrow 0} \alpha(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) = 0$ , а по Конструкции 4.8.2  $\Rightarrow \|(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) - \vec{x}_0\|_n = |t| \cdot \|\vec{x}\|_n < \delta_0$ .

□

Следствие 4.8.3.1 (Условие существования всех частных производных).

- ▷ Пусть  $\vec{x} = \vec{e}_i$ , тогда  $\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{e}_i) - f(\vec{x}_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$  — из Следствия 4.7.10 на стр. 40.
- ▷ Если отображение  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , где  $U$  — открытое в  $\mathbb{R}^n$  — дифференцируемо в точке  $x_0$ , то тогда существуют все частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$  и обратное — неверно.

Следствие 4.8.3.2 (Формулы дифференциала).

- ▷ Выполнено:

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_{\vec{x}_0} \mathbf{f}) \cdot \vec{x} &= \sum_{i=1}^n \left( x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \right)^T; \\ (\mathbf{D}_{\vec{x}_0} \mathbf{f}) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right); \\ (\mathbf{D}_{\vec{x}_0} \mathbf{f}) &= \left\{ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \right\}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

### ОПР 4.8.4 (производной по направлению).

Выражение  $(\mathbf{D}_{\vec{x}} \mathbf{f}) \cdot \vec{x}$  при  $\|\vec{x}\| = 1$  — называется производной по направлению  $\vec{x}$ .

**ОПР 4.8.5 (градиента).**

Если  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , то  $(D_{\vec{x}_0} f) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$  — градиент:  $\nabla f(\vec{x}_0)$ .

**Пример 4.8.6 (непрерывной, с частной производной и не дифференцируемой функции).**

▷ Непрерывная функция, имеющая частную производную в точке, но не являющейся дифференцируемой:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2 \cdot xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

▷ Доказательство.

- Докажем, что  $f(x, y)$  — непрерывная в точке  $(0, 0)$ : из условия непрерывности — если  $\vec{w} = (x, y)$ ,  $\|\vec{w}\|_2 \rightarrow 0$ , то  $\|f(\vec{w})\|_1 = |f(\vec{w})| \rightarrow 0$ .

$\|\vec{w}\|_2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ , но  $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ ; тогда

$$\left| \frac{2 \cdot xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{2 \cdot |x| \cdot |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow$$

функция непрерывна.

- Посчитаем

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0; \text{ аналогично } \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0 \Rightarrow$$

матрица линейного отображения имеет вид  $(0, 0)$ .

- Предположим, что  $f$  — дифференцируема: пусть  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cdot x_1, y_0 + t \cdot y_1) - f(x_0, y_0)}{t} = (D_{\vec{x}_0} f) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = (0, 0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Пусть  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ;  $(x_1, y_1) = (1, 1)$ , тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cdot (x_0 + t \cdot x_1) \cdot (y_0 + t \cdot y_1)}{\sqrt{(x_0 + t \cdot x_1)^2 + (y_0 + t \cdot y_1)^2}} - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{2 \cdot t^2}{\sqrt{2} \cdot t} - 0 \right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  функция в  $\vec{0}$  — не дифференцируема из Определения 4.8.1 на стр. 41.

□

**ОПР 4.8.7 (Элементарного параллелепипеда или  $n$ -интервала).**

Пусть  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  и  $U = (\alpha_1, \beta_1) \times (\alpha_2, \beta_2) \times \dots \times (\alpha_n, \beta_n)$  <sup>(обозначим)</sup>  $\equiv I_n$  — называется  $n$ -интервалом (или элементарным параллелепипедом).

**Лемма 4.8.8 (Свойства элементарного параллелепипеда).**

▷ Пусть

$$U = I_n; f(U) \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ причём } f \text{ — непрерывна на } U \text{ и } \exists M \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \right\|_m \leq M - \forall \vec{x} \in U, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

▷ Тогда

$$\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in U: \|f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)\|_m \leq M \cdot \sqrt{n} \cdot \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|_n.$$

▷ Доказательство.

- Построим  $\vec{y}_0, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$  следующим правилом:  $\vec{y}_0 = (x_{11}; x_{21}, \dots, x_{n1})$ ;  $\vec{y}_1 = (x_{12}; x_{21}, \dots, x_{n1})$ ;  $\vec{y}_2 = (x_{12}, x_{22}; x_{31}, \dots, x_{n1})$ ;  $\dots$ ;  $\vec{y}_n = (x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2})$ ; тогда  $\vec{y}_0, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n \in U$ ,
- Пусть  $\phi_{i\vec{z}}(t) = f(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, t, z_{i+1}, \dots, z_n)$ , т.е.  $\phi_{i\vec{z}}(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ; заметим, что  $\phi_{i\vec{z}}(t)$  — дифференцируема, т.к.  $f$  обладает всеми частными производными и  $|\phi_{i\vec{z}}(t)| \stackrel{def}{=} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|$ .
- Рассмотрим  $|f(\vec{y}_i) - f(\vec{y}_{i-1})| = |\phi_{i\vec{y}_i}(x_{i2}) - \phi_{i\vec{y}_{i-1}}(x_{i1})| \leq$  (неравенство Лагранжа, где  $t_2 \in (x_{i1}, x_{i2})$ )  $|\phi'_{i\vec{z}}(t_2)| \cdot |x_{i2} - x_{i1}| \leq M \cdot |x_{i2} - x_{i1}|$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|f(\vec{x}_2) - f(\vec{x}_1)\|_m &= \|f(\vec{y}_n) - f(\vec{y}_{n-1}) + f(\vec{y}_{n-1}) - f(\vec{y}_{n-2}) + \dots - f(\vec{y}_0)\|_m \leq \\ &\leq \|f(\vec{y}_n) - f(\vec{y}_{n-1})\|_m + \|f(\vec{y}_{n-1}) - f(\vec{y}_{n-2})\|_m + \dots + \|f(\vec{y}_1) - f(\vec{y}_0)\|_m \leq \\ &\leq M \cdot (|x_{12} - x_{11}| + |x_{22} - x_{21}| + \dots + |x_{n2} - x_{n1}|) \leq \end{aligned}$$

□

**УТВ 4.8.9 (Достаточное условие дифференцируемости отображения в точке).**

▷ Пусть

$U$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{x}_0 \in U$ ;  $f$  — непрерывна в  $U$  и  $\forall i = 1, 2, \dots, n: \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$ , причём  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$  — непрерывна в точке  $\vec{x}_0 - \forall i$ .

▷ Тогда

$f$  — дифференцируема в точке  $\vec{x}_0$ .

▷ Доказательство.

- Введём отображение  $g(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \cdot (x_i - x_{i0})$ . Если мы докажем, что функция  $\alpha(\vec{x}) = \frac{g(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n} \rightarrow 0$ , при  $\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n \rightarrow 0$ , тогда всё докажем:  $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \cdot (x_i - x_{i0}) + \alpha(\vec{x}) \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n$ ,  $\alpha(\vec{x}) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .
- $\vec{g}(\vec{x}_0) = 0$ ;  $\vec{g}(\vec{x})$  — непрерывна, т.к. непрерывна  $f(\vec{x})$ :

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \text{ — непрерывна и } \frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = 0 - \forall i.$$

- Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда выберем  $\delta > 0 \parallel \vec{x} - \vec{x}_0 \parallel < \delta - \forall \vec{x} \in U$ :  $\left\| \frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{x}) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$  — из непрерывности. Очевидно, что во всяком шаре  $B_\varepsilon(\vec{x}_0)$  — существует  $n$ -мерный интервал  $I_n = (\alpha_1, \beta_1) \times (\alpha_2, \beta_2) \times \dots \times (\alpha_n, \beta_n) \in B_\varepsilon(\vec{x}_0)$ ; пусть  $x \in I_n \in B_\varepsilon(\vec{x}_0)$ , тогда  $\|\vec{g}(\vec{x})\|_m = \|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{g}(\vec{x}_0)\|_m \leq_{\text{(лемма)}} \sqrt{n} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n \leq \varepsilon \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n$ ;

$$\|\alpha(\vec{x})\|_m = \frac{\|\vec{g}(\vec{x})\|_m}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n} \leq \frac{\varepsilon \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n} = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\|\alpha(\vec{x})\|_m \rightarrow 0, \text{ при } \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n \rightarrow 0.$$

□

**Теорема 4.8.10 (О дифференцируемости суперпозиции отображений).**

▷ Пусть

$U$  — открыто в  $\mathbb{R}^n$ ,  $V$  — открыто в  $\mathbb{R}^m$ ,  $f: U \rightarrow V$ ;  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ ,  $f$  — дифференцируема в точке  $\vec{x}_0 \in U$ ,  $\vec{y}_0 = \vec{f}(\vec{x}_0) \in V$  и  $g$  — дифференцируема в точке  $\vec{y}_0$ .

▷ Тогда

Отображение  $h = g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  — дифференцируемо в точке  $\vec{x}_0 \in U$ , причём  $(D_{\vec{x}_0} h) = (D_{\vec{y}_0} g) \cdot (D_{\vec{x}_0} f)$  т.е.  $(D_{\vec{x}_0} h) = (D_{\vec{f}(\vec{x}_0)} g) \cdot (D_{\vec{x}_0} f)$ .

▷ Доказательство.

- $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + L(\vec{x} - \vec{x}_0) + \alpha(\vec{x}) \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n$ , где  $\alpha(\vec{x}) \xrightarrow{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n \rightarrow 0} 0$  — условие дифференцируемости  $f$ . А условие дифференцируемости  $g$  в точке  $\vec{y}_0$ :  $g(\vec{y}) = g(\vec{y}_0) + K(\vec{y} - \vec{y}_0) + \beta(\vec{y}) \cdot \|\vec{y} - \vec{y}_0\|_m$ , где  $\beta(\vec{y}) \rightarrow 0$ , при  $\|\vec{y} - \vec{y}_0\|_m \rightarrow 0$ , а  $K = (D_{\vec{y}_0} g)$ .
- Рассмотрим

$$\begin{aligned} h(\vec{x}) &= \vec{g}(f(\vec{x})) = h(\vec{x}_0) + K(f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)) + \beta(f(\vec{x})) \cdot \|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)\|_m = \\ &= h(\vec{x}_0) + K(L(\vec{x} - \vec{x}_0) + \alpha(\vec{x}) \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n) + \beta(f(\vec{x})) \cdot \|L(\vec{x} - \vec{x}_0) + \alpha(\vec{x}) \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n\|_m = \\ &= h(\vec{x}_0) + (K \cdot L) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + (K \cdot \alpha(\vec{x}) \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n + \beta(f(\vec{x})) \cdot \|L \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \alpha(\vec{x}) \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n\|_m). \end{aligned}$$

○ Рассмотрим

$$\begin{aligned}\gamma(\vec{x}) &= \frac{\mathbf{K} \cdot \alpha(\vec{x}) \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n + \beta(f(\vec{x})) \cdot \|\mathbf{L} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \alpha(\vec{x}) \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n\|_m}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n} : \\ \|\gamma(\vec{x})\|_\ell &= \left\| \mathbf{K} \cdot \alpha(\vec{x}) + \beta(f(\vec{x})) \cdot \left( \left\| \mathbf{L} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n} + \alpha(\vec{x}) \right\|_m \right) \right\|_\ell \leq \\ &\leq (\text{Свойства нормы 4.2 на стр. 36 пункт 3}) \|\mathbf{K} \cdot \alpha(\vec{x})\|_\ell + \left\| \beta(f(\vec{x})) \cdot \left( \left\| \mathbf{L} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n} + \alpha(\vec{x}) \right\|_m \right) \right\|_\ell \leq \\ &\leq \|\mathbf{K}\|_\ell \cdot \|\alpha(\vec{x})\|_\ell + \|\beta(f(\vec{x}))\|_\ell \cdot \left( \left\| \left\| \mathbf{L} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n} + \alpha(\vec{x}) \right\|_m \right\|_\ell \right) \leq \\ &\leq \|\mathbf{K}\|_\ell \cdot \|\alpha(\vec{x})\|_\ell + \|\beta(f(\vec{x}))\|_\ell \cdot (\|\mathbf{L}\|_m + \|\alpha(\vec{x})\|_m)\end{aligned}$$

При  $\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n \rightarrow 0$ ,  $\|\alpha(\vec{x})\|_m \rightarrow 0$ ,  $\|\mathbf{K}\|_\ell \cdot \|\alpha(\vec{x})\|_\ell \rightarrow 0$ ,  $\|\beta(f(\vec{x}))\|_\ell \rightarrow 0$ , — как суперпозиция дифференцируемых функций.  $\|g(\vec{x})\|_\ell \rightarrow 0$ , при  $\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n \rightarrow 0$ .

□

*Следствие 4.8.10.1 (Обратное отображение).*

▷ Пусть

$F$  — дифференцируема в точке  $\vec{x}_0$ , существует отображение  $\vec{G}$ :  $(G \circ F)(\vec{x}) = \vec{x}$ .

▷ Тогда

$G(\vec{x})$  — обратное отображение к  $F$ ,  $G(\vec{y}) = F^{-1}(\vec{y})$ , где  $(D_{F(\vec{x}_0)}\mathbf{G}) = (D_{\vec{x}_0}\mathbf{F})^{-1}$ .

▷ Доказательство.

$$\circ (G \circ F)(\vec{x}) = \vec{x} \Rightarrow (D_{F(\vec{x})}\mathbf{G}) \cdot (D_{\vec{x}}\mathbf{F}) = \mathbf{E} \Rightarrow (D_{F(\vec{x})}(\mathbf{F}^{-1})) = (D_{\vec{x}}\mathbf{F})^{-1}.$$

□

**Теорема 4.8.11 (Об обратном отображении).**

▷ Пусть

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $U$  — открыто в  $\mathbb{R}^n$ ;  $\vec{x}_0 \in U$ ;  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  — непрерывна в точке  $\vec{x}_0$ ;  $f$  — дифференцируема в точке  $\vec{x}_0$  и  $\det(D_{\vec{x}_0}\mathbf{f}) \neq 0$ ;  $\vec{y}_0 = f(\vec{x}_0)$ ;

▷ Тогда

Существуют открытые шары  $B_r(\vec{x}_0)$  и  $B_\rho(\vec{y}_0)$   $\forall \vec{y} \in B_\rho(\vec{y}_0): \exists! \vec{x} \in B_r(\vec{x}_0) \mid f(\vec{x}) = \vec{y}$ , в этом случае существует отображение  $f^{-1}: B_\rho(\vec{y}_0) \rightarrow B_r(\vec{x}_0)$ , которое называется *обратным* к  $f$ , причём  $f^{-1}$  — непрерывна в точке  $\vec{y}_0$  и  $f^{-1}$  — дифференцируема в точке  $\vec{y}_0$  и  $(D_{\vec{y}_0}(\mathbf{f}^{-1})) = (D_{\vec{x}_0}\mathbf{f})^{-1}$

▷ Комментарий (элементарный случай):

$\vec{x}_1 - \phi_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = \vec{y}_1$ ;  $\vec{x}_2 - \phi_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = \vec{y}_2$ ; ...;  $\vec{x}_n - \phi_n(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = \vec{y}_n$ , т.е. если  $\vec{x} - \vec{\phi}(\vec{x}) = \vec{y}$ . Пусть  $\vec{y}$  — фиксирована, тогда обозначим через  $\vec{\phi}_{\vec{y}}(\vec{x}) = \vec{\phi}(\vec{x}) + \vec{y}$ , тогда  $\vec{x} = \vec{\phi}_{\vec{y}}(\vec{x})$ .  $\vec{x}_0 = (0, 0, \dots, 0)$  и решаем:  $\vec{x}_0 = \vec{\phi}_{\vec{y}}(\vec{x}_0)$ , ...,  $\vec{x}_n = \vec{\phi}_{\vec{y}}(\vec{x}_{n+1})$ . Отображение должно быть сжимающим, т.к.  $\vec{x}$  — неподвижная точка.  $\|\vec{\phi}_{\vec{y}}(\vec{x}_1) - \vec{\phi}_{\vec{y}}(\vec{x}_2)\|_n = \|\vec{\phi}(\vec{x}_1) + \vec{y} - \vec{\phi}(\vec{x}_2) - \vec{y}\|_n = \|\vec{\phi}(\vec{x}_1) - \vec{\phi}(\vec{x}_2)\|_n \leq q \cdot \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|_n$ ,  $q < 1$  — это самый быстрый способ.

▷ Доказательство.

○ Приведение к элементарному виду:

- ✓ Пусть  $\forall \vec{x} \in U$  в силу дифференцируемости  $f$  в точке  $\vec{x}_0$ :  $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + (D_{\vec{x}_0}\mathbf{f}) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + g(\vec{x})$ , где  $g(\vec{x}) = \alpha(\vec{x}) \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n \Rightarrow g(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - L(\vec{x} - \vec{x}_0) \Rightarrow g(\vec{x}_0) = 0$  и  $\frac{\partial g}{\partial x_i}$  — непрерывна в точке  $\vec{x}_0$  (т.к.  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  — непрерывна) и  $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = 0$ .
- ✓  $f(\vec{x}) = \vec{y}_0 + L(\vec{x} - \vec{x}_0) + g(\vec{x}) \Rightarrow \vec{y} = \vec{y}_0 + L \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + g(\vec{x})$ ; т.к.  $\det L \neq 0 \Rightarrow \exists L^{-1} = K_{(\text{в силу алгебры})} \Rightarrow K(\vec{y}) = K(\vec{y}_0) + (\vec{x} - \vec{x}_0) + K \cdot g(\vec{x})$ . Введём  $h(\vec{x}) = K \cdot g(\vec{x})$ , тогда (★)  $\vec{x} + h(\vec{x}) = \vec{x}_0 + K \cdot (\vec{y} - \vec{y}_0)$  — элементарное уравнение, т.к.  $h(\vec{x}_0) = 0$  и в силу дифференцируемости линейного отображения:  $\frac{\partial h}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = 0$ .
- ✓ Следуя логике элементарного построения: введём

$$\phi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \vec{x}_0 + K \cdot (\vec{y} - \vec{y}_0) - h(\vec{x}),$$

○ Построим метрическое пространство, где  $\phi_{\vec{y}}(\vec{x})$  — сжимающее и переводит в себя:

✓ Пусть  $\delta_0 > 0 \mid B_{\delta_0}(\vec{x}_0) \subseteq U$  (существует, т.к.  $U$  — открытое). Заметим, что  $\forall \rho < \delta_0$  — шар  $B_\rho(\vec{x}_0)$  — замкнутый и содержится в  $B_{\delta_0}(\vec{x}_0)$ ; более того  $\forall \rho < \delta_0$ :  $B_\rho(\vec{x}_0)$  — является замкнутым метрических пространством.

✓ Докажем, что  $\exists \rho \mid \phi_{\vec{y}}(\vec{x}): \vec{B}_\rho(\vec{x}_0) \rightarrow \vec{B}_\rho(\vec{x}_0)$ : т.к.  $\frac{\partial h}{\partial \vec{x}_i}(\vec{x}_0) = 0 \Rightarrow \frac{\|h(\vec{x})\|_n}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n} \rightarrow 0$ , при  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \Rightarrow \exists \delta_1 > 0 \mid \frac{\|h(\vec{x})\|_n}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n} < \frac{1}{2} \Rightarrow \forall \vec{x} \in B_{\delta_1}(\vec{x}_0): \|h(\vec{x})\|_n < \frac{1}{2} \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n$ .

✓ Пусть  $\rho < \delta_1$ , тогда из (★):

$$(\blacklozenge) \nmid \|\vec{y} - \vec{y}_0\|_n < \frac{\rho}{2 \cdot \|K\|_n},$$

$$\text{тогда } \|\phi_{\vec{y}}(\vec{x}) - \vec{x}_0\|_n = \|\vec{x}_0 + K(\vec{y} - \vec{y}_0) - h(\vec{x}) - \vec{x}_0\|_n = \|K(\vec{y} - \vec{y}_0) - h(\vec{x})\|_n \leq \|K \cdot (\vec{y} - \vec{y}_0)\|_n + \|h(\vec{x})\|_n \leq \\ \leq \|K\|_n \cdot \|\vec{y} - \vec{y}_0\|_n + \frac{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n}{2} \leq_{(\text{из } \blacklozenge)} \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho.$$

○ Докажем сжимаемость:

✓  $\|\phi_{\vec{y}}(\vec{x}_1) - \phi_{\vec{y}}(\vec{x}_2)\|_n = \|\vec{x}_0 + K(\vec{y} - \vec{y}_0) - h(\vec{x}_1) - \vec{x}_0 - K(\vec{y} - \vec{y}_0) + h(\vec{x}_2)\|_n = \|h(\vec{x}_2) - h(\vec{x}_1)\|_n$ . Т.к.  $\frac{\partial h}{\partial \vec{x}_i}(\vec{x}_0) = 0$  и  $\frac{\partial h}{\partial \vec{x}_i}$  — непрерывна в точке  $\vec{x}_0$ , то можно выбрать шар радиуса  $\delta_3$  такой, что  $\left\| \frac{\partial h}{\partial \vec{x}_i} \right\|_n < \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n}} - \forall \vec{x} \in B_{\delta_3}(\vec{x}_0)$ , тогда  $\|h(\vec{x}_1) - h(\vec{x}_2)\|_n \leq$  (Лемма 4.8.8 на стр. 42)  $\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in B_{\delta_3}(\vec{x}_0): \frac{\sqrt{n}}{2 \cdot \sqrt{n} \cdot \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|_n} = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|_n \Rightarrow h(\vec{x})$  — сжимающая с коэффициентом  $q = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi_{\vec{y}}(\vec{x})$  — сжимающая с  $q = \frac{1}{2}$ .

✓  $\phi_{\vec{y}}(\vec{x}): \vec{B}_\rho(\vec{x}_0) \rightarrow \vec{B}_\rho(\vec{x}_0)$  — отображает в себя и сжимающее  $\Rightarrow$  шары из условия теоремы —  $B_\delta(\vec{x}_0)$  и  $B_{\frac{\delta}{2 \cdot \|K\|_n}}(\vec{y}_0)$ .

○ Итого:

✓  $\forall \vec{y} \in B_{\frac{\delta}{2 \cdot \|K\|_n}}(\vec{y}_0): \exists \vec{x} \mid f(\vec{x}) = \vec{y}$ , причём  $\vec{x}$  — неподвижная точка отображения  $\phi_{\vec{y}}(\vec{x})$  и  $\vec{x}$  — единственна.  $\Rightarrow$  определено отображение  $f^{-1}: B_{\frac{\delta}{2 \cdot \|K\|_n}}(\vec{y}_0) \rightarrow B_\delta(\vec{x}_0)$ .

✓ Докажем непрерывность: пусть  $\vec{y} = f(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \in B_\delta(\vec{x}_0)$ ,  $\vec{y} \in B_{\frac{\delta}{2 \cdot \|K\|_n}}(\vec{y}_0)$ ; тогда  $\vec{x} = f^{-1}(\vec{y})$ , и тогда  $\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n = \|f^{-1}(\vec{y}) - f^{-1}(\vec{y}_0)\|_n \leq \frac{1}{2 \cdot \|K\|_n} \cdot \|\vec{y} - \vec{y}_0\|_n \Rightarrow$  при  $\|\vec{y} - \vec{y}_0\|_n \rightarrow 0: \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n \rightarrow 0$  — отображение  $f^{-1}$  — непрерывно в точке  $\vec{y}_0$ .

✓ Дифференцируемость в точке  $\vec{y}_0$  отображения  $f^{-1}$ :  $f^{-1}(\vec{y}) = f^{-1}(\vec{y}_0) + K(\vec{y} - \vec{y}_0) + h(f(\vec{y}))$ , тогда  $f^{-1}(\vec{y}) - f^{-1}(\vec{y}_0) - K(\vec{y} - \vec{y}_0) = h(f^{-1}(\vec{y})) \rightarrow 0$  — из непрерывности  $f^{-1}(\vec{y})$  в точке  $\vec{y}_0$  и  $h(\vec{x})$  в точке 0  $\Rightarrow$  при  $\vec{y} \rightarrow \vec{y}_0: h(f^{-1}(\vec{y})) \rightarrow 0$ , т.е.  $f^{-1}(\vec{y})$  — дифференцируема.  $K = \left( D_{\vec{x}_0} f \right)^{-1}$ , получаем, что  $\left( D_{\vec{x}_0} (f^{-1}) \right) = \left( D_{\vec{x}_0} f \right)^{-1}$

□

#### Пример 4.8.12 (Нахождения).

▷  $\vec{f}(x, y) = (u, v)$ ,  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = x \cdot y$ ,  $\vec{x}_0 = (1, 1)$ :  $\begin{pmatrix} 2 \cdot x & -2 \cdot y \\ y & x \end{pmatrix} (1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 4$ ;  $\vec{y}_0 = (0, 1)$ ;  $x^2 - y^2 = 0 + \varepsilon$ ;  $x \cdot y = 1 + \varepsilon$ .

#### Теорема 4.8.13 (О неявных отображениях).

▷ Пусть

$U$  — открытое в  $\mathbb{R}^{n+m}$ ;  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n$  и  $\frac{\partial f}{\partial y_j}, j = 1, 2, \dots, m$  — непрерывны в  $U$  и отображение  $f$  — дифференцируемо в  $U$ ; существует точка  $(a, b) \in U \mid f(a, b) = 0$  и  $(D_{\vec{x}} f(a, b))$  — обратимое линейное отображение.

▷ Тогда

Существует окрестность  $V$  точки  $a$  и окрестность  $W$  точки  $b$  такие, что  $V \times W \subseteq U$  и  $\forall y \in W: \exists! x \in V \mid$  определено отображение  $x = g(y)$ , где  $g: W \rightarrow V$  и  $g(y) \mid f(g(y), y) = 0 - \forall y \in W$  и  $g(y)$  — дифференцируема в  $W$ .

Замечание 4.8.13.1.

▷ Если  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , то

$$(\star) \quad \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0; \\ f_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0; \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0. \end{cases} ; \quad \begin{cases} f_1(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m); \\ f_2(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m); \\ \vdots \\ f_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m); \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} g_1(y_1, \dots, y_m); \\ g_2(y_1, \dots, y_m); \\ \vdots \\ g_n(y_1, \dots, y_m). \end{cases} :$$

$$\begin{cases} a_1 = g_1(b_1, \dots, b_m); \\ a_2 = g_2(b_1, \dots, b_m); \\ \vdots \\ a_n = g_n(b_1, \dots, b_m). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m), y_1, \dots, y_m) = 0; \\ f_2(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m), y_1, \dots, y_m) = 0; \\ \vdots \\ f_n(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m), y_1, \dots, y_m) = 0. \end{cases}$$

—  $\forall (y_1, y_2, \dots, y_n) \in W$ .

*Замечание 4.8.13.2 (Гиперповерхность).*

▷ Всякое условие вида  $f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0$  —  $\forall y$  — определяет гиперповерхность в  $\mathbb{R}^{n+m}$ ; множество точек, удовлетворяющих  $(\star)$  — является пересечением поверхностей.

**Пример 4.8.13.1 (Пересечения поверхностей).**

$$\triangleright \begin{cases} f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1; \\ f_2(x, y, z) = x + y + z. \end{cases} ; \quad f_1(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad f_2 = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0.$$

*Замечание 4.8.13.3 (Линейное отображение).*

▷ Пусть  $f$  — такое, сопоставим ему линейное отображение  $D_{(a,b)}f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Выпишем матрицу Якоби отображения:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix},$$

$\text{rk}(D_{(a,b)}f) = n$ . Предположим, что матрица Якоби имеет ранг...

*Замечание 4.8.13.4 (Тождественное равенство).*

▷  $n + m = 3, 2 + 1 = 3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), (2x, 2y, 2z) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), y = \pm\sqrt{1 - x^2 - z^2} = g(x, z)$ , но  $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow g(x, z) = -\sqrt{1 - x^2 - z^2}, f(x, g(x, z), z) \equiv 0$  (тождественно равно).

▷ Доказательство.

◦ Рассмотрим  $F(\vec{x}, \vec{y}): \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ :

$$\begin{cases} F_1(\vec{x}, \vec{y}) = f_1(\vec{x}, \vec{y}); \\ F_2(\vec{x}, \vec{y}) = f_2(\vec{x}, \vec{y}); \\ \vdots \\ F_n(\vec{x}, \vec{y}) = f_n(\vec{x}, \vec{y}); \\ F_{n+1}(\vec{x}, \vec{y}) = y_1; \\ \vdots \\ F_{n+m}(\vec{x}, \vec{y}) = y_m; \end{cases} \quad (D_{(\vec{x}, \vec{y})}F) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$\det(D_{\vec{x}}F) = \det(D_{\vec{x}}f) \cdot \det E = \det(D_{\vec{x}}f); \det(D_{(\vec{a}, \vec{b})}F) \neq 0 \Rightarrow$  к отображению  $F$  — применима теорема об обратном отображении, которая гласит, что  $f(f^{-1}(\vec{u}, \vec{w})) = (\vec{u}, \vec{w})$ , где  $(\vec{u}, \vec{w}) \in W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ .

◦ Существуют отображения  $\phi_1$  и  $\phi_2 \mid F^{-1}(\vec{u}, \vec{w}) = (\phi_1(\vec{u}, \vec{w}), \phi_2(\vec{u}, \vec{w}))$ , где  $\phi_1: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $\phi_2: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ;  $f(\phi_1(\vec{u}, \vec{w}), \phi_2(\vec{u}, \vec{w})) = \vec{u}$ , а  $\phi_2(\vec{u}, \vec{w}) = \vec{w}$ , где  $\phi_1$  и  $\phi_2$  — существуют. Положим  $g(\vec{y}) := \phi_1(\vec{0}, \vec{y})$ , тогда  $f(\phi_1(\vec{0}, \vec{y}), \phi_2(\vec{0}, \vec{y})) = \vec{0}$  и  $\phi_2(\vec{0}, \vec{y}) = \vec{y} \Rightarrow f(g(\vec{y}), \vec{y}) = \vec{0} - \forall \vec{y} \in W. g(\vec{y}) \in V, W \times V \subset U (\vec{w} \rightarrow \vec{v})$ .

◦ Единственность: пусть  $\vec{x}_1$  и  $\vec{x}_2$  — две точки такие, что для некоторого  $\vec{y}$ :  $f(\vec{x}_1, \vec{y}) = f(\vec{x}_2, \vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow F(\vec{x}_1, \vec{y}) = (\vec{0}, \vec{y})$ , а  $F(\vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{0}, \vec{y})$  — противоречие, т.к. для  $f$  верна теорема об обратной функции, такого быть не может  $\Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2$ .

**Пример 4.8.13.2 (к замечанию).**

▷  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ . Пусть  $\begin{cases} f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3; \\ f_2 = x^2 - y^2 + z^2 - 1. \end{cases}$  . Рассмотрим  $\vec{c} = (1, 1, 1) \in \delta(f_1) \cap \delta(f_2)^2$ ;  $g_1(t), g_2(t)$  такие, что  $f_1(1, 1, 1) = 0$ ;  $f_2(1, 1, 1) = 0$ ;  $\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & -2y & 2z \end{pmatrix} (1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $x = g_1(z)$ ,  $y = g_2(z)$ ;  $g_1^2(z) + g_2^2(z) + z^2 = 3$  и  $g_1^2(z) - g_2^2(z) + z^2 = 1$  (удовлетворяет окружности  $z = 1$ ), сложим:  $2 \cdot g_1^2(z) + 2 \cdot z^2 = 4 \Rightarrow g_1^2(z) = 2 - z^2 \Rightarrow g_1(z) = \pm\sqrt{2 - z^2}$  и отнимем:  $2 \cdot g_2^2(z) = 2$ ,  $g_2^2(z) = 1$ ,  $g_2(z) = \pm 1 = 1$ , т.е.  $x = \sqrt{2 - z^2}$ , а  $y = 1$ .

**4.9 Высшие производные**

Пусть  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $U$  — открыто, тогда если  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  для  $i$  фиксированной — существует в  $U$ , то определено отображение  $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , если  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  такое, что существует  $\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_i}$ .

**Теорема 4.9.1 (равенство частных производных).**

▷ Пусть

Пусть  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  так, что  $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \cdot \partial x_i}$  — существуют и непрерывны в  $U$ .

▷ Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \cdot \partial x_i}.$$

▷ Доказательство.

- Лектору было очевидно . . . . Надо заметить, что без условия непрерывности это неверно, смотрите следующие два пункта, взятые полностью из книжки товарища Фихтенгольца.

□

**Пример 4.9.1.1 (Взятие смешанных производных в разном порядке).**

▷ При рассмотрении примеров взятия смешанных производных<sup>1</sup> бросается в глаза совпадение смешанных производных, взятых по одним и тем же переменным, но в разном порядке.

Нужно сразу же отметить, что это вовсе не вытекает с необходимостью из определения смешанных производных, так что существуют случаи, когда упомянутого совпадения нет.

Для примера рассмотрим функцию  $f(x, y) = xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  (при  $x^2 + y^2 > 0$ ),  $f(0, 0) = 0$ .

Имеем:

$$f'_x(x, y) = y \cdot \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4 \cdot x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \text{ (при } x^2 + y^2 > 0), f'_x(0, 0) = 0.$$

Придав  $x$  частное значение, равное нулю, будем иметь при любом  $y$  (в том числе и при  $y = 0$ ):  $f'_x(0, y) = -y$ . Продифференцировав эту функцию по  $y$ , получим  $f''_{xy}(0, y) = -1$ . Отсюда следует, в частности, что в точке  $(0, 0)$  будем иметь  $f''_{xy}(0, 0) = -1$ . Вычислив таким же образом  $f''_{yx}$  в точке  $(0, 0)$ , получим  $f''_{yx}(0, 0) = 1$ .

Итак, для рассматриваемой функции  $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$ .

Тем не менее, подмеченное на примерах совпадение смешанных производных, отличающихся лишь порядком дифференцирований, не случайно: оно имеет место в широком классе случаев — при соблюдении определённых условий. Начнём со следующей простой теоремы.

**Теорема 4.9.1.2 (Равенство частных производных).**

▷ Пусть

Предположим, что

- $f(x, y)$  определена в (открытой) области  $D$ ,
- в этой области существуют первые производные  $f'_x$  и  $f'_y$ , а также вторые смешанные производные  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$  и, наконец,
- эти последние производные  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$  как функции  $x$  и  $y$  непрерывны в некоторой точке  $(x_0, y_0)$  области  $D$ .

<sup>2</sup>Область определения



▷ Тогда

В этой точке  $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ .

▷ Доказательство.

- Рассмотрим выражение  $W = \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{h \cdot k}$ , где  $h, k$  отличны от нуля, например положительны, и притом настолько малы, что в  $D$  содержится весь прямоугольник  $[x_0, x_0 + h; y_0, y_0 + k]$ ; такими мы их фиксируем до конца рассуждения.
  - Введём теперь вспомогательную функцию от  $x$ :  $\phi(x) = \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}$ , которая в промежутке  $[x_0, x_0 + k]$  имеет производную  $\phi'(x) = \frac{f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0)}{k}$  и, следовательно, непрерывна. С помощью этой функции выражение  $W$ , которое равно  $W = \frac{1}{h} \cdot \left( \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k} - \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \right)$ , можно переписать в виде:  $W = \frac{\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)}{h}$ .
  - Так как для функции  $\phi(x)$  в промежутке  $[x_0, x_0 + h]$  выполняются все условия теоремы Лагранжа, то мы можем по формуле конечных приращений, преобразовать выражение  $W$  так:  $W = \phi'(x_0 + \theta \cdot h) = \frac{f'_x(x_0 + \theta \cdot h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta \cdot h, y_0)}{k}$  ( $0 < \theta < 1$ ).
- Пользуясь существованием второй производной  $f''_{xy}(x, y)$ , снова применим формулу конечных приращений, на этот раз — у функции от  $y$ :  $f'_x(x_0 + \theta \cdot h, y)$  в промежутке  $[y_0, y_0 + k]$ . Окончательно получим  $W = f''_{xy}(x_0 + \theta \cdot h, y_0 + \theta_1 \cdot k)$  ( $0 < \theta, \theta_1 < 1$ ).
- Но выражение  $W$  содержит  $x$  и  $y$ , с одной стороны, и  $h$  и  $k$  — с другой, одинаковым образом. Поэтому можно обменять их роли и, введя вспомогательную функцию  $\xi(y) = \frac{f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)}{h}$ , путём аналогичных рассуждений получить результат:  $W = f''_{yx}(x_0 + \theta_2 \cdot h, y_0 + \theta_3 \cdot k)$  ( $0 < \theta_2, \theta_3 < 1$ ).
- Из последних сопоставлений находим:  $f''_{xy}(x_0 + \theta \cdot h, y_0 + \theta_1 \cdot k) = f''_{yx}(x_0 + \theta_2 \cdot h, y_0 + \theta_3 \cdot k)$ . Устремив теперь  $h$  и  $k$  к нулю, перейдём в этом равенстве к пределу. Ввиду ограниченности множителей  $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ , аргументы и справа и слева стремятся, соответственно, к  $x_0, y_0$ . А тогда окончательно и получим  $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ , что и требовалось доказать.
- Таким образом, непрерывные смешанные производные  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$  всегда равны.

□

#### ОПР 4.9.2 (принадлежания классу).

- Будем говорить, что  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  — принадлежит классу  $C^r(U)$ , если  $U$  — открыто в  $\mathbb{R}^n$  и  $\forall k \leq r$  — существуют и непрерывны все частные производные по порядку  $k$ .
  - Мультииндексный формализм: пусть  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , где  $\alpha_i \in \mathbb{Z}$  и  $\alpha_i \geq 0$ ; такая, что  $\vec{\alpha}! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$  и  $|\vec{\alpha}| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ .
- $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = a \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$ , где  $a \in \mathbb{R}^m$  — элементарный полином. Обозначения:

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = a \cdot \vec{x}^{\vec{\alpha}}; \quad \frac{\partial^{|\vec{\alpha}|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\vec{\alpha}|} f}{\partial \vec{x}^{\vec{\alpha}}}; \quad \sum_{|\vec{\alpha}|=k} a_{\vec{\alpha}} \cdot \vec{x}^{\vec{\alpha}}$$

— многочлен суммарной степени  $k$ .

#### Теорема 4.9.3 (Формула Тейлора для многих переменных).

▷ Пусть

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  и  $f \in C^r(U)$ ,  $\vec{x}_0 \in U$ .

▷ Тогда

$\forall \vec{x}$  имеет место:

$$f(\vec{x}_0 + \vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{0 < |\alpha| \leq r} \frac{\partial^{\vec{\alpha}} f}{\partial \vec{x}^{\vec{\alpha}}}(\vec{x}_0) \cdot \vec{x}^{\vec{\alpha}} + \varepsilon_r(\vec{x}) \cdot \|\vec{x}\|_n^r,$$

где  $\varepsilon_r(\vec{x}) \rightarrow 0$ , при  $\|\vec{x}\|_n \rightarrow 0$ .

▷ Доказательство.

- Пусть  $\phi(t) = f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x})$ ,  $\phi(0) = f(\vec{x}_0)$  и

- Пусть  $\eta > 0 \mid B_\eta(\vec{x}_0) \subseteq U$ ; будем считать, что  $\|\vec{x}\|_n < \eta$ , тогда  $\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x} \in B_\eta(\vec{x}_0) - \forall t \mid |t| \leq 1$ , т.к.  $\|(t \cdot \vec{x} + \vec{x}_0) - \vec{x}_0\|_n = |t| \cdot \|\vec{x}\|_n \leq |t| \cdot \eta \leq \eta - \forall t \mid |t| \leq 1 \Rightarrow \phi(t)$  — определена на отрезке  $[0, 1]$  и дифференцируема  $r$  раз.
- Применим обычную формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:  $\phi(1) =$

$$= \phi(0) + \frac{\phi^{(1)}(0)}{1!} \cdot (1-0) + \frac{\phi^{(2)}(0)}{2!} \cdot (1-0)^2 + \dots + \frac{\phi^{(r-1)}(0)}{(r-1)!} \cdot (1-0)^{r-1} + \frac{\phi^{(r)}(0 + \theta \cdot (1-0))}{r!} \cdot (1-0)^r =$$

$$= \phi(0) + \frac{\phi^{(1)}(0)}{1!} + \frac{\phi^{(2)}(0)}{2!} + \dots + \frac{\phi^{(r-1)}(0)}{(r-1)!} + \frac{\phi^{(r)}(0)}{r!} + \frac{\phi^{(r)}(\theta) - \phi^{(r)}(0)}{r!}.$$

$$\phi^k(0) = \sum_{|\vec{\alpha}| \leq k} \frac{k!}{\vec{\alpha}!} \cdot \frac{\partial^{\vec{\alpha}} f}{\partial \vec{x}^{\vec{\alpha}}}(\vec{x}_0) \cdot \vec{x}^{\vec{\alpha}} \Rightarrow$$

(это доказывает первую часть)  $\frac{\phi^r(\theta) - \phi^r(0)}{r!} = \sum_{|\vec{\alpha}| \leq r} \left( \frac{\partial^{\vec{\alpha}} f}{\partial \vec{x}^{\vec{\alpha}}}(\vec{x}_0 + \theta \cdot \vec{x}) - \frac{\partial^{\vec{\alpha}} f}{\partial \vec{x}^{\vec{\alpha}}}(\vec{x}_0) \right) \cdot \frac{\vec{x}^{\vec{\alpha}}}{\vec{\alpha}!} =$

$$\|\vec{x}\|_n^{\vec{\alpha}} \cdot \epsilon_r(\vec{x}); \quad \frac{\partial^{\vec{\alpha}} f}{\partial \vec{x}^{\vec{\alpha}}}(\vec{x}_0 + \theta \cdot \vec{x}) - \frac{\partial^{\vec{\alpha}} f}{\partial \vec{x}^{\vec{\alpha}}}(\vec{x}_0) \rightarrow 0,$$

при  $\|\vec{x}\|_n \rightarrow 0$  (следует из непрерывности производной).

$$\left\| \frac{\vec{x}^{|\vec{\alpha}|}}{\|\vec{x}\|_n^{|\vec{\alpha}|}} \right\|_n = \frac{x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}}{\|\vec{x}\|_n^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \|\vec{x}\|_n^{\alpha_n}}, \quad \frac{|x|^{\alpha_1}}{\|x\|^{\alpha_1}} < 1, \quad |x| \leq \|x\|_n$$

— следует из свойств метрики.

□

## 4.10 Экстремумы функций многих переменных

$f: U \rightarrow \mathbb{R}, U \in \mathbb{R}^n$ .

### ОПР 4.10.1 (Точка локального минимума).

Пусть  $f: U \rightarrow \mathbb{R}, U$  — открыто в  $\mathbb{R}^n$ . Предположим, что  $\vec{x}_0 \in U$ , тогда точка  $\vec{x}_0$  называется точкой локального минимума (максимума), если  $\exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset U, \forall \vec{x} \in B_\varepsilon(\vec{x}_0): f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$ .

### ОПР 4.10.2 (экстремальной точки).

Всякая точка, которая является локальным минимумом или локальным максимумом функции  $f$  — называется экстремальной точкой функции  $f$ .

### Теорема 4.10.3 (Ферма).

▷ Пусть

$f: U \rightarrow \mathbb{R}, U$  — открыто,  $f$  — дифференцируема в  $U$ .

▷ Тогда

Если  $\vec{x}_0 \in U$  — точка экстремума функции  $f$ , то  $(D_{\vec{x}_0} \mathbf{f}) = 0$  (нулевое линейное отображение),

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n: \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot x_i = 0 - \forall i = 1, 2, \dots, n; \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0.$$

▷ Доказательство.

- Пусть  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\|_n > 0, \vec{x} \neq \vec{0}; \vec{x}_0 \in U$  — точка экстремума;  $\delta > 0: B_\delta(x_0) \subset U: \forall \vec{x}_1 \in B_\delta(x_0): f(x_1) \geq f(x_0)$  (доказываем для минимума). Пусть  $\eta > 0 \mid |t| < \eta, \vec{x}_0 + t \cdot \vec{x} \in B_\delta(x_0)$ , ясно, что такое  $\eta$  — существует, т.к.  $\|(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) - \vec{x}_0\|_n = \|t \cdot \vec{x}\|_n = |t| \cdot \|\vec{x}\|_n, |t| \leq \frac{\delta}{\|\vec{x}\|_n} = \eta$ .
- $\phi(t) = f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}), \phi(0) = f(\vec{x}_0)$  и  $\phi(t)$  — дифференцируема на  $(-\eta, \eta)$ .  $\phi(t) = f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) \geq f(\vec{x}_0) = \phi(0) \Rightarrow \phi(t)$  — имеет минимум в точке  $t = 0$ , на отрезке  $(-\eta, \eta) \Rightarrow \phi'(0) = 0$ .  $\phi'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \cdot x_i$  — было выведено перед формулой Тейлора.  $\phi'(0) = 0 - \forall \vec{x} \Rightarrow$  отображение  $(D_{\vec{x}} \mathbf{f})$  — нулевое. Если в качестве вектора  $\vec{x}$  взять вектор  $\vec{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , то  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = 0 - \forall i$ .

## 4.11 Квадратичная форма

Определим отображение  $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  по формуле  $Q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$ , причём  $a_{ij} = a_{ji}$  — симметричны. Из  $\{a_{ij}\}$  составим матрицу  $n \times n$ .

### ОПР 4.11.1 (квадратичной формы).

Отображение  $Q(\vec{x})$  — называется квадратичной формой, а матрица  $n \times n$  —  $\{a_{ij}\}$  называется матрицей квадратичной формы.

### УТВ 4.11.2 (Свойства квадратичной формы).

▷ Выполнено:

- $Q(\vec{0}) = 0$ ;
- $Q(t \cdot \vec{x}) = t^2 \cdot Q(\vec{x}) - \forall t \in \mathbb{R}$ .

▷ Доказательство.

- Лектору очевидно, скорее всего потому, что  $Q(t \cdot \vec{x}) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot tx_i \cdot tx_j \right)$ .

□

### ОПР 4.11.3 (положительно определённой квадратичной формы).

Квадратичная форма  $Q(\vec{x})$  называется положительно определённой, если  $Q(\vec{x}) > 0 - \forall x \mid \|x\| \neq 0$ . Квадратичная форма  $Q(\vec{x})$  называется отрицательно определённой, если  $Q(\vec{x}) < 0 - \forall x \mid \|x\| \neq 0$ .

Квадратичная форма называется положительной, если  $Q(\vec{x}) \geq 0 - \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Квадратичная форма называется отрицательной, если  $Q(\vec{x}) \leq 0 - \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Квадратичная форма  $G(\vec{x})$  называется неопределённой, если  $\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n \mid Q(\vec{x}_1) > 0, Q(\vec{x}_2) < 0$ .

### Пример 4.11.3.1 (Определённость формы).

▷ Пусть  $\mathbb{R}^2, (x, y)$

- $Q(x, y) = x^2 + y^2; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  
 $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0$  — положительно определённая квадратичная форма.
- $Q(x, y) = -x^2 - y^2; A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .  
 $-x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0$  — отрицательно определённая квадратичная форма.
- $Q(x, y) = x^2 + 0 \cdot y^2; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  — положительная, но не положительно определённая квадратичная форма.  $Q(0, 1) = 0$ .
- $Q(x, y) = x^2 - y^2$  — неопределённая.  $Q(1, 0) = 1 > 0; Q(0, 1) = -1 < 0$ .

### Теорема 4.11.4 (Монотонность положительно определённой квадратичной формы).

▷ Пусть

$Q(\vec{x})$  — положительно определённая квадратичная форма.

▷ Тогда

$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{R} \mid k_1 > 0, k_2 > 0$ , что (★)  $k_2 \cdot \|\vec{x}\|_n^2 \leq Q(\vec{x}) \leq k_1 \cdot \|\vec{x}\|_n^2$ .

▷ Доказательство.

- Если  $\vec{x} = 0$ , то (★) выполняется — это очевидно.
- Пусть  $S_1(0) = \{\vec{x} \mid \|\vec{x}\|_n = 1\}$ . Очевидно, что  $S_1(0)$  — ограничено в  $\mathbb{R}^n$  и замкнуто в  $\mathbb{R}^n$ . Отсюда следует, что  $S_1(0)$  — компактное метрическое пространство.
- Рассмотрим метрическое отображение  $Q(\vec{x})$ , где  $\vec{x} \in S_1(0)$ ,  $Q(\vec{x})$  — непрерывна, т.к. является многочленом.
- $Q(\vec{x})$ , при  $\|\vec{x}\|_n = 1$  — определена на компактном множестве  $S_1(0)$ , а согласно теореме Вейерштрасса —  $\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in S_1(0) \mid$  при  $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2(!)$  —  
 $\checkmark \max Q(\vec{x}) = Q(\vec{x}_1) = k_1 > 0$ ;

$$k_2 \leq Q(\vec{x}) \leq k_1 - \forall x \mid \|x\|_n = 1.$$

- Пусть  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ , тогда если  $\|\vec{y}\|_n \neq 0$ , то  $\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|_n} \in S_1(0)$ , следовательно имеет место такой факт:

$$\begin{aligned} k_2 &\leq Q\left(\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|_n}\right) \leq k_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow k_2 \leq \frac{1}{\|\vec{y}\|_n^2} \cdot Q(\vec{y}) \leq k_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow k_2 \cdot \|\vec{y}\|_n^2 \leq Q(\vec{y}) \leq k_1 \cdot \|\vec{y}\|_n^2. \end{aligned}$$

□

**ОПР 4.11.5 (Матрица Гессе).**

Пусть  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2(U)$ . Из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:  $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + L(\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \cdot (x_i - x_{i0}) \cdot (x_j - x_{j0}) + \varepsilon_2(\vec{x}) \cdot \|\vec{x}\|_n^2$ .

$a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}(\vec{x}_0)$ ;  $a_{ij} = a_{ji}$ ;  $\left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}(\vec{x}_0) \right\}$  — называется матрицей Гессе.  $A$  — квадратичная форма, построенная по матрице Гессе называется квадратичной формой, ассоциативной с  $f$  в точке  $\vec{x}_0$ .

**Теорема 4.11.6 (О квадратичной форме, ассоциативной с функцией в точке).**

▷ Пусть

- $U$  — открыто в  $\mathbb{R}^n$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2(U)$ .
- $\vec{x}_0$  — экстремальная точка.

▷ Тогда

Если  $\vec{x}_0$  — локальный максимум, то квадратичная форма ассоциативная с  $f$  в точке  $\vec{x}_0$  — отрицательна. Если  $\vec{x}_0$  — локальный минимум, то положительна.

▷ Доказательство.

- Согласно теореме Тейлора 4.9.3 на стр. 48:  $f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) = f(\vec{x}_0) + L(t\vec{x}) + \frac{1}{2} \cdot Q(t \cdot \vec{x}) + \varepsilon_2(t \cdot \vec{x}) \cdot \|t \cdot \vec{x}\|_n^2$ . Поскольку  $\vec{x}_0$  — экстремальная точка, то  $L = 0$  — согласно теореме Ферма.  $f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} \cdot Q(t \cdot \vec{x}) + \varepsilon_2(t \cdot \vec{x}) \cdot \|t \cdot \vec{x}\|_n^2$ .  $f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \frac{t^2}{2} \cdot Q(\vec{x}) + t^2 \cdot \varepsilon_2(t \cdot \vec{x}) \cdot \|\vec{x}\|_n^2$ .
- Т.к.  $\vec{x}_0$  — локальный минимум, то  $f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) - f(\vec{x}_0) \geq 0$ , отсюда следует, что  $\frac{Q(\vec{x})}{2} + \varepsilon_2(t \cdot \vec{x}) \cdot \|\vec{x}\|_n^2 \geq 0$ . Перейдём к пределу, при  $t \rightarrow 0$ :  $\|t \cdot \vec{x}\|_n \rightarrow 0 \Rightarrow \varepsilon_2(t \cdot \vec{x}) \rightarrow 0$ , из определения  $\varepsilon_2$ . Отсюда следует:  $\forall \vec{x}: Q(\vec{x}) \geq 0$ , значит формула положительна.

□

**ОПР 4.11.7 (стационарной точки).**

Точка  $\vec{x}_0$  — называется стационарной точкой функции  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , если  $\forall i: \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = 0$ .

Экстремальные точки — стационарные, обратное — не верно.

**Теорема 4.11.8 (Достаточные условия экстремума).**

▷ Пусть

- $U$  — открыто в  $\mathbb{R}^n$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2(U)$ ;
- $\vec{x}_0$  — стационарная точка функции  $f$ .

▷ Тогда

Если квадратичная форма ассоциативная с функцией  $f$  в точке  $\vec{x}_0$  — положительно определена, то  $\vec{x}_0$  — точка минимума. Аналогично, если квадратичная форма — отрицательно определена, то  $\vec{x}_0$  — максимум.

▷ Доказательство.

- Т.к.  $f \in C^2(U)$ , то имеет место формула Тейлора:  $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + L(\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2} \cdot Q(\vec{x} - \vec{x}_0) + \varepsilon_2(\vec{x}) \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n^2$ , т.к.  $\vec{x}_0$  — стационарная точка, то  $L = 0$ ,  $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} \cdot Q(\vec{x} - \vec{x}_0) + \varepsilon_2(\vec{x}) \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n^2$ .

Пусть  $Q$  — положительно определена, тогда в силу теоремы о квадратичной форме 4.11.4 на стр. 50, имеет место:

- Выберем шар  $B_\varepsilon(\vec{x}_0)$  так, чтобы  $|\varepsilon_2(\vec{x})| < \frac{\vec{x}_0}{2} - \forall \vec{x} \in B_\varepsilon(\vec{x}_0)$ ; это возможно, ибо  $\varepsilon_2(\vec{x}) \rightarrow 0$ , при  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$ ;

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &\geq f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} \cdot Q(\vec{x} - \vec{x}_0) - \frac{k_1}{2} \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n^2 \geq \\ &\geq f(\vec{x}_0) + \frac{k_1}{2} \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n^2 - \frac{k_1}{2} \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n^2 = f(\vec{x}_0). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\exists \varepsilon > 0: \forall x \in B_\varepsilon(\vec{x}_0): f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$ .

□

*Следствие 4.11.8.1 (Случай неопределённой квадратичной формы).*

- ▷ Если  $Q(\vec{x})$  — не определена, то существует шар  $B_\varepsilon(\vec{x}_0) \subseteq U$  и  $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in B_\varepsilon(\vec{x}_0)$  такие, что  $f(\vec{x}_1) > f(\vec{x}_0)$  и  $f(\vec{x}_2) < f(\vec{x}_0)$ .
- ▷ Доказательство.
  - Очевидно (лектору).

□

**Пример 4.11.8.2 (Стационарных, не экстремальных точек).**

- ▷  $f(\vec{x}, \vec{y}) = x^2 + y^3$ ,  $(2 \cdot x, 3 \cdot y^2)$ ;  $x = 0, y = 0$  — стационарная точка.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \cdot y \end{pmatrix} (0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $p^2 + 0 \cdot q^2 \geq 0$ ;  $(0, 0)$  — не является экстремальной.
- ▷  $f(\vec{x}, \vec{y}) = x^2 + y^4$ ;  $(0, 0)$  — стационарная.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \cdot y^3 \end{pmatrix} (0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $p^2 + 0 \cdot q^2 \geq 0$  — не экстремальная.

## 4.12 Аналитические многообразия

**ОПР 4.12.1 (аналитического многообразия).**

Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  — называется аналитическим многообразием размерности  $(n-k)$ , если существуют такие функции  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ , что  $\forall \vec{x} \in M: \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, \phi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ;  $\phi_i$  — дважды непрерывно дифференцируема.

**ОПР 4.12.2 (регулярной точки).**

Точка  $\vec{x}_0 \in M$  — называется регулярной, если ранг матрицы  $\text{rk} \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) \right\}_{i=1,2,\dots,k; j=1,2,\dots,n} = k$ , в противном случае точка  $\vec{x}_0$  — называется особой.

**ОПР 4.12.3 (регулярного аналитического многообразия).**

Аналитическое многообразие  $M$  — называется регулярным, если  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n: \vec{x}$  — регулярная точка.

**Пример 4.12.4 (Аналитических многообразий).**

- ▷ Пусть  $\mathbb{R}^3$ ;  $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ; аналитическое многообразие  $M$  определяется уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$  — это сфера. Докажем, что сфера — регулярное аналитическое выражение:  $(2x, 2y, 2z), \begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \\ z = 0. \end{cases}$  — условие того, что ранг равен 0, но точка  $(0, 0, 0) \notin M$ .
- ▷  $\phi(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ , тогда  $M: x^3 + y^3 + z^3 = 0$ ; матрица  $(3 \cdot x^2, 3 \cdot y^2, 3 \cdot z^2)$ ; ранг 0 в  $(0, 0, 0) \in M \Rightarrow M$  не является регулярным.
- ▷ Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , тогда рассмотрим множество пар  $(x, f(x))$ , т.е. график:  $(\vec{x}, f(\vec{x})) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ ; докажем, что график дифференцируемой функции — регулярное аналитическое многообразие: обозначим график как  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ , рассмотрим  $F(\vec{x}) = x_{n+1} - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \Rightarrow$  уравнение определяет график функции. Рассмотрим  $\left( -\frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1 \right)$ : ранг всегда 1  $\Rightarrow$  является.
- ▷ Пусть  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \Rightarrow$  определены  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , тогда определим аналитическое многообразие в  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ :

$$\begin{cases} x_{n+1} - f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ x_{n+2} - f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ \vdots \end{cases};$$

докажем, что оно — регулярно:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  есть нулевой минор размерности  $k \times k$ .

#### ОПР 4.12.5 (параметризуемое аналитическое многообразие).

Аналитическое многообразие  $M$  назовём параметризуемым в окрестности точки  $x_0$ , если существует такое отображение  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $U \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ , что  $g(\vec{y}_0) = \vec{x}_0$  и  $\forall \vec{y} \in U$ :

$$\begin{cases} \phi_1 \left( g_1(\overbrace{y_1, y_2, \dots, y_{n-k}}^{\vec{y}}), g_2(\vec{y}), \dots, g_n(\vec{y}) \right) = 0; \\ \vdots \\ \phi_k(g_1(y_1, y_2, \dots, y_{n-k}), g_2(\vec{y}), \dots, g_n(\vec{y})) = 0. \end{cases}; \begin{cases} x_1 = g_1(y_1, y_2, \dots, y_{n-k}); \\ \vdots \\ x_n = g_n(y_1, y_2, \dots, y_{n-k}). \end{cases}.$$

Если окрестность  $U$  точки  $\vec{y}_0 | M \subseteq g(U)$ , то  $M$  — называется параметризуемым.

Следствие 4.12.5.1 (Теорема о неявном отображении).

▷ Если точка  $\vec{x}_0 \in M$  — регулярная, то существует окрестность точки  $\vec{x}_0$ , допускающая параметризацию.

#### ОПР 4.12.6 (линейного аналитического многообразия).

Аналитическое многообразие  $M$  — называется линейным, если функция  $\phi_i$ ,  $i=1, 2, \dots, k$  имеет следующий вид:

$\phi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j + e_i$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ . Если  $e_i = 0 - \forall i$ , то  $M$  — называется линейным подпространством.

$\sum_j a_{ij} \cdot x_j + e_j = \sum_j a_{ij} \cdot (x_j - x_{0j}) = \vec{0} = \mathbf{A} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$  — это есть линейное аналитическое многообразие, проходящее через точку  $x_0$ .

#### ОПР 4.12.7 (касательного проектора).

Пусть  $M$  — аналитическое многообразие;  $\vec{x}_0$  — регулярная точка;  $L = \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) \right\}$ , тогда линейное многообразие  $L \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$ , такое линейное аналитическое многообразие называется аналитическим проектором к аналитическому многообразию  $M$  в точке  $\vec{x}_0$ .

#### Замечание 4.12.8 (Из алгебры).

▷ Матрица  $k \times n$ ,  $k < n$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = \mathbf{A},$$

если  $\text{rk } \mathbf{A} = k$ ,  $\vec{\delta}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ ;  $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = 0$ , то это означает, что  $(\vec{\delta}_i, \vec{x}) = 0$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ ;  $\vec{\delta}_i = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right)$  — линейно независима (градиент перпендикулярен всем векторам).

#### Пример 4.12.8.1 (перпендикулярности градиента).

▷ Пусть  $M: x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$ ;  $(1, 1, 1) \in M$ ;  $(2x, 2y, 2z)$ ;  $(2, 2, 2)$ ;  $(2 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-1) + 2 \cdot (z-1)) = 0 = x + y + z - 3$ .

#### ОПР 4.12.9 (лежания на параметрическом многообразии).

Пусть  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , тогда определена кривая в  $\mathbb{R}^n$ ; будем говорить, что кривая лежит на параметрическом многообразии  $M$ , если  $\forall t \in (a, b)$ :

$$\begin{cases} \phi_1(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) = 0; \\ \phi_2(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) = 0; \\ \vdots \\ \phi_k(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) = 0. \end{cases}$$

▷ Пусть

$$t_0: \vec{x}_0 = \vec{\gamma}(t_0).$$

▷ Тогда

Касательный вектор в точке  $t_0$  к кривой  $\vec{\gamma}$  принадлежит касательному пространству к  $M$  в точке  $\vec{x}_0$ .

▷ Доказательство.

◦ Напомним, что касательный вектор к кривой в точке  $t_0$  определяется как

$$\vec{\sigma} = \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial t}(t_0), \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}(t_0), \dots, \frac{\partial \gamma_n}{\partial t}(t_0) \right).$$

◦ Рассмотрим  $\phi_j(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) = 0 - \forall t \in (a, b)$ , где  $t_0 \in (a, b)$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi_j(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) &= 0; \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(\gamma(t_0)) \cdot \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}(t_0) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \cdot \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}(t_0) &= 0 - \forall j = 1, 2, \dots, k \Rightarrow \mathbf{L} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t}(t_0) = 0. \end{aligned}$$

□

#### ОПР 4.12.11 (независимых кривых).

Будет говорить, что кривые  $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_\ell$  — независимы в точке  $t_0$ , если касательные вектора линейно независимы.

#### Лемма 4.12.12 (Существование независимых кривых).

▷ Пусть

$x_0$  — регулярная точка аналитического многообразия  $M$ .

▷ Тогда

Если  $k$  — число функций  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ , определённых на  $M$ , то существует  $n - k$  независимых кривых, проходящих через точку  $\vec{x}_0$ .

▷ Доказательство.

◦  $x_0$  — регулярная, тогда

$$\begin{cases} \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ \vdots \\ \phi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

— уравнение линейного аналитического многообразия, в силу теоремы о неявных отображениях 4.12.5.1 на стр. 53: существует точка  $\vec{y}_0$  и отображение  $g: \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k \mid g(\vec{y}_0) = \vec{x}_0$  и

$$\begin{cases} \phi_1(g_1(y_1, y_2, \dots, y_{n-k}), g_2(\vec{y}), \dots, g_k(\vec{y}), y_1, y_2, \dots, y_{n-k}) = 0; \\ \phi_2(g_1(y_1, y_2, \dots, y_{n-k}), g_2(\vec{y}), \dots, g_k(\vec{y}), y_1, y_2, \dots, y_{n-k}) = 0; \\ \vdots \\ \phi_k(g_1(y_1, y_2, \dots, y_{n-k}), g_2(\vec{y}), \dots, g_k(\vec{y}), y_1, y_2, \dots, y_{n-k}) = 0; \end{cases}.$$

Рассмотрим точку  $\vec{y}_0$  и определим отображение

$$\vec{\gamma}_s = \begin{pmatrix} g_1(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{s-10}, y_{s0} + t, y_{s+10}, \dots, y_{n-k}) \\ g_2(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{s-10}, y_{s0} + t, y_{s+10}, \dots, y_{n-k}) \\ \vdots \\ g_k(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{s-10}, y_{s0} + t, y_{s+10}, \dots, y_{n-k}) \\ y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{s-10} \\ y_{s0} + t \\ y_{s+10} \\ \vdots \\ y_{n-k} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

**ОПР 4.12.13 (точки условного локального максимума).**

Пусть  $M$  — аналитическое многообразие,  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ;  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , тогда точка  $\vec{x}_0 \in M$  — называется точкой условного локального максимума (минимума), если  $\exists \varepsilon > 0: \forall \vec{x} \in B_\varepsilon(\vec{x}_0) \cap M: f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$  (или  $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$ ). Если  $\vec{x}_0$  — точка условного локального максимума или минимума функции  $f$ , то  $\vec{x}_0$  — называется точкой условного экстремума.

**Пример 4.12.13.1 (Простой).**

- ▷ Пусть  $f = x + y$ ;  $M: x^2 + y^2 = 1$ .  $\phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ;  $\phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ;  $x_1 = F_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$ ;  $\dots$ ;  $x_k = F_k(\vec{x})$ ;  $f(F_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n), F_2(\vec{x}), \dots, F_k(\vec{x}), x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$  от  $(n - k)$  переменных, но так выразить  $x_1, x_2, \dots, x_n$  не получается.

**Теорема 4.12.14 (О необходимом условии условного экстремума).**

▷ Пусть

$M \subseteq \mathbb{R}^n$  — аналитическое многообразие, заданное в виде

$$\begin{cases} \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ \vdots \\ \phi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases}.$$

Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\vec{x}_0 \in M$  — регулярная точка условного экстремума функции  $f$ .

▷ Тогда

Существуют вещественные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$   $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} - \forall j = 1, 2, \dots, n$ ; градиент функции  $f$  в  $\vec{x}_0$  — есть линейная комбинация градиентов  $\phi_i$  в  $\vec{x}_0$ .

▷ Доказательство.

- Пусть  $\vec{x}_0 \in M$ , тогда  $\exists \phi: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такая, что  $\vec{\phi}(t) \subseteq M - \forall t \mid |t| < \delta$  — кривая на аналитическом многообразии.  $\vec{\phi}(0) = \vec{x}_0$ , рассмотрим  $F(t) = f(\vec{\phi}(t)): (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t_0 = 0$  — точка экстремума функции  $F(t)$ .
- При достаточно малом  $\delta$ :  $\frac{dF}{dt}(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\phi}(0)) \cdot \frac{d\phi_i}{dt}(0) =_{(\text{т.к. } \phi(0) = x_0)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \cdot \frac{d\phi_i}{dt}(0)$ . Следовательно — вектор  $\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right)$  — перпендикулярен вектору из касательного пространства. Т.к. кривая произвольная  $\Rightarrow$  вектор  $\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right)$  — перпендикулярен каждому вектору из касательного пространства. Можно выбрать  $n$  кривых: их касательные векторы образуют базис касательного пространства.
- Т.к.  $\vec{x}_0$  — регулярная, то это означает, что данные вектора линейно независимы и образуют пространство, натягивающееся на эти вектора.

**Следствие 4.12.14.1 (Метод Эйлера-Лагранжа для опускания точек условного экстремума).**

- ▷  $M$ , задано  $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_m = 0$ ,  $f$  — некоторая функция,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Функция Лагранжа  $H$  — определяется следующим образом:  $H = f + \lambda_1 \cdot \phi_1 + \lambda_2 \cdot \phi_2 + \dots + \lambda_m \cdot \phi_m$ ; тогда напомним условие, что такие  $x_0$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x_i}(x) = 0, \quad i=1, 2, \dots, n; \\ \phi_1(x) = 0; \\ \vdots \\ \phi_m(x) = 0. \end{cases}.$$

Система элементарных  $m + n$  линейных уравнений на  $n + m$  неизвестных.

**Пример 4.12.14.2 (Тривиальный).**

- ▷  $f, x \cdot y$ ;  $\phi = x + y - p$ ;  $H = x \cdot y + \lambda \cdot (x + y - p)$ ;

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = y + \lambda = 0; \\ \frac{\partial H}{\partial y} = x + \lambda = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\lambda; \\ x = -\lambda; \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\frac{p}{2}.$$



## Глава 5

# Интегралы, зависящие от параметра

Пусть  $f: [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , обозначим:  $f_{\vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha})$ , где  $(x, \vec{\alpha}) \in [a, b] \times U$ , Тем самым задана функция  $f_{\vec{\alpha}}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , зависящая от параметра  $\vec{\alpha} \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ .

### ОПР 5.1 (равномерного стремления).

Пусть  $\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0$  в  $\mathbb{R}^n$  (т.е.  $\|\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0\|_n \rightarrow 0$ ), тогда будем говорить, что функция  $f(x, \vec{\alpha})$  — равномерно стремится к функции  $f(x, \vec{\alpha}_0)$  на интервале  $[a, b]$ , если  $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0 \mid \|\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0\|_n < \delta \Rightarrow \|f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0)\|_n < \varepsilon - \forall x \in [a, b]$ .

Обозначим  $f(x, \vec{\alpha}) \rightrightarrows f(x, \vec{\alpha}_0)$  на  $[a, b]$ . Введём  $M(\vec{\alpha}) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0)|$ , тогда  $f(x, \vec{\alpha}) \rightrightarrows f(x, \vec{\alpha}_0)$  на  $[a, b]$   
 $\Leftrightarrow \lim_{\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0} M(\vec{\alpha}) = 0$ .

### ОПР 5.2 (интеграла, зависящего от параметра).

Интегралом, зависящим от параметра называется выражение вида  $F(\vec{\alpha}) = \int_a^b f(x, \vec{\alpha}) dx$ .

### Лемма 5.3 (Предельный переход).

▷ Пусть

$$f(x, \vec{\alpha}) \rightrightarrows f(x, \vec{\alpha}_0) \text{ на } [a, b].$$

▷ Тогда

$$\lim_{\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0} F(\vec{\alpha}) = \lim_{\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0} \int_a^b f(x, \vec{\alpha}) dx = \int_a^b \lim_{\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0} f(x, \vec{\alpha}) dx = \int_a^b f(x, \vec{\alpha}_0) dx = F(\vec{\alpha}_0).$$

▷ Доказательство.

- Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{b-a}$ . Рассмотрим  $|F(\vec{\alpha}) - F(\vec{\alpha}_0)| = |\int_a^b f(x, \vec{\alpha}) dx - \int_a^b f(x, \vec{\alpha}_0) dx| \stackrel{(\text{свойства интеграла})}{=} |\int_a^b f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0) dx| \leq \int_a^b |f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0)| dx$ .
- Выберем  $\delta > 0 \mid \|\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0\|_n < \delta \Rightarrow |f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0)| < \varepsilon_1 - \forall x \in [a, b]$ , тогда  $\int_a^b |f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0)| dx \leq \int_a^b \varepsilon_1 dx = \varepsilon_1 \cdot (b-a) = \varepsilon \Rightarrow |F(\vec{\alpha}) - F(\vec{\alpha}_0)| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0} F(\vec{\alpha}) \rightrightarrows F(\vec{\alpha}_0)$ .

□

Следствие 5.3.1 (Случай непрерывности).

▷ Пусть

$F(x, \vec{\alpha})$  — непрерывна, как функция  $n+1$  переменных на множестве  $[a, b] \times U$ , где  $U$  — открыто в  $\mathbb{R}^n$ .

▷ Тогда

$F(\vec{\alpha}) = \int_a^b f(x, \vec{\alpha}) dx$  — является непрерывной в  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ .

▷ Доказательство.

- Пусть  $\vec{\alpha}_0 \in U$ , тогда  $\exists B_\varepsilon(\vec{\alpha}_0) \in U \Rightarrow \exists I_n \subset B_\varepsilon(\vec{\alpha}_0)$  — замкнутое в  $\mathbb{R}^n$ , тогда  $[a, b] \times I_n = I_{n+1}$  — ограничено и замкнуто  $\Rightarrow$  метрическое пространство (полное)  $I_{n+1}$  — компактно  $\Rightarrow f(x, \vec{\alpha})$  — непрерывна на компактном множестве  $\Rightarrow$  равномерно непрерывно (теорема Вейерштрасса)  $\Rightarrow$  если  $(x, \vec{\alpha}) \rightarrow (x, \vec{\alpha}_0)$ , то  $f(x, \vec{\alpha}) \rightrightarrows f(x, \vec{\alpha}_0)$ , а в силу леммы:  $F(\vec{\alpha}) \rightarrow F(\vec{\alpha}_0)$ , а это непрерывность, т.к.  $\vec{\alpha}_0$  выбрана произвольно, отсюда следует непрерывность  $F(\vec{\alpha})$  в  $U$ .

□

## 5.4 Дифференцирование интеграла, зависящего от параметра

**Теорема 5.4.1 (О дифференцируемости такого интеграла).**

▷ Пусть

$f: [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $U \subseteq \mathbb{R}$ ;  $\vec{\alpha}_0 \in U$  и существует частная производная  $\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha}_0)$ , причём  $\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha})$  — непрерывна в окрестности точки  $\vec{\alpha}_0$ .

▷ Тогда

Если  $F(\vec{\alpha}) = \int_a^b f(x, \vec{\alpha}) dx$ , то  $F(\vec{\alpha})$  — дифференцируема в точке  $\vec{\alpha}_0$ , причём  $\frac{\partial F}{\partial \vec{\alpha}}(\vec{\alpha}_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha}_0) dx$ .

▷ Доказательство.

◦ Рассмотрим

$$\frac{F(\vec{\alpha}) - F(\vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} = \frac{1}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot \int_a^b f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0) dx = \int_a^b \frac{f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} dx,$$

но

$$\lim_{\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0} \frac{f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} = \frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha}_0), \text{ т.к. } \frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha})$$

— непрерывна в окрестности точки  $\vec{\alpha}_0$ . Это означает, что

$$\begin{aligned} \frac{f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha}_0)_{(\text{дифференцирование производных на } [a, b])} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\text{в силу следствия к лемме}) \exists \lim_{\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0} \frac{F(\vec{\alpha}) - F(\vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial \vec{\alpha}}(\vec{\alpha}_0). \end{aligned}$$

□

**Пример 5.4.1.1 (Взятия интеграла).**

▷  $I(t) = \int_0^{\pi/2} \ln(t^2 - \sin^2 x) dx$ ,  $t > 1$  — стандартными методами не берётся. Заметим:  $\ln(t^2 - \sin^2 x)$  — непрерывна на  $t > 1 - \forall x$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} \ln(t^2 - \sin^2 x) = \frac{2 \cdot t}{t^2 - \sin^2 x}$  — определена и непрерывна.

$$I'(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{2 \cdot t}{t^2 - \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{t^2 - 1}} \Rightarrow I(t) = \int I'(t) = \pi \cdot \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) + C, \quad I(\infty) = 0 \rightarrow C = \pi \cdot \ln \frac{1}{2}.$$

Пусть (★)  $F(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx$ .

**Теорема 5.4.2 (Разложение производной).**

▷ Пусть

$F(\vec{\alpha})$  — определена как (★),  $a(\vec{\alpha})$  и  $b(\vec{\alpha})$  — непрерывны и  $a'(\vec{\alpha}_0)$  с  $b'(\vec{\alpha}_0)$  — определены в точке  $\vec{\alpha}_0$ .

▷ Тогда

$$\frac{dF}{d\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}_0) = \int_{a(\vec{\alpha}_0)}^{b(\vec{\alpha}_0)} \frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha}_0) dx + b'(\vec{\alpha}_0) \cdot f(b(\vec{\alpha}_0), \vec{\alpha}_0) - a'(\vec{\alpha}_0) \cdot f(a(\vec{\alpha}_0), \vec{\alpha}_0).$$

▷ Доказательство.

◦ Рассмотрим

$$\begin{aligned} \frac{F(\vec{\alpha}) - F(\vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} &= \frac{1}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot \left( \int_{a(\vec{\alpha})}^{b(\vec{\alpha})} f(x, \vec{\alpha}) dx - \int_{a(\vec{\alpha}_0)}^{b(\vec{\alpha}_0)} f(x, \vec{\alpha}_0) dx \right) = \\ &= \int_{a(\vec{\alpha})}^{b(\vec{\alpha})} \frac{f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} + \frac{1}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot \int_{a(\vec{\alpha})}^{b(\vec{\alpha})} f(x, \vec{\alpha}) dx - \frac{1}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot \int_{a(\vec{\alpha})}^{b(\vec{\alpha}_0)} f(x, \vec{\alpha}) dx. \end{aligned}$$

Первое слагаемое — в силу теоремы о дифференцируемости: его предел, при  $\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0$  существует и равен  $\frac{1}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot \int_{a(\vec{\alpha})}^{b(\vec{\alpha}_0)} f(x, \vec{\alpha}_0) dx$ . Рассмотрим

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot \int_{a(\vec{\alpha})}^{b(\vec{\alpha})} f(x, \vec{\alpha}) dx - \frac{b(\vec{\alpha}) - b(\vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot f(b(\vec{\alpha}_0), \vec{\alpha}_0) \right| = \\ & = \left| \frac{1}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot \int_{a(\vec{\alpha})}^{b(\vec{\alpha})} f(x, \vec{\alpha}) dx - \frac{1}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot \int_{b(\vec{\alpha}_0)}^{b(\vec{\alpha})} f(b(\vec{\alpha}_0), \vec{\alpha}_0) dx \right|, \end{aligned}$$

но  $|f(x, \vec{\alpha}) - f(b(\vec{\alpha}_0), \vec{\alpha}_0)| < \varepsilon$ , если  $|\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0| < \delta$  — следует из непрерывности  $f$  и  $b(\vec{\alpha})$ , значит

$$\leq \frac{1}{|\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0|} \cdot \left| \int_{b(\vec{\alpha}_0)}^{b(\vec{\alpha})} \varepsilon dx \right| = \varepsilon \cdot \left| \frac{b(\vec{\alpha}) - b(\vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \right|,$$

но т.к.  $b$  — дифференцируема в  $\vec{\alpha}_0$ , то  $\left| \frac{b(\vec{\alpha}) - b(\vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \right| < M$ , значит выражение  $\leq \varepsilon \cdot M$ .

○ **Заключение**

$$\lim_{\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0} \frac{b(\vec{\alpha}) - b(\vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot f(b(\vec{\alpha}_0), \vec{\alpha}_0) = b'(\vec{\alpha}_0) \cdot f(b(\vec{\alpha}_0), \vec{\alpha}_0).$$

□

#### Пример 5.4.2.1 (Типичные пример применения теоремы).

- ▷ Предположим, что  $F(x) = \int_a^b |x - y| \cdot v(y) dy$ ,  $v(y)$  — непрерывна на  $[a, b]$ . Чему равно  $\frac{d^2 F}{dx^2}$  — ? (заметим, что  $|x - y|$  в  $x = y$  — не дифференцируема).
- ▷ Если  $x \notin [a, b]$ , то  $\frac{d^2 F}{dx^2} = 0$ .
- ▷ Если  $a < x < b$ , то

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x |x - y| \cdot v(y) dy + \int_x^b |x - y| \cdot v(y) dy = \int_a^x (x - y) \cdot v(y) dy - \int_x^b (x - y) \cdot v(y) dy. \\ F'(x) &= \int_a^x v(y) dy + 1 \cdot (x - y) \cdot v(y)|_{y=x} + 0 - \int_x^b v(y) dy - 1 \cdot (x - y) \cdot v(y)|_{y=x} = \int_a^x v(y) dy - \int_x^b v(y) dy; \\ F''(x) &= x' \cdot v(y) + 1 \cdot v(x) = 2 \cdot v(x). \end{aligned}$$

## 5.5 Интегрирование по параметру

### Теорема 5.5.1 (Об интегрировании по параметру).

▷ Пусть

$f(x, y)$  — непрерывна на множестве  $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ .

▷ Тогда

Этой функции можно сопоставить две функции, зависящие от параметра:  $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  и функция  $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ ; тогда имеет место:  $\int_c^d \Phi(y) dy = \int_a^b F(x) dx$ .

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

— называется *двойным интегралом*.

▷ **Доказательство.**

- Пусть  $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ , рассмотрим функции  $h(x, t) = \int_c^t f(x, y) dy$ ,  $\phi(t) = \int_c^t \int_a^b f(x, y) dx dy$  и  $\psi(t) = \int_a^b \int_c^t f(x, y) dy dx$ , где  $t \in [c, d]$ . Заметим, что  $\phi(c) = 0$  и  $\psi(c) = 0$ .
- Рассмотрим

$$\frac{d\phi}{dt} = \int_a^b f(x, t) dx; \quad \frac{d\psi}{dt} = \int_a^b \left( \frac{d}{dt} \int_c^t f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b (f(x, t)) dx = \frac{d\phi}{dt} - \forall t \in [c, d] \Rightarrow \phi(t) - \psi(t) = const,$$

но при  $t = c$ :  $const = 0 \Rightarrow \phi(t) = \psi(t)$ .

**Пример 5.5.1.1 (Типичный).**

- ▷ Пусть  $\beta > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta > \alpha$ , рассмотрим  $\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} dx$ .
- ▷ Пусть  $f(x, y) = x^y$  на  $[0, 1] \times [\alpha, \beta]$ . Рассмотрим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_\alpha^\beta x^y dy \right) dx &= \int_0^1 \left( \frac{x^y}{\ln x} \Big|_\alpha^\beta \right) dx = \int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} dx = \int_\alpha^\beta \left( \int_0^1 x^y dx \right) dy = \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 dy = \int_\alpha^\beta \frac{dy}{y+1} = \ln|y+1| \Big|_\alpha^\beta = \ln \left| \frac{1+\beta}{1+\alpha} \right|. \end{aligned}$$

**5.6 Несобственный интеграл, зависящий от параметра**

Рассмотрим несобственный интеграл, зависящий от параметра:

$$\int_a^w f(x, \vec{\alpha}) dx = \lim_{p \rightarrow w} \int_a^p f(x, \vec{\alpha}) dx; \quad F(\vec{\alpha}) = \int_a^w f(x, \vec{\alpha}) dx \quad (\star), \quad \vec{\alpha} \in [a, b].$$

**ОПР 5.6.1 (равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра).**

Будем говорить, что  $(\star)$  равномерно сходится на  $[a, b]$ , если  $\forall \varepsilon > 0: \exists B \in \mathbb{R} \forall p > B$  имеет место:

$$\left| \int_p^w f(x, \vec{\alpha}) dx \right| < \varepsilon - \forall \vec{\alpha} \in [a, b].$$

**Теорема 5.6.2 (Условие непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра).**

- ▷ Если  $f(x, \vec{\alpha})$  — равномерно непрерывна на множестве  $[a, w) \times [c, d]$  и  $(\star)$  равномерно сходится на  $[c, d]$ , то  $F(\vec{\alpha})$  — непрерывна на  $[c, d]$

**Доказательство.**

- Пусть  $\varepsilon > 0$  — произвольная, тогда, в силу равномерной сходимости  $(\star)$  —  $\exists p \forall \vec{\alpha} \in [c, d]: \left| \int_p^w f(x, \vec{\alpha}) dx \right| < \varepsilon$ . Рассмотрим  $G(\vec{\alpha}, p) = \int_a^p f(x, \vec{\alpha}) dx$  на  $[a, p] \times [c, d]: f(x, \vec{\alpha})$  — непрерывна, (т.к. на  $[a, w)$  непрерывна)  $\Rightarrow$  по теореме о непрерывности для обычных интегралов:  $G(\vec{\alpha}, p)$  — непрерывна по  $\vec{\alpha}$ . Обозначенная через  $G(\vec{\alpha}, w) = \int_a^w f(x, \vec{\alpha}) dx$  — существует.
- Рассмотрим  $|G(\vec{\alpha}, w) - G(\vec{\alpha}, p)| = \left| \int_a^w f(x, \vec{\alpha}) dx - \int_a^p f(x, \vec{\alpha}) dx \right| = \left| \int_p^w f(x, \vec{\alpha}) dx \right| < \varepsilon - \forall \vec{\alpha} \in [c, d] \Rightarrow |G(\vec{\alpha}, w) - G(\vec{\alpha}, p)| < \varepsilon \Rightarrow G(\vec{\alpha}, p) \Rightarrow G(\vec{\alpha}, w)$ , при  $p \rightarrow w$ , т.к. по теореме о равномерной сходимости  $G(\vec{\alpha}, w)$  — непрерывна.

□

**Теорема 5.6.3 (О дифференцируемости несобственного интеграла, зависящего от параметра).****Пусть**

$$F(\vec{\alpha}) = \int_a^w f(x, \vec{\alpha}) dx,$$

**Тогда**

Если  $\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}$  — равномерно непрерывна на  $[a, w) \times [c, d]$  и  $(\star)$  — равномерно сходится на  $[c, d]$ , то  $\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}} = \int_a^w \frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha}) dx - \forall \vec{\alpha} \in [c, d]$ .

**Доказательство.**

- Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $p$  — взято из равномерной сходимости интеграла  $(\star)$ . Рассмотрим  $f(\vec{\alpha}, p) = \int_a^p f(x, \vec{\alpha}) dx$  — для этой функции выполнены все условия теоремы о дифференцируемости на множестве  $[a, p] \times [c, d]$ .
- Отсюда следует, что  $\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(\vec{\alpha}, p) = \int_a^p \frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha}) dx$ , т.к.  $\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}$  — равномерно непрерывна, то по предыдущей теореме:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(\vec{\alpha}, p) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(\vec{\alpha}, w) = \int_a^w \frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha}) dx$$

**Теорема 5.6.4 (Признак Вейерштрасса о равномерной сходимости).**

▷ Пусть

- $F(\vec{\alpha}) = \int_{\vec{\alpha}}^w f(x, \vec{\alpha}) dx$ , где  $\vec{\alpha} \in [c, d]$ .
- Существует функция  $h(x) \in [a, w]$   $|f(x, \vec{\alpha})| < h(x) - \forall \vec{\alpha} \in [c, d]$  и  $\int_a^w h(x) dx$  — сходится.

▷ Тогда

$$\int_a^w f(x, \vec{\alpha}) dx \text{ — сходится.}$$

▷ Доказательство.

- Очевидно. :)

□

**5.7 Эйлеровы интегралы (Гамма- и Бета-функции)****ОПР 5.7.1 (Эйлеровых интегралов).**

1. Гамма-функция:  $\tilde{\gamma}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$ , где  $x > 0$ ;
2. Бета-функция:  $B(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 t^{x-1} \cdot (1-t)^{y-1} dt$ .

**УТВ 5.7.2 (Связь между Гамма- и Бета-функциями).**

$$\triangleright B(x, y) = \frac{\tilde{\gamma}(x) \cdot \tilde{\gamma}(y)}{\tilde{\gamma}(x+y)}$$

▷ Доказательство.

- Без доказательства.

□

**Теорема 5.7.3 (Свойства Гамма-функций).**

- ▷ 1. Гамма-функция имеет смысл (определена)  $\forall x > 0$ ;
- 2.  $\tilde{\gamma}(x) \geq 0 - \forall x > 0$ ;
- 3.  $\tilde{\gamma}(1) = 1$ ;
- 4.  $\tilde{\gamma}(x+1) = x \cdot \tilde{\gamma}(x)$ ;
- 5.  $\tilde{\gamma}(n) = (n-1)!$ ;
- 6. Допустимая формула: пусть  $0 < x < 1$ , тогда  $\tilde{\gamma}(x) \cdot \tilde{\gamma}(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi \cdot x}$ .

▷ Доказательство.

1.  $\int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} \cdot t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$ , пусть  $0 < \alpha < 1$ , рассмотрим  $\int_\alpha^1 e^{-t} \cdot t^{x-1} dt \leq \int_\alpha^1 t^{x-1} dt = \frac{(1-\alpha^x)}{x} < \frac{1}{x} \Rightarrow \exists \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_\alpha^1 e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$ ; очевидно, что  $\exists p > 0 \mid \forall t > p: e^{-t} \cdot t^{x-1} < \frac{1}{t^2} - \forall x > 0$ ,  $\int_1^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt \leq \int_1^p e^{-t} \cdot t^{x-1} dt + \int_p^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt < \infty$ .
2. Это следует из того, что  $e^{-t} \cdot t^{x-1} > 0$ .
3. Т.к.  $\tilde{\gamma}(1) = \int_1^\infty e^{-t} dt = 1$ .
4. Пусть  $0 < \alpha < p < \infty$ , рассмотрим  $\int_\alpha^\beta e^{-t} \cdot t^x dt = -e^{-t} \cdot t^x|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta e^{-t} \cdot x \cdot t^{x-1} dt$ , перейдём к пределу, при  $\alpha \rightarrow 0$ , а потом, при  $\beta \rightarrow \infty$ :  $\tilde{\gamma}(x+1) = 0 + x \cdot \tilde{\gamma}(x)$ .
5.  $\tilde{\gamma}(1) = 1 = (1-1)!$ ,  $\tilde{\gamma}(2) = 1 \cdot \tilde{\gamma}(1) = (2-1)!$ ,  $\tilde{\gamma}(3) = 2 \cdot \tilde{\gamma}(2) = 2 \cdot 1 \cdot \tilde{\gamma}(1) = (3-1)!$ ...
6. Очевидно (наверное).

□