

Математический анализ

Кренделев Сергей Фёдорович

Редактировали:

Тютюньков Вячеслав,

Брусенцов Леонид,

Абашия Шота

Зорин Константин

23 июня 2006 г.

Оглавление

1 Интегрирование	11
1.1 Первообразная	11
1.1.1 Задача	11
ОПР 1.1.2 (Точной первообразной)	11
ОПР 1.1.4 (выполнения в основном)	12
ОПР 1.1.5 (обобщённой первообразной)	12
ОПР 1.1.6 (интегрируемости)	12
Лемма 1.1.7 (Об единственности первообразной)	12
Теорема 1.1.8 (Линейность первообразной)	13
Теорема 1.1.9 (Интегрирование по частям)	13
Теорема 1.1.10 (Уточнённый критерий монотонности)	13
ОПР 1.1.12 (Неопределённого интеграла)	14
Следствие 1.1.13 ()	14
ОПР 1.1.14 (Определённого интеграла)	14
ОПР 1.1.15 (Площади)	15
ОПР 1.1.16 (Криволинейной трапеции)	15
Лемма 1.1.17 (Ньютона — связь точной первообразной и площади)	15
Следствие 1.1.18 (Связь первообразной и площади криволинейной трапеции)	16
1.2 Методы нахождения неопределённых интегралов	16
Теорема 1.2.2 (Первообразная для дробно-рациональных функций)	17
1.3 Свойства определённых интегралов	21
Теорема 1.3.1 (Об интегрируемости на объединении отрезков)	21
Теорема 1.3.2 (Линейность определённого интеграла)	21
Теорема 1.3.3 (Ориентированность определённого интеграла)	22
Следствие 1.3.4 (Интеграл одного предела)	22
Теорема 1.3.5 (Монотонность определённого интеграла)	22
Следствие 1.3.6 (Неравенство интегралов)	23
Следствие 1.3.7 (Неравенство интегралов с модулем)	23
ОПР 1.3.8 (Абсолютной интегрируемости)	23
Следствие 1.3.9 (Неравенство интегралов с модулями)	23

Следствие 1.3.10 (Неравенство интеграла и константы)	24
Теорема 1.3.11 (Аддитивность интегралов по отрезкам)	24
Теорема 1.3.12 (Первая интегральная теорема о среднем)	25
Теорема 1.3.13 (Вторая интегральная теорема о среднем)	26
Теорема 1.3.14 (О замене переменных в определённом интеграле)	26
Следствие 1.3.15 (Условия на $\phi(t)$)	27
Замечание 1.3.16 (О замене переменной)	27
Замечание 1.3.17 (Без названия)	27
Замечание 1.3.18 (Добавим случаи:)	28
1.4 Критерий интегрируемости. Несобственные интегралы	28
Замечание 1.4.2 (Нахождение первообразной)	28
Теорема 1.4.3 (О несобственном интеграле)	28
ОПР 1.4.4 (Определение интеграла на отрезке)	29
Лемма 1.4.5 (Интегрирование по частям)	29
Теорема 1.4.6 (Интегрирование по частям для несобственных интегралов)	30
Теорема 1.4.7 (Коши о существовании не собственного интеграла)	30
Теорема 1.4.8 (Асимптотический признак существования несобственного интеграла)	31
Лемма 1.4.9 (интегральное неравенство Абеля)	32
Теорема 1.4.10 (Признак Абеля-Дирихле сходимости несобственного интеграла)	33
Теорема 1.4.11 (интегральный признак Коши сходимости числового ряда)	34
1.5 Интеграл Римана (то мы изучали интеграл Ньютона)	36
ОПР 1.5.1 (разбиения и суммы Римана)	36
ОПР 1.5.2 (Продолжения разбиения)	36
ОПР 1.5.3 (Суммы разбиений)	36
Лемма 1.5.4 (О сумме разбиений)	36
ОПР 1.5.5 (R_1 . интеграл Римана)	36
1.5.5.1 Построение Дарбу	37
1.5.5.2 Факт	37
ОПР 1.5.5.3 (Верхнего и нижнего интеграла)	37
ОПР 1.5.6 (R_2 . Интегрируемость по Риману)	37
1.5.7 Теорема Дарбу	38
ОПР 1.5.7.1 (продолжения разбиения)	38
ОПР 1.5.7.2 (суммы разбиений)	38
Лемма 1.5.7.3 (Лемма 1)	38
Лемма 1.5.7.4 (Лемма 2)	38
Лемма 1.5.7.5 (Лемма 3)	39
Лемма 1.5.7.6 (Лемма 4)	39
Теорема 1.5.7.7 (Теорема Дарбу)	39
Теорема 1.5.8 (Интегрируемость непрерывных функций)	40

2	Функциональные ряды и последовательности	43
ОПР 2.1	(числовой последовательности)	43
ОПР 2.2	(точки сходимости)	43
ОПР 2.3	(области сходимости)	43
ОПР 2.4	(точки сходимости ряда)	43
ОПР 2.5	(области сходимости ряда)	43
ОПР 2.6	(области сходимости ряда)	44
ОПР 2.7	(поточечной сходимости)	44
2.8	Равномерная непрерывность	45
ОПР 2.8.1	(равномерно сходящейся последовательность функций)	45
ОПР 2.8.3	(равномерно сходящийся функциональный ряд)	45
Теорема 2.8.4	(Критерий Коши о равномерной сходимости)	45
Теорема 2.8.5	(Необходимый признак Вейерштрасса равномерной сходимости)	46
Теорема 2.8.6	(Признак Вейерштрасса равномерной сходимости для рядов)	47
Теорема 2.8.7	(О предельном переходе в последовательностях)	47
Следствие 2.8.8	(Теорема о непрерывности предельной точки)	48
Следствие 2.8.8.1	()	48
Теорема 2.8.9	(о равномерной сходимости и интегрируемости по Риману)	49
Замечание 2.8.9.1	(Условие, что отрезок $[a, b]$ ограничен — по существу!)	50
Теорема 2.8.10	(Равномерная сходимость и дифференцируемость)	50
Теорема 2.8.11	(Вейерштрасса о равномерном приближении)	52
2.9	Степенные ряды	54
ОПР 2.9.1	(степенного ряда)	54
Замечание 2.9.1.1	()	54
ОПР 2.9.2	(степенного ряда центрирования)	54
Лемма 2.9.3	(Первая лемма Абеля о степенных рядах)	54
Следствие 2.9.4	(Расходимость ряда)	55
Следствие 2.9.5	(Структура области сходимости)	55
Теорема 2.9.6	(О радиусе сходимости)	55
Теорема 2.9.7	(О радиусе сходимости)	56
Лемма 2.9.8	(Вторая лемма Абеля)	56
Следствие 2.9.9	(О непрерывности степенного ряда)	57
Теорема 2.9.10	(Об интегрируемости степенного ряда)	57
Следствие 2.9.11	(Радиус сходимости ряда первообразных)	58
Теорема 2.9.12	(О дифференцируемости степенного ряда)	58
Следствие 2.9.13	(Следствие 1)	59
Следствие 2.9.14	(Следствие 2)	59

3	Метрические пространства	61
ОПР 3.1	(метрики и метрического пространства)	61
УТВ 3.2	(Подмножества метрических пространств)	61
3.3	Дополнительные свойства метрики	61
3.3.0.1	Свойство 1 (Неравенство „ломанной“)	62
3.3.0.2	Свойство 2 (Неравенство параллелограмма)	62
3.3.0.3	Свойство 3 (Второе неравенство треугольника)	62
3.3.1	Последовательности	63
ОПР 3.3.1.1	(последовательности)	63
ОПР 3.3.1.2	(сходимости последовательности)	63
Лемма 3.3.1.3	(Единственность предела)	63
ОПР 3.3.1.4	(Последовательность Коши)	63
Лемма 3.3.1.5	(О сходящейся последовательности)	63
ОПР 3.3.1.6	(Специального множества)	64
ОПР 3.3.1.7	(Ограниченности множества)	64
ОПР 3.3.1.8	(Неограниченного множества)	64
ОПР 3.3.1.9	(предельной точки)	64
ОПР 3.3.1.10	(точки прикосновения)	64
Лемма 3.3.1.11	(Характеризация предельных точек)	64
ОПР 3.3.1.12	(области)	64
Следствие 3.3.1.13	($B_r(a)$ — открыто)	64
ОПР 3.3.1.14	(замкнутого множества)	65
ОПР 3.3.1.15	(Полного метрического пространства)	65
Лемма 3.3.1.17	(О метриках в \mathbb{R}^n)	65
3.3.1.18	Обозначение	65
УТВ 3.3.1.19	(Свойства сходимости)	65
Следствие 3.3.1.20	(Полнота \mathbb{R}^n)	66
3.4	Компактные множества	66
ОПР 3.4.1	(компактного множества)	66
Лемма 3.4.3	(Полнота компактных множеств)	66
Следствие 3.4.3.1	(Замкнутость компактных множеств)	67
Лемма 3.4.4	(Ограниченность компактного подмножества)	67
Следствие 3.4.4.1	(Замкн-ть и огран-ть компактного множества)	67
ОПР 3.4.5	(ε -сети)	68
Теорема 3.4.6	(Хаусдорфа о критерии компактности)	68
ОПР 3.4.7	(открытого покрытия)	68
Следствие 3.4.7.1	(условие компактности)	68
Следствие 3.4.7.2	(компактность ограниченных и замкнутых множеств)	69
3.5	Непрерывность	69
ОПР 3.5.1	(1 непрерывной в предельной точке функции)	69
ОПР 3.5.2	(2 непрерывной в предельной точке функции)	69

Оглавление	MFH Corporation	Стр. 7
ОПР 3.5.3 (Сжимающего отображения)		69
Лемма 3.5.4 (Непрерывность сжимающего отображения)		69
Теорема 3.5.5 (О неподвижной точке)		69
4 Функции многих переменных		71
ОПР 4.1 (нормы)		71
4.2 Свойства нормы:		71
ОПР 4.3 (скалярного произведения)		72
4.4 Свойства скалярного произведения		72
ОПР 4.5 (метрики)		72
ОПР 4.6 (непрерывность отображения в точке)		72
4.7 Линейные отображения		73
ОПР 4.7.1 (линейного отображения)		73
Лемма 4.7.2 (линейность суперпозиции линейных отображений)		73
УТВ 4.7.3 (О представлении решения)		73
Следствие 4.7.3.1 (матрица линейного отображения)		73
ОПР 4.7.4 (нормы линейного отображения)		73
Следствие 4.7.4.1 ()		74
Следствие 4.7.4.2 (Связь нормы отображения и сжимае-		
мости)		74
Лемма 4.7.5 (Оценка нормы линейного отображения)		74
Теорема 4.7.6 (Непрерывность линейного отображения)		75
4.8 Аффинные отображения		75
ОПР 4.8.1 (аффинного отображения)		75
Лемма 4.8.2 (Условие сжимаемости аффинного отображения)		75
4.9 Частная производная		76
ОПР 4.9.1 (параметризованной кривой)		76
ОПР 4.9.2 (дифференцируемость параметризованной кривой в		
точке)		76
Следствие 4.9.3 (Условие дифференцируемости в точке)		76
Теорема 4.9.4 (Теорема 1)		77
Теорема 4.9.5 (Теорема 2)		77
Следствие 4.9.6 (Неравенство)		78
4.9.7 Конструкция для частных производных		79
ОПР 4.9.8 (i-ой частной производной)		79
Следствие 4.9.9 (Тождества частной производной)		80
4.10 Дифф-ть функций многих переменных		80
ОПР 4.10.1 (дифференцируемости)		80
Теорема 4.10.2 (Дифференциал)		81
Следствие 4.10.2.1 (Условие существования всех частных		
производных)		82
Следствие 4.10.2.2 (Координатное представление)		82
ОПР 4.10.3 (производной по направлению)		82

Стр. 8	MFH Corporation	Оглавление
	ОПР 4.10.4 (градиента)	82
	Лемма 4.10.6 ()	84
	Теорема 4.10.7 (Достаточный признак дифф-ти отображения в	
	точке)	85
	Теорема 4.10.8 (О дифференцируемости суперпозиций)	86
4.11	Теорема об обратной функции	88
	Теорема 4.11.1 (Об обратной функции)	88
4.12	Теорема о неявной функции	92
	ОПР 4.12.1 (гиперповерхности)	92
	ОПР 4.12.3 (пересечения гиперповерхностей)	92
	ОПР 4.12.4 (частичного дифференциала)	92
	Теорема 4.12.5 (О неявной функции)	92
	Замечание 4.12.5.1 ()	94
	Замечание 4.12.5.2 (Гиперповерхность)	95
	Замечание 4.12.5.3 (Линейное отображение)	95
	Замечание 4.12.5.4 (Тождественное равенство)	96
4.13	Высшие производные	97
	Теорема 4.13.1 (равенство частных производных)	97
	Теорема 4.13.1.2 (Равенство частных производных)	98
	ОПР 4.13.2 (принадлежания классу)	100
	Теорема 4.13.3 (Формула Тейлора для функций многих перемен-	
	ных)	100
4.14	Локальные экстремумы	102
	ОПР 4.14.1 (локальных max и min)	102
	ОПР 4.14.2 (локального экстремума)	102
	Теорема 4.14.3 (Необходимое условие локального экстремума)	102
	ОПР 4.14.4 (стационарной точки)	103
4.15	Квадратичная форма	103
	ОПР 4.15.1 (квадратичной формы)	103
	4.15.2 Свойства квадратичной формы	103
	ОПР 4.15.3 (положительно и отрицательно определённой квад-	
	ратичной формы)	103
	ОПР 4.15.4 (положительной и отрицательной квадратичных форм)	103
	ОПР 4.15.5 (неопределённой квадратичной формы)	103
	Теорема 4.15.7 (Монотонность положительно определённой квад-	
	ратичной формы)	104
	ОПР 4.15.8 (Матрица Гессе)	105
	Теорема 4.15.9 (О квадратичной форме, ассоциативной с функ-	
	цией в точке)	105
	ОПР 4.15.10 (стационарной точки)	106
	Теорема 4.15.11 (Достаточные условия экстремума)	106
	Следствие 4.15.11.1 (Случай неопределённой квадратич-	
	ной формы)	106

4.16 Аналитические многообразия	107
ОПР 4.16.1 (аналитического многообразия)	107
ОПР 4.16.2 (регулярной точки)	107
ОПР 4.16.3 (регулярного аналитического многообразия)	107
ОПР 4.16.5 (параметризуемое аналитическое многообразие)	108
Следствие 4.16.5.1 (Теорема о неявном отображении)	109
ОПР 4.16.6 (линейного многообразия)	109
ОПР 4.16.7 (касательного пространства и касательной плоскости)	109
4.16.9 Замечание	110
ОПР 4.16.10 (касательного проектора)	110
Замечание 4.16.11 (Из алгебры)	110
ОПР 4.16.12 (лежания на параметрическом многообразии)	111
Лемма 4.16.13 (принадлежность касательного вектора)	111
ОПР 4.16.14 (независимых кривых)	112
Лемма 4.16.15 (Существование независимых кривых)	112
ОПР 4.16.16 (условного min и max)	113
ОПР 4.16.17 (условного экстремума)	113
Теорема 4.16.18 (О необходимом условии условного экстремума)	114
Следствие 4.16.18.1 (Метод Э.-Л. поиска условного экстремума)	115
Теорема 4.16.21 (Формула Тейлора для функций многих переменных)	116
4.17 Локальные экстремумы	118
ОПР 4.17.1 (локальных max и min)	118
ОПР 4.17.2 (локального экстремума)	118
Теорема 4.17.3 (Необходимое условие локального экстремума)	118
ОПР 4.17.4 (стационарной точки)	119
4.18 Квадратичная форма	119
ОПР 4.18.1 (квадратичной формы)	119
4.18.2 Свойства квадратичной формы	119
ОПР 4.18.3 (положительно и отрицательно определённой квадратичной формы)	119
ОПР 4.18.4 (положительной и отрицательной квадратичных форм)	119
ОПР 4.18.5 (неопределённой квадратичной формы)	119
Теорема 4.18.7 (Представление квадратичной формы)	120
ОПР 4.18.8 (линейного многообразия)	120
ОПР 4.18.9 (касательного пространства и касательной плоскости)	120
4.18.11 Замечание	121
4.19 Условный экстремум	122
ОПР 4.19.1 (условного min и max)	122
ОПР 4.19.2 (условного экстремума)	122
Теорема 4.19.3 (Метод неопр-ых множителей Эйлера-Лагранжа)	122

Следствие 4.19.3.1 (Метод Э.-Л. поиска условного экстремума)	123
5 Интегралы, зависящие от параметра	127
ОПР 5.1 (Равномерного стремления)	127
ОПР 5.2 (Интеграла, зависящего от параметра)	127
Лемма 5.3 (Предельный переход)	127
Следствие 5.3.1 (Случай непрерывности)	128
5.4 Дифференцирование интеграла	129
Теорема 5.4.1 (О дифференцируемости такого интеграла)	129
Теорема 5.4.2 (Разложение производной)	130
5.5 Интегрирование по параметру	132
Теорема 5.5.1 (Об интегрировании по параметру)	132
5.6 Несобственный интеграл, зависящий от параметра	133
ОПР 5.6.1 (Равномерной сходимости)	133
Теорема 5.6.2 (Условие непрерывности)	134
Теорема 5.6.3 (О дифференцируемости)	134
Теорема 5.6.4 (Признак Вейерштрасса о равномерной сходимости)	135
5.7 Эйлеровы интегралы (или Гамма- и Бета-функции)	135
ОПР 5.7.1 (Эйлеровых интегралов)	135
УТВ 5.7.2 (Связь между Гамма- и Бета-функциями)	136
Теорема 5.7.3 (Свойства Гамма-функций)	136

Глава 1

Интегрирование

1.1 Первообразная

1.1.1 Задача

- ▷ Пусть на (a, b) задана $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и требуется найти $F(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, причём F — непрерывна и дифференцируема, где $\forall x \in (a, b): F'(x) = f(x)$.

ОПР 1.1.2 (Точной первообразной).

Если функция F — существует для задачи, то она называется точной первообразной для функции f .

Пример 1.1.3.

- ▷ Пусть

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

и предположим, что существует первообразная на \mathbb{R} , обозначим за $F(x)$.

- ▷ Тогда

- При $x > 0$ — рассмотрим $F(x) - F(0) \stackrel{\text{(теорема Лагранжа)}}{=} F'(\xi) \cdot x$, $\xi \in (0, x) \Rightarrow f(\xi) \cdot x = F(x) - F(0) \Rightarrow F(x) = x + F(0)$.
- При $x < 0$: $F(x) = -x + F(0) \Rightarrow F(x) = |x| + F(0)$, тогда $F(x)$ — непрерывна, но не дифференцируема в нуле.

ОПР 1.1.4 (выполнения в основном).

Будем говорить, что некоторое высказывание $P(x)$, при $x \in A$ — выполняется в основном, если множество $E = \{x \mid P(x) \text{ — не верно}\}$ — не более, чем счётно.

- f — определена в основном на A , если множество $M \subset A$: f не определена на M — не более, чем счётно.
- f — непрерывна в основном на $A \subseteq \mathbb{R}$, если f — непрерывна на $A \setminus M$, причём M — не более, чем счётно.
- f — дифференцируема в основном на множестве $A \subseteq \mathbb{R}$, если множество M , где $f'(x)$ не существует $\forall x \in M$ — не более, чем счётно.

ОПР 1.1.5 (обобщённой первообразной).

Функция $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, определённая всюду называется обобщённой первообразной для функции $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, если выполняется:

- F — непрерывна на (a, b) ;
- F — дифференцируема в основном;
- $F'(x) = f(x)$ — в основном.

ОПР 1.1.6 (интегрируемости).

Будем говорить, что f — интегрируема на $\langle a, b \rangle$, если f — определена на $\langle a, b \rangle$ и существует обобщённая первообразная F на $\langle a, b \rangle$.

Пример

- Функция $\operatorname{sgn} x$ — интегрируема на \mathbb{R} , причём $|x|$ для неё первообразная;
- $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x) \cdot \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, т.к. $x = \pi \cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$ — счётно $\Rightarrow \Rightarrow F(x) = |\sin x|$;
- Функция Дирихле: $d(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ — иррациональный;} \\ 1, & x \text{ — рациональный.} \end{cases}$

Лемма 1.1.7 (Об единственности первообразной).

- ▷ Пусть

f — интегрируема на (a, b) и F — её первообразная на (a, b) ; g — определена на (a, b) и $g(x) = f(x)$ — в основном.

- ▷ Тогда

F — первообразная для g на (a, b) .

- ▷ Доказательство.

○ Пусть

$$E_1 = \{x \in (a, b) \mid F'(x) \text{ — не определена}\},$$

$$E_2 = \{x \in (a, b) \mid f(x) \neq g(x)\},$$

тогда E_1 — счётно из определения первообразной, E_2 — счётно из опр $g(x) \neq f(x)$.

○ Пусть $E = E_1 \cup E_2$ — счётно по определению и $x \in (a, b) \setminus E$, тогда $F'(x) = f(x) = g(x) \Rightarrow F'(x) = g(x)$ на $(a, b) \setminus E \Rightarrow F$ — первообразная для $g \Rightarrow g$ — интегрируема.

□

Теорема 1.1.8 (Линейность первообразной).

▷ Пусть

f и g — интегрируемы на (a, b) ; существуют F и G — первообразные для f и g соответственно.

▷ Тогда

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: h = \lambda \cdot f + \mu \cdot g$ — интегрируема на (a, b) и $H = \lambda \cdot F + \mu \cdot G$ — первообразная для функции h .

▷ Доказательство.

- Пусть $E_1 = (a, b) \setminus \{x \in (a, b) \mid F'(x) = f(x)\}$, а $E_2 = (a, b) \setminus \{x \mid G'(x) = g(x)\}$, тогда E_1 и E_2 — счётны.
- $E = E_1 \cup E_2$ — счётное, тогда $\forall x \in (a, b) \setminus E: H' = \lambda \cdot F' + \mu \cdot G' = \lambda \cdot f + \mu \cdot g =_{\text{по опр.}} h \Rightarrow H$ — первообразная.

□

Теорема 1.1.9 (Интегрирование по частям).

▷ $F' = f, G' = g \Rightarrow (F \cdot G)' = F' \cdot G + G' \cdot F = f \cdot G + g \cdot F$ — упражнение на экзамен.

Теорема 1.1.10 (Уточнённый критерий монотонности).

▷ Пусть

$f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f — непрерывна и дифференцируема в основном, причём существует не более, чем счётное множество $E \subseteq \langle a, b \rangle: \forall x \in (a, b) \setminus E: f'(x) \geq 0$.

▷ Тогда

f — монотонно возрастает.

▷ Доказательство.

- Из определения первообразной и теоремы о характеристике монотонных функций прошлого семестра.

□

Следствие 1.1.11.

1. Если $f'(x) \geq 0$ — в основном и f — непрерывна, то f — возрастает;
2. Если $f'(x) = 0$ — в основном и f — непрерывна, то f — постоянна;
3. Если $f(x) = g(x)$ — в основном и $f(x), g(x)$ — непрерывны на (a, b) , то $F - G = \text{const}$.

ОПР 1.1.12 (Неопределённого интеграла).

Пусть f — интегрируема на (a, b) , f — функция; пусть $[F(x)]$ — множество всех первообразных функции f , тогда $\int f(x) dx = [F(x)]$ называется неопределённым интегралом.

Если $F(x)$ — первообразная $f(x)$ на (a, b) , то любая другая первообразная имеет вид $F(x) + C$, где C — константа (следует из леммы 1.1.7).

Следствие 1.1.13.

▷ Пусть

f — интегрируема на $[a, b]$, F — первообразная.

▷ Тогда

$F(b) - F(a)$ — не зависит от первообразной.

▷ Доказательство.

- Пусть F_1 — первообразная, тогда $F_1(x) = F(x) + C$, т.е. $F_1(b) - F_1(a) = F(b) - C - F(a) + C = F(b) - F(a)$.

□

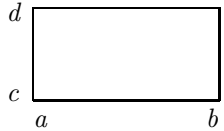
ОПР 1.1.14 (Определённого интеграла).

Пусть f — интегрируема на $[a, b]$, тогда $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ — называется определённым интегралом, где F — первообразная.

ОПР 1.1.15 (Площади).

Пусть в \mathbb{R}^2 определено некоторое отображение $\mu_2(S)$, которое всякому подмножеству из \mathbb{R}^2 сопоставляет положительное число:

- Если прямоугольник (\square), то $\mu_2(\square) = |b - a| \cdot |d - c|$;
- Если $S_1 \subseteq S_2$, то $\mu_2(S_1) \leq \mu_2(S_2)$;
- Если $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, то $\mu_2(S_1 \cup S_2) = \mu_2(S_1) + \mu_2(S_2)$.

**ОПР 1.1.16** (Криволинейной трапеции).

Пусть $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Определим $W_f(p, t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (p, t), y \in (0, f(x))\}$, — где $f \geq 0$. Тогда $W_f(p, t)$ — криволинейная трапеция.

Лемма 1.1.17 (Ньютона — связь точной первообразной и площади).

▷ Пусть

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f — положительная и непрерывная на $[a, b]$.

▷ Тогда

f — обладает точной первообразной $F(x)$ на $[a, b]$, причём

$$F(x) = \mu_2(W_f(a, x))$$

▷ Доказательство.

- Идём с конца: пусть $x_0 \in (a, b)$, тогда $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0$: если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ — следует из непрерывности функции f на $[a, b]$.
- Т.к.

$$\begin{aligned} F(x) &= \mu_2(W_f(a, x)) \Rightarrow F(x) - F(x_0) = \\ &= \mu_2(W_f(a, x)) - \mu_2(W_f(a, x_0)) = \\ &= [\mu_2(W_f(a, x_0)) + \mu_2(W_f(x_0, x))] - \mu_2(W_f(a, x_0)) = \\ &= \mu_2(W_f(x_0, x)). \end{aligned}$$

◦ Рассмотрим:

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{\varepsilon}{2} &\Rightarrow f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow (x - x_0) \cdot \left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right) &\leq \mu_2(W_f(x_0, x)) \leq (x - x_0) \cdot \left(f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x - x_0) \cdot \left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right) &\leq F(x) - F(x_0) \leq (x - x_0) \cdot \left(f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\text{т.к. } x < x_0) &\Rightarrow \left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{(x - x_0)} \leq \left(f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} &\leq \frac{F(x) - F(x_0)}{(x - x_0)} - f(x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{(x - x_0)} - f(x_0) \right| &\leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

◦ Аналогично для случая $x_0 > x$.

◦ Переходя к пределу, при $x \rightarrow x_0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем, что $|F'(x_0) - f(x_0)| = 0 \Rightarrow F$ — первообразная.

□

Следствие 1.1.18 (Связь первообразной и площади криволинейной трапеции).

▷ $F(b) - F(a)$, где F — первообразная положительной функции f , является площадью криволинейной трапеции. Если ϕ — произвольная функция, то можно рассмотреть $\phi^+ \geq 0$ и $\phi^- \leq 0$.

1.2 Методы нахождения неопределённых интегралов

Пример 1.2.1 (Элементарных функций, не имеющих элементарные первообразные).

$$\frac{\sin x}{x}; \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; e^{-x^2}; e^{-1/x}.$$

Методы нахождения неопределённых интегралов:

1. Надо взять таблицу производных, переставить столбцы и обозвать таблицей интегралов.
2. Из линейности и однородности: если $F_i(x)$ — неопределённый интеграл от $f_i(x)$, т.е. $\int f_i(x) dx = F_i(x) + C$; тогда

$$C + \sum_i \lambda_i \cdot F_i(x) = \int \sum_i \lambda_i \cdot f_i(x) dx.$$

3. Замена переменной: если $[F(x)] = \int f(x) dx$, а $x = \phi(y)$, то $[F(\phi(y))] = \int f(\phi(y)) \cdot \phi'(y) dy$, т.к. $F'(\phi(y)) = F'_x(x) \cdot \phi'(y)$ и учитывая, что $F'_x(x) = f(\phi(y))$.

4. Интегрирование по частям: т.к. $(F \cdot G)' = F' \cdot G + G' \cdot F$, то $F \cdot G = \int F' \cdot G dx + \int G' \cdot F dx \Rightarrow$

$$\int F' \cdot G dx = F \cdot G - \int G' \cdot F dx.$$

5. Угадывание ответа: например для $\int \sin(\alpha x) \cdot e^{\beta x} dx$:

$$F(x) = e^{\beta x} \cdot G(x) =_{(\text{ожидается})} e^{\beta x} \cdot (A \cdot \sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x)),$$

где A и B — можно найти из $F'(x) = f(x)$. Так же: $\int x^2 \cdot e^{2x} dx = e^{2x} \cdot (A \cdot x^2 + b \cdot x + c)$.

6. Дробно-рациональных функций: пусть $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — два многочлена, причём $\deg P_n = n < m = \deg Q_m \Rightarrow f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ — имеет элементарную производную.

Теорема 1.2.2 (Первообразная для дробно-рациональных функций).

▷ Первообразная для дробно-рациональных функций является элементарной функцией.

▷ Доказательство.

○ Из алгебры известно, что $Q(x)$ можно разложить:

$$Q(x) = A_0 \cdot (x-x_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (x-x_m)^{r_m} \cdot (x^2+p_q \cdot x+q_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x^2+p_t \cdot x+q_t)^{s_t},$$

где $r_1+r_2+\dots+r_m+2 \cdot (s_1+s_2+\dots+s_t) = \deg Q$; x_1, x_2, \dots, x_n — вещественные корни уравнения $Q(x) = 0$; r_1, r_2, \dots, r_m — кратности соответствующих корней и $A_0, p_1, p_2, \dots, p_t, q_1, q_2, \dots, q_t$ — вещественные числа.

○ Преобразуем:

$$\begin{aligned} P(x) &= u_{11} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_1)^1} + u_{12} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_1)^2} + \dots + u_{1r_1} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_1)^{r_1}} + \dots + \\ &+ u_{m1} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_m)^1} + u_{m2} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_m)^2} + \dots + u_{mr_m} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_m)^{r_m}} + \dots + \\ &+ (v_{11} \cdot x + w_{11}) \cdot \frac{Q(x)}{(x^2+p_1 \cdot x+q_1)^1} + \dots + \\ &+ (v_{1s_1} \cdot x + w_{1s_1}) \cdot \frac{Q(x)}{(x^2+p_1 \cdot x+q_1)^{s_1}} + \dots + \\ &+ (v_{k1} \cdot x + w_{k1}) \cdot \frac{Q(x)}{(x^2+p_k \cdot x+q_k)^1} + \dots + \\ &+ (v_{ks_k} \cdot x + w_{ks_k}) \cdot \frac{Q(x)}{(x^2+p_k \cdot x+q_k)^{s_k}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\alpha_1=1}^{r_1} \left(u_{1\alpha_1} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_1)^{\alpha_1}} \right) + \sum_{\alpha_2=1}^{r_2} \left(u_{2\alpha_2} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_2)^{\alpha_2}} \right) + \dots + \\ &+ \sum_{\alpha_m=1}^{r_m} \left(u_{m\alpha_m} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_m)^{\alpha_m}} \right) + \\ &+ \sum_{\beta_1=1}^{s_1} \left((v_{1\beta_1} \cdot x + w_{1\beta_1}) \cdot \frac{Q(x)}{(x^2+p_1 \cdot x+q_1)^{\beta_1}} \right) + \dots + \\ &+ \sum_{\beta_t=1}^{s_t} \left((v_{t\beta_t} \cdot x + w_{t\beta_t}) \cdot \frac{Q(x)}{(x^2+p_t \cdot x+q_t)^{\beta_t}} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{\alpha_j=1}^{r_j} u_{j\alpha_j} \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_j)^{\alpha_j}} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^t \left(\sum_{\beta_k=1}^{s_k} (v_{k\beta_k} \cdot x + w_{k\beta_k}) \cdot \frac{Q(x)}{(x^2+p_k \cdot x+q_k)^{\beta_k}} \right), \end{aligned}$$

тогда можно представить

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{a_j=1}^{r_j} \frac{u_{j\alpha_j}}{(x-x_j)^{\alpha_j}} \right) + \sum_{k=1}^t \left(\sum_{\beta_k=1}^{s_k} \frac{v_{k\beta_k} \cdot x + w_{k\beta_k}}{(x^2 + p_k \cdot x + q_k)^{\beta_k}} \right),$$

где $u_{j\alpha_j}$, $v_{k\beta_k}$ и $w_{k\beta_k}$ — вещ. числа, определённые единственным способом.

○ Получается, что для взятия интеграла от такой $f(x)$ — достаточно уметь брать интегралы вида

1. $\int \frac{dx}{(x-a)^k}$, $k > 0$, $k \in \mathbb{N}$

2. $\int \frac{a \cdot x + b}{(x^2 + p \cdot x + q)^k} dx$, $k > 0$, $k \in \mathbb{N}$:

✓ $\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} \ln|x-a|, & k = 1; \\ \frac{1}{(1-k) \cdot (x-a)^{k-1}}, & k > 1. \end{cases}$

✓ $\int \frac{a \cdot x + b}{(x^2 + p \cdot x + q)^k} dx$: рассмотрим $x^2 + p \cdot x + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$.

Пусть $q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 > 0$, тогда $\exists \delta$: $\delta^2 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$, получается:

$$x^2 + p \cdot x + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \delta^2 = \delta^2 \cdot \left(\left(\frac{x + p/2}{\delta}\right)^2 + 1\right).$$

Пусть $t = \frac{x + p/2}{\delta} \Rightarrow x = \delta \cdot t - \frac{p}{2} \Rightarrow dx = \delta dt \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int \frac{a \cdot x + b}{(x^2 + p \cdot x + q)^k} dx &= \int \frac{a \cdot (\delta \cdot t - p/2) + b}{(\delta^2 \cdot (t^2 + 1))^k} \cdot \delta dt = \\ &= \frac{1}{\delta^{2k-1}} \cdot \int \frac{a\delta \cdot t - a \cdot p/2 + b}{(t^2 + 1)^k} dt \end{aligned}$$

или просто

$$\int \frac{a \cdot x + b}{(x^2 + 1)^k} dx = \int \frac{a \cdot x}{(x^2 + 1)^k} dx + \int \frac{b}{(x^2 + 1)^k} dx.$$

★

$$\begin{aligned} \int \frac{a \cdot x dx}{(x^2 + 1)^k} &= \int \frac{a \cdot 2x dx}{(x^2 + 1)^k} = \frac{a}{2} \cdot \int \frac{dy}{y^k} = \\ &= \begin{cases} \frac{a}{2} \cdot \ln|x^2 + 1|, & k = 1; \\ \frac{1}{2 \cdot (1-k) \cdot (x^2 + 1)^{k-1}}, & k \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

★ Пусть $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, тогда $I_0 = x$, $I_1 = \arctg x$. Представим

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{(x^2+1) dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \\ &= \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^{n+1}} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}, \end{aligned}$$

значит

$$I_n = \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^{n+1}} + I_{n+1}.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^{n+1}} &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{x \cdot (x^2+1)' dx}{(x^2+1)^{n+1}} =_{\text{по частям}} \\ &\frac{1}{2} \cdot (x^2+1) \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n+1}} - \frac{1}{2} \cdot \\ &\cdot \int (x^2+1) \cdot \frac{(x^2+1)^{n+1} - x \cdot (n+1) \cdot (x^2+1)^n \cdot 2x}{(x^2+1)^{2n+2}} dx = \\ &\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^n} - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x^2 \cdot (n+1)}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \\ &\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^n} - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} + (n+1) \cdot \\ &\cdot \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx \Rightarrow \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^n} - \frac{1}{2} \cdot I_n + n \cdot \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx + \\ &+ \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx \Rightarrow \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \\ &= \frac{1}{2n} \cdot I_n - \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^n} \Rightarrow \\ I_n &= \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx + I_{n+1} = \\ &= \frac{1}{2n} \cdot I_n - \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^n} + I_{n+1} \Rightarrow \\ I_{n+1} &= \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n. \end{aligned}$$

Вывод: Первообразная для дробно-рациональной функции является элементарной функцией. □

1.3 Свойства определённых интегралов

Теорема 1.3.1 (Об интегрируемости на объединении отрезков).

▷ Пусть

$J = \langle a, b \rangle$; для $c \in (a, b)$: $J_+ = (c, \infty)$, $J_- = (-\infty, c)$; f — интегрируема на $J \cap J_+$ и на $J_- \cap J$.

▷ Тогда

f — интегрируема на J .

▷ Доказательство.

◦ Пусть F_1 — первообразная к f на $J_- \cap J$, а F_2 — на $J \cap J_+$; выберем

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) - F_1(c), & x < c; \\ F_2(x) - F_2(c), & x > c; \\ 0, & x = c. \end{cases}$$

тогда F — непрерывна при $x < c$ и при $x > c$; $\lim_{x \rightarrow c+0} F(x) = 0 = F(c)$, $\lim_{x \rightarrow c-0} F(x) = 0 = F(c) \Rightarrow F$ — непрерывна.

◦ Пусть E_1 — множество, где F_1 не дифференцируема, E_2 — множество, где F_2 не дифференцируема; тогда F — не дифференцируема на $E_1 \cup E_2 \cup \{c\}$, но E_1 и E_2 — не более, чем счётны $\Rightarrow F$ — первообразная.

□

Теорема 1.3.2 (Линейность определённого интеграла).

▷ Пусть

f и g — интегрируемы на $J = [a, b]$,
 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

▷ Тогда

$h = \lambda \cdot f + \mu \cdot g$ — интегрируема на J и при этом $\int_a^b h(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx + \mu \cdot \int_a^b g(x) dx$ — свойство *линейности* или *аддитивности*.

▷ Доказательство.

◦ Пусть F и G — первообразные для f и g соответственно, тогда согласно теореме 1.1.8 на стр. 13: $\int_a^b h(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} H(b) - H(a) = \lambda \cdot F(b) + \mu \cdot G(b) - \lambda \cdot F(a) - \mu \cdot G(a) = \lambda \cdot (F(b) - F(a)) + \mu \cdot (G(b) - G(a)) = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx + \mu \cdot \int_a^b g(x) dx$.

□

Теорема 1.3.3 (Ориентированность определённого интеграла).

▷ Пусть

f — интегрируема на $[a, b]$.

▷ Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

▷ Доказательство.

◦ Пусть f — интегрируема, тогда \exists первообразная F : $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = - \int_b^a f(x) dx$.

□

Следствие 1.3.4 (Интеграл одного предела).

▷ $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Теорема 1.3.5 (Монотонность определённого интеграла).

▷ Пусть

f — интегрируема на $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$ или $f(x) > 0$ на $[a, b]$ в основном.

▷ Тогда

$\int_a^b f(x) dx \geq 0$; или $\int_a^b f(x) dx > 0$. соответственно.

▷ Доказательство.

◦ Пусть F — первообразная для $f(x)$, тогда $F'(x) = f(x) \geq 0$ в основном на $[a, b] \Rightarrow F'(x) \geq 0$ — в основном \Rightarrow (по уточ. критерию мон-ти) $\Rightarrow F(x)$ — возрастает \Rightarrow т.к. $b > a \Rightarrow F(b) > F(a) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \geq 0$.

◦ Если хотя бы в одной точке $c \in (a, b)$: $f(c) > 0$, то $\int_a^b f(x) dx > 0$, действительно: пусть c — такая точка, тогда $\exists (\alpha, \beta) \subseteq [a, b]$: $f(x) > 0 - \forall x \in (\alpha, \beta)$, но т.к. $F(x)$ — монотонно возрастает и непрерывна $\Rightarrow F(x)$ — строго монотонно возрастает в окрестности точки c , т.е. $(\alpha, \beta) \Rightarrow F(\beta) > F(\alpha)$. А в силу монотонности получается: $F(b) \geq F(\beta) > F(\alpha) \geq F(a) \Rightarrow F(b) > F(a) \Rightarrow F(b) - F(a) > 0$.

□

Следствие 1.3.6 (Неравенство интегралов).

▷ Пусть

Пусть f и g — интегрируемы на $[a, b]$ и $f(x) \leq g(x)$ — в основном на $[a, b]$.

▷ Тогда

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

▷ Доказательство.

◦ Рассмотрим функцию $h(x) = g(x) - f(x)$, заметим, что $h(x) \geq 0$ — в основном \Rightarrow по теореме 1.3.5 $\int_a^b h(x) dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0$.

□

Следствие 1.3.7 (Неравенство интегралов с модулем).

▷ Пусть

f и h — интегрируемы на $[a, b]$, $|f(x)| \leq h(x)$ — на $[a, b]$ в основном $\forall x \in [a, b]$.

▷ Тогда

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b h(x) dx.$$

▷ Доказательство.

◦ Т.к. $|f(x)| \leq h(x)$ — в основном на $[a, b]$, то это эквивалентно, что $-h(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на $[a, b]$ в основном, а согласно Следствию 1.3.6 получаем: $-\int_a^b h(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b h(x) dx \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b h(x) dx$.

□

ОПР 1.3.8 (Абсолютной интегрируемости).

f называется абсолютно интегрируемой, если f и $|f|$ одновременно интегрируемы.

Следствие 1.3.9 (Неравенство интегралов с модулями).

▷ Пусть

$f(x)$ — абсолютно интегрируема на $[a, b]$.

□

▷ Тогда

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

▷ Доказательство.

◦ Получается из Следствия 1.3.7, если положить $h(x) = |f(x)|$.

□

Следствие 1.3.10 (Неравенство интеграла и константы).

▷ Пусть

$f(x)$ — интегрируема на $[a, b]$ и ограничена так, что $f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$.

▷ Тогда

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M \cdot |b - a|.$$

▷ Доказательство.

◦ Положим в Следствии 1.3.7 $h(x) = M$, тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &\leq_{\text{(Следствие 1.3.9)}} \int_a^b |f(x)| dx \leq \\ &\leq_{\text{(Следствие 1.3.6)}} \int_a^b M dx = M \cdot \int_a^b dx = M \cdot |b - a|. \end{aligned}$$

□

Теорема 1.3.11 (Аддитивность интегралов по отрезкам).

▷ Пусть

$f(x)$ — интегрируема на $[a, b]$ и $c \in (a, b)$.

▷ Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

▷ Доказательство.

◦ Пусть F — первообразная на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

□

Теорема 1.3.12 (Первая интегральная теорема о среднем).

▷ Пусть

Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f — непрерывна, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$.
Предположим g и $f \cdot g$ интегрируемы на $[a, b]$.

▷ Тогда

Тогда $\exists c \in (a, b)$, такая что $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x) dx$

▷ Доказательство.

◦ По Теореме Вейерштрасса о максимуме и минимуме:

$$\checkmark \exists m = \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad \exists \xi \in [a, b] \quad f(\xi) = m;$$

$$\checkmark \exists M = \max_{x \in [a, b]} f(x) \quad \exists \eta \in [a, b] \quad f(\eta) = M;$$

$$\Rightarrow m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b], \text{ т.к. } g(x) \geq 0 \Rightarrow m \cdot g(x) \leq g(x) \cdot f(x) \leq M \cdot g(x) \quad (\text{По свойству монотонности интеграла}) \Rightarrow m \cdot \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b g(x) \cdot f(x) dx \leq M \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

Если $\int_a^b g(x) dx = 0$, то

$$(\text{из неравенства } \int_a^b g(x) \cdot f(x) dx \leq M \cdot \int_a^b g(x) dx \text{ следует}) \int_a^b g(x) \cdot f(x) dx = 0.$$

Значит требуемое равенство выполнено $\forall c \in (a, b) \quad \int_a^b g(x) dx > 0$.
Тогда введем число

$$R = \frac{\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}, (\text{из неравенства } \int_a^b g(x) \cdot f(x) dx \leq M \cdot \int_a^b g(x) dx \text{ следует})$$

, что R удовлетворяет условию $m \leq R \leq M$.

Если $m < R < M$ и $m \leq f(x) \leq M$, то $\forall R \in [m, M] \quad \exists \zeta \quad f(\zeta) = R$, причём $\eta < \zeta < \xi$, либо

$$\xi < \zeta < \eta \Rightarrow \zeta \in (a, b) \quad (\text{из неравенства } \int_a^b g(x) \cdot f(x) dx \leq M \cdot \int_a^b g(x) dx \text{ получаем})$$

утверждение теоремы. Пусть $R = m$, тогда рассмотрим функцию $\phi(x) = (f(x) - m) \cdot g(x)$, $\Phi(x)$ — первообразная для $\phi(x)$. Тогда $\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \phi(x) dx = \int_a^b (f(x) - m) \cdot g(x) dx = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx - m \cdot \int_a^b g(x) dx = 0$. Значит, Φ — возрастает. Если $\Phi(b) = \Phi(a) \Rightarrow \Phi(x)$ — постоянная.

$$\Phi'(x) = 0 \Rightarrow \Phi'(x) = (f(x) - m) \cdot g(x) = 0;$$

$$\int g(x) dx > 0 \Rightarrow \exists \zeta \quad g(\zeta) > 0;$$

$$(f(\zeta) - m) \cdot g(\zeta) = 0 \Rightarrow f(\zeta) = m.$$

□

Теорема 1.3.13 (Вторая интегральная теорема о среднем).

▷ Пусть

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f — монотонна на $[a, b]$,
 $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f, |g|, f \cdot g$ — интегрируемы на $[a, b]$.

▷ Тогда

$$\exists \xi \in [a, b], \text{ такая что } \int_a^b f \cdot g dx = f(a) \cdot \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \cdot \int_\xi^b g(x) dx$$

▷ Доказательство.

◦ УПРАЖНЕНИЕ

□

Теорема 1.3.14 (О замене переменных в определённом интеграле).

▷ Пусть

f — интегрируема на $I = \langle a, b \rangle$; F — первообразная f на I ; ϕ — определена на некотором отрезке $J = \langle c, d \rangle : \phi(J) \subseteq I$ и выполнены следующие условия

- ϕ дифференцируема и непрерывна на (c, d) — в основном;
- Множество $\{t \in J \mid \text{в точках } x = \phi(t) - F(x) \text{ не определена}\}$ — не более, чем счётно.

▷ Тогда

Функция $(f \circ \phi(t)) \cdot \phi'(t)$ — интегрируема на J и $(F \circ \phi)(t)$ — первообразная для неё на J , причём $\forall p, q \in J$ имеет место: $\int_p^q f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = \int_{\phi(p)}^{\phi(q)} f(x) dx$.

▷ Доказательство.

- Т.к. F — непрерывна по определению, а ϕ — непрерывна по условию, то $(F \circ \phi)(t)$ — непрерывна на $\langle c, d \rangle$. Пусть
 - ✓ $E_1 = \{t \in \langle c, d \rangle \mid \phi \text{ — не дифференцируема в точке } t\}$, тогда по условию E_1 — не более, чем счётно.
 - ✓ $E_2 = \{t \in \langle c, d \rangle \mid \text{в т. } x = \phi(t) \text{ — } F(x) \text{ — не дифференцируема}\}$, тогда согласно условию теоремы E_2 — тоже не более, чем счётное;
 - ✓ обозначим $E = E_1 \cup E_2$ — не более, чем счётное из очевидных соображений.
- Пусть $t \in (c, d) \setminus E$, тогда ϕ — дифференцируема в этой точке и, соответственно $(F \circ \phi)(t)$ — тоже; следовательно $F(x)$ — дифференцируема в точке $x = \phi(t) \Rightarrow$ функция $G(t) = F(\phi(t))$ — дифференцируема в точке $t \Rightarrow$ (теорема о дифференцировании суперпозиции) $G'(t) = F'_x(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$. Это равенство выполняется в основном $\Rightarrow G(t)$ — является первообразной для $f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$ на $J \Rightarrow f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$ — интегрируема на J .
- Пусть p и $q \in J$, тогда в силу того, что $G(t)$ — первообразная \Rightarrow

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_p^q f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt &= G(p) - G(q) = F(\phi(p)) - F(\phi(q)) = \\ &= \int_{\phi(p)}^{\phi(q)} F(x) dx. \end{aligned}$$

□

Следствие 1.3.15 (Условия на $\phi(t)$).

- ▷ Самое трудное — это разобраться, когда выполнена ϕ ; требуются условия:
 - Если функция ϕ — дифференцируема и монотонна на (c, d) , то ϕ — взаимнооднозначно отображение, но при взаимнооднозначном отображении счётное множество переходит в счётное \Rightarrow если $F(x)$ — дифференцируема в основном, то множество точек $\{t \mid x = \phi(t) : F(x) \text{ — не дифференцируема}\}$ — не более, чем счётно.
 - Если $F(x)$ — дифференцируема в точном смысле (т.е. во всех точках), то множество точек $\{t \in (c, d) \mid F(x) \text{ — не определена в } x = \phi(t)\}$ — пусто.

Замечание 1.3.16 (О замене переменной).

$$\triangleright \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

Замечание 1.3.17 (Без названия).

- ▷ Пусть f — интегрируема на $\langle a, b \rangle$, $x_0 \in (a, b)$, $\forall x \in \langle a, b \rangle$, $\langle x_0, x \rangle$, $\langle x, x_0 \rangle$. Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$, тогда:
 1. $\Phi(x_0) = 0$ — очевидно.
 2. $\Phi(x)$ — первообразная для $f(x)$ — по определению.

Замечание 1.3.18 (Добавим случаи:).

- ▷ 1. $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$;
- 2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ — определена на $(0, 1]$, а хотим на $[0, 1]$, т.к. первообразная равна $2 \cdot \sqrt{x}$ на $[0, 1]$.

В любом из случаев 1 или 2 определённый интеграл называется несобственным и в том случае, когда ему можно приписать смысл интеграл называется сходящимся.

1.4 Интегрируемость функций на $[a, b]$. Несобственные интегралы

Пример 1.4.1 (Применение несобственного интеграла).

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = F(1) - \lim_{x \rightarrow 0} F(x),$$

где

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x},$$

т.е. на $[\varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$ — интегрируема. Как обойти? Лекарство — несобственный интеграл.

Замечание 1.4.2 (Нахождение первообразной).

- ▷ Пусть $f(x)$ — интегрируема на $[a, b]$, тогда $\forall x, x_0 \in [a, b] : x > x_0 : F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ — первообразная для f (из Леммы (Ньютона) 1.1.17 на стр. 15 (или из формулы Ньютона-Лейбница)).

Теорема 1.4.3 (О несобственном интеграле).

▷ Пусть

Пусть f — интегрируема на $[a, b]$.

▷ Тогда

Для того, чтобы f была интегрируемой на $[a, b]$ — необходимо и достаточно, чтобы существовал предел $\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) \cdot dt = r \in \mathbb{R}$. Если он существует, то $\int_a^b f(t) \cdot dt = \lim_{x \rightarrow t} \int_a^x f(t) \cdot dt$ (★). Это и есть определение несобственного интеграла. Совершенно аналогично определяется интеграл на $(a, b]$ и (a, b) надо чтобы существовал предел $\lim_{t \rightarrow a+} \int_t^b f(x) dx = l \in \mathbb{R}$.

▷ Доказательство.

- Необходимость: пусть f — интегрируема на $[a, b]$, а $F(x)$ — её первообразная там же, тогда в силу определения первообразной: \exists первообразная $F(x)$ непрерывная на $[a, b]$. Т.к. она непрерывна, то

$$\exists \lim_{x \rightarrow b-} F(x) = F(b)$$

. Согласно замечанию,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b-} F(x) = \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) dt = F(b) \Rightarrow$$

\Rightarrow предел существует.

- Достаточность: поскольку f — интегрируема на $[a, b] \Rightarrow$ существует первообразная $F(x)$, если $x \in [a, b]$ и $F(x) = \int_a^x f(t) dt$;
 $\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) dt = r$, $F(b) = r$.
 Отсюда следует, что $F(x)$ — непрерывна на $[a, b]$.
 $F'(x) = f(x)$ — в основном на $[a, b] \Rightarrow F'(x) = f(x)$ в основном на $[a, b]$. Т.к. F — непрерывна на $[a, b]$ по построению $\Rightarrow f$ — интегрируема на $[a, b]$.

□

ОПР 1.4.4 (Определение интеграла на отрезке).

Пусть $f(x)$ — интегрируема на (a, b) , а $F(x)$ — её первообразная там же и ещё существуют $\lim_{x \rightarrow b-0} F(x) = K$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} F(x) = L$, тогда

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = (\text{по определению интеграла}) K - L = F(x) \Big|_{x=a+0}^{x=b-0}$$

(определение интеграла на $[a, b]$).

Лемма 1.4.5 (Интегрирование по частям).

▷ Пусть

f, g — интегрируемы на интервале $J = \langle a, b \rangle$, F, G — первообразные для f, g соответственно. Рассмотрим функцию $h = f \cdot G + F \cdot g$.

▷ Тогда

h — интегрируема на J .

▷ Доказательство.

- Рассмотрим $H = F \cdot G$.

$F'(x) = f(x)$ — в основном. Пусть E_1 — где это не так.

$G'(x) = g(x)$ — в основном и E_2 — где это не так. Получаем H — не дифференцируема на $E_1 \cup E_2$, которое не более чем счетно.

Пусть $x \notin (E_1 \cup E_2)$. $H'(x) = (F \cdot G)' = F' \cdot G + G' \cdot F = f(x) \cdot G(x) + g(x) \cdot F(x) = h(x) \Rightarrow H'(x) = h(x)$ — в основном. H — непрерывна, т.к. F, G — непрерывны $\Rightarrow h$ — интегрируема.

□

Теорема 1.4.6 (Интегрирование по частям для несобственных интегралов).

▷ Пусть

f, g — интегрируемы на (a, b) , F, G — соответствующие первообразные, тогда если $F \cdot g$ — интегрируема на $[a, b]$, то и $f \cdot G$ интегрируема на $[a, b]$.

▷ Тогда

Если Φ — первообразная для $f \cdot G$, то $F \cdot G - \Phi$ — первообразная для $g \cdot F$. Причём, если существует $\lim_{x \rightarrow b-} F(x) \cdot G(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a+} F(x) \cdot G(x)$, тогда:

$$\int_a^b f(x) \cdot G(x) dx = F(x) \cdot G(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) \cdot F(x) dx.$$

▷ Доказательство.

- $h = f \cdot G + g \cdot F$ (Согласно Лемме) h — интегрируема на (a, b) . $H = G \cdot F$ — первообразная. $\int_a^b h(x) dx = H(b) - H(a) = F(x) \cdot G(x) \Big|_a^b$.
 $h(x)$ — интегрируема на $[a, b]$. Проинтегрируем равенство: $h = f \cdot G + g \cdot F \Rightarrow f \cdot G = h - g \cdot F$,
 $\int_a^b f \cdot G dx = \int_a^b h dx - \int_a^b g \cdot F dx = F(x) \cdot G(x) \Big|_a^b - \int_a^b g \cdot F dx$.

□

Теорема 1.4.7 (Коши о существовании не собственного интеграла).

▷ Пусть f — интегрируема на $[a, b]$.

Тогда f — интегрируема на $[a, b] \Leftrightarrow$ когда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c \in [a, b]$, такое что $\forall [\alpha, \beta] \subset [c, b) \quad \left| \int_\alpha^\beta f(x) dx \right| < \varepsilon$.

В этом случае говорят, что $\int_a^b f(x) dx$ сходиться.

▷ Доказательство.

- Необходимость: пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на $[a, b)$, т.е. $F(x) = \int_a^{x \in [a, b)} f(t) \cdot dt$. Т.к. всюду существует $\lim_{x \rightarrow b-0} F(x)$, то

$$\forall \varepsilon > 0: \exists x \in [a, b) \mid |F(x) - F(b)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall x \in [c, b)$ (из непрерывности функции). Рассмотрим:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot dx \right| &= \left| \int_a^{\beta} f(x) \cdot dx - \int_a^{\alpha} f(x) \cdot dx \right| = \\ &= |F(\beta) - F(a) - F(\alpha) + F(a)| = |F(\beta) - F(\alpha)| = \\ &= |F(\beta) - F(b) + F(b) - F(\alpha)| \leq |F(\beta) - F(b)| + |F(b) - F(\alpha)| < \\ &< ([\alpha, \beta] \subset [c, b] \Rightarrow \alpha, \beta \in [c, b]) \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

- Достаточность: пусть x_n — пробная последовательность:

$$x_n \rightarrow b, x_n \neq b; \varepsilon > 0,$$

тогда $\exists c: \forall [\alpha, \beta] \subset [c, b): \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \cdot dt \right| < \varepsilon$. Раз уж $x_n \rightarrow b$, стало быть существует номер $M: x_n \in [c, b) - \forall n > M$.

Пусть $i, j > M$, возьмём $x_i = \alpha$, а $x_j = \beta$, т.к. $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \cdot dt \right| = |F(\beta) - F(\alpha)| < \varepsilon - \forall \alpha, \beta \Rightarrow |F(x_i) - F(x_j)| < \varepsilon$. Получается, что $F(x_n)$ — последовательность Коши $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} F(x_n) = Z$, но т.к. x_n — произвольная последовательность, то в силу теоремы Гейна:

$$\exists \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = Z.$$

С другой стороны $Z = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} \int_a^x f(t) \cdot dt \Rightarrow$ интеграл существует.

□

Теорема 1.4.8 (Асимптотический признак существования несобственного интеграла).

▷ Пусть

f — интегрируема на $[a, b)$, $h(x)$ — интегрируема на $[a, b]$, $h(x) \geq 0$.

▷ Тогда

В каждом из следующих 3-х случаев f — интегрируема на $[a, b]$ (т.е. несобственный интеграл сходится)

1. $f(x) =_{x \rightarrow b} O(h(x))$ или
2. $f(x) =_{x \rightarrow b} o(h(x))$ или
3. $f(x) \sim_{x \rightarrow b} h(x)$

▷ Доказательство.

- Пусть $f(x) =_{x \rightarrow b} O(h(x))$, говорят, что при этом: $\exists c \in [a, b)$ такая, что $|f(x)| \leq K \cdot |h(x)| - \forall x \in [c, b), K \in \mathbb{R}$. Т.к. $h(x)$ — интегрируема на $[a, b]$, то

$$\forall \varepsilon > 0: \exists d \in [c, b): \forall [\alpha, \beta] \subset [d, b): \left| \int_{\alpha}^{\beta} h(x) \cdot dx \right| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot dx \right| &\leq (\text{из монотонности интеграла и его свойств}) \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| \cdot dx \leq \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} K \cdot |h(x)| \cdot dx \leq (\text{т.к. } h(x) \text{ — положительная}) K \cdot \int_{\alpha}^{\beta} h(x) \cdot dx \leq \\ &\leq \left| K \cdot \int_{\alpha}^{\beta} h(x) \cdot dx \right| \leq K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0: \exists d: \forall [\alpha, \beta] \subset [d, b): \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot dx \right| < \varepsilon,$$

а в силу критерия Коши для несобственных интегралов получаем, что интеграл сходится.

- Пусть $f(x) =_{x \rightarrow b} o(h(x))$, тогда по свойствам O и o получаем, что $f(x) =_{x \rightarrow b} O(h(x))$.
- Если $f(x) \sim h(x)$, то $f(x) - h(x) = o(h(x))$.
- Запас положительных интегрируемых функций для этой теоремы:

$h(x) = \frac{1}{(x-b)^k}$: если $k < 1$, то $h(x)$ — интегрируема на $[a, b]$ — это следует из определения, т.к.

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x \frac{1}{(t-b)^k} \cdot dt = \lim_{x \rightarrow b} \left(\frac{1}{(x-b)^{k+1}} \cdot \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(a-b)^{k+1}} \cdot \frac{1}{k+1} \right).$$

□

Лемма 1.4.9 (интегральное неравенство Абеля).

▷ Пусть

Дан $\int_a^b u(t) \cdot v(t) dt$, где $u(t) \geq 0$ — дифференцируема на (a, b) , непрерывна, положительна и монотонно убывает на $[a, b]$

(т.е. $u'(x) \leq 0 - \forall x \in (a, b)$; $\sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x v(t) \cdot dt \right| = S \in \mathbb{R}$; v — интегрируема на $[a, b]$).

▷ Тогда

$$\left| \int_a^b u(t) \cdot v(t) \cdot dt \right| \leq u(a) \cdot S \text{ — интегральное неравенство Абеля.}$$

▷ Доказательство.

- Рассмотрим функцию $\tau(x) = \int_a^x v(t) \cdot dt$: в силу того, что v — интегрируема, $\tau(x)$ — является первообразной для v , т.е.

$$\tau'(x) = v(x), \tau(a) = 0$$

.

- Пусть $c \in (a, b)$, рассмотрим

$$\begin{aligned} \left| \int_a^c u(t) \cdot v(t) \cdot dt \right| &= \left| \int_a^c u(t) \cdot \tau'(t) \cdot dt \right| = \\ &= (\text{по частям}) \left| u(t) \cdot \tau(t) \Big|_{t=a}^{t=c} - \int_a^c u'(t) \cdot \tau(t) \cdot dt \right| = \\ &= \left| u(c) \cdot \tau(c) - u(a) \cdot \tau(a) + \int_a^c (-u'(t)) \cdot \tau(t) \cdot dt \right| = \\ &= \left| u(c) \cdot \tau(c) + \int_a^c (-u'(t)) \cdot \tau(t) \cdot dt \right| \leq \\ &\leq |u(c) \cdot \tau(c)| + \left| \int_a^c (-u'(t)) \cdot \tau(t) \cdot dt \right| = \\ &= u(c) \cdot |\tau(c)| + \left| \int_a^c (-u'(t)) \cdot \tau(t) \cdot dt \right| \leq \\ &\leq u(c) \cdot S + \int_a^c |-u'(t)| \cdot |\tau(t)| \cdot dt \leq u(c) \cdot S + S \cdot \int_a^c |-u'(t)| \cdot dt = \\ &= (\text{т.к. } u'(t) < 0) u(c) \cdot S - S \cdot \int_a^c u'(t) \cdot dt = \\ &= S \cdot (u(c) - u(c) + u(a)) = S \cdot u(a). \end{aligned}$$

□

Теорема 1.4.10 (Признак Абеля-Дирихле сходимости несобственного интеграла).

- ▷ Функция $u(x) \cdot v(x)$ — интегрируема на $[a, b]$, если выполнены следующие условия:

1. $u(x) \geq 0$ — непрерывна и дифференцируема на $[a, b]$, причём

$$\lim_{t \rightarrow b} u(t) = 0$$

и $u(x)$ — монотонно убывает.

2. Функция $v(x)$ — интегрируема на $[a, b]$, а её первообразная ограничена на $[a, b]$ (т.е. $\sup_{x \in [a, b]} \int_a^x v(t) \cdot dt \leq S \in \mathbb{R}$ и $\exists \int_a^b v(x) \cdot u(x) \cdot dx$).

▷ Доказательство.

- Пусть $\varepsilon > 0$, $S = \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x v(t) \cdot dt \right|$, т.к. $\lim_{t \rightarrow b-0} u(t) = 0$, то $\exists c \in [a, b] \forall t \in [c, b) : u(t) < \frac{\varepsilon}{2 \cdot S}$
- Пусть $[\alpha, \beta] \subset [c, b)$, рассмотрим

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} u(t) \cdot v(t) \cdot dt \right| &\leq \\ &\leq (\text{неравенство Абеля}) u(\alpha) \cdot \sup_{x \in [\alpha, \beta]} \left| \int_{\alpha}^x v(t) \cdot dt \right| = \\ &= u(\alpha) \cdot \sup_{x \in [\alpha, \beta]} \left| \int_{\alpha}^x v(t) \cdot dt - \int_{\alpha}^{\alpha} v(t) \cdot dt \right| \leq \\ &\leq u(\alpha) \cdot \left(\sup_{x \in [\alpha, \beta]} \left| \int_{\alpha}^x v(t) \cdot dt \right| + \sup_{x \in [\alpha, \beta]} \left| \int_{\alpha}^{\alpha} v(t) \cdot dt \right| \right) \leq \\ &\leq u(\alpha) \cdot (S + S) < \frac{\varepsilon}{2 \cdot S} \cdot 2 \cdot S = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Пример 1.4.10.1 (К теореме).

- ▷ $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot dx$ — интеграл Дирихле, сходится ли? Пусть $v(x) = \sin x$, $u(x) = \frac{1}{x}$ — непрерывна, дифференцируема и положительна, $u'(x) < 0$ (т.е. удовлетворяет всему на $[1, \infty)$). Первообразная $v(x)$:

$$\int_1^x \sin t \cdot dt = -\cos t \Big|_{t=1}^{t=x} = -\cos x + \cos 1,$$

а $|- \cos x + \cos 1| \leq 2 \Rightarrow$ всё выполнено \Rightarrow сходится.

Теорема 1.4.11 (интегральный признак Коши сходимости числового ряда).

▷ Пусть

Дан интервал $[a, \infty]$, где $f(x)$ обладает следующими свойствами:

1. $f(x) \geq 0$ на $[a, \infty)$
2. $f(x)$ — монотонно убывает, причём $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
3. $a_n = f(n)$.

▷ Тогда

Ряд $\sum a_n$ — сходится, если $\exists \int_a^\infty f(x) dx$ и наоборот: если $\int_a^\infty f(x) dx$ не существует, то ряд расходится.

▷ Доказательство.

- Рассмотрим две функции: $u(t) = f(n+1) - \forall t \in [n, n+1)$ и $v(t) = f(x) - \forall t \in [n, n+1)$, тогда $u(t) \leq v(t) - \forall t \in [n, n+1) \Rightarrow \int_a^\alpha u(t) \cdot dt \leq \int_a^\alpha f(t) \cdot dt \leq \int_a^\alpha v(t) \cdot dt$ — из свойств монотонности интеграла.

◦

$$\begin{aligned} \int_a^\alpha u(t) dt &= \sum_{n=a}^{\alpha-1} \int_n^{n+1} u(t) dt = \sum_{n=a}^{\alpha-1} \int_n^{n+1} f(n+1) \cdot dt = \\ &= \sum_{n=a}^{\alpha-1} f(n+1) \cdot \int_n^{n+1} dt = \sum_{n=a}^{\alpha-1} a_{n+1} \Rightarrow \sum_{n=a}^N a_{n+1} \leq \\ &\leq \int_a^N f(t) dt \leq \sum_{n=a}^N a_n \end{aligned}$$

Если ряд $\sum a_n$ — сходится, то интеграл существует.

□

Пример 1.4.11.1 (К теореме).

- ▷ $\int_1^\infty \frac{dx}{x^k} : f(x) = \frac{1}{x^k}$, если $k > 0$, то $f(x)$ — монотонно убывает и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $f(x) > 0$ на $[1, \infty)$.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^k} = \left. \frac{t^{-k+1}}{-k+1} \right|_1^x = \frac{x^{-k+1}}{-k+1} - \frac{1}{-k+1},$$

где $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-k+1}$ — существует.

1.5 Интеграл Римана (то мы изучали интеграл Ньютона)

ОПР 1.5.1 (разбиения и суммы Римана).

Пусть $I = [a, b]$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, причём f — определена во всех точках интервала и $|f(x)| \leq M - \forall x \in [a, b]$ (т.е. ограничена). Разбиением интервала $[a, b]$ называется набор чисел $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b$, обозначим за $\xi = (a, x_1, \dots, x_n, b)$. Будем говорить, что разбиение пунктировано, если указан набор точек $t_i \mid t_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Нормой разбиения ξ называется $\|\xi\| = \max_{\forall i} |x_{i+1} - x_i|$. Для любого пунктированного разбиения ξ определим число $R(f, \xi) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot |x_{i+1} - x_i|$, где $R(f, \xi)$ — называется суммой Римана функции f и разбиения ξ .

ОПР 1.5.2 (Продолжения разбиения).

Разбиение η называется продолжением ξ , если $\forall x_i \in \xi \Rightarrow x_i \in \eta$.

ОПР 1.5.3 (Суммы разбиений).

Пусть даны 2 разбиения ξ, η . Разбиение σ назовём суммой разбиений ξ, η и обозначим $\sigma = \xi \oplus \eta$. Если σ — получается объединением всех точек разбиений ξ, η , а потом их переупорядочением.

Лемма 1.5.4 (О сумме разбиений).

▷ Пусть

Даны два разбиения ξ, η .

▷ Тогда

Разбиение $\xi \oplus \eta$ является продолжением ξ и η .

▷ Доказательство.

◦ ОЧЕВИДНО.

□

ОПР 1.5.5 (R1. интеграл Римана).

Пусть f — определена на $[a, b]$ и ограничена, тогда f — называется интегрируемой по Риману, если

$$\exists L \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0 \mid \forall \xi: \|\xi\| < \delta \Rightarrow |R(f, \xi) - L| < \varepsilon$$

— независимо от пунктирования (!). В этом случае L — называется интегралом Римана функции f на $[a, b]$ и обозначается: $L = R \int_a^b f(x) \cdot dx$.

1.5.5.1 Построение Дарбу

- ▷ Пусть f — определена на $[a, b]$ и ограничена, тогда существуют m и M такие, что $m \leq f(x) \leq M - \forall x \in [a, b]$, где $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

Пусть ξ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$, тогда возьмём

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x)\}, M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x)\}, \Delta_k = |x_k - x_{k-1}|,$$

тогда $S_\xi = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta_k$, где n — количество отрезков разбиения, называется *верхней интегральной суммой*, а $s_\xi = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta_k$ — соответственно нижней.

1.5.5.2 Факт

▷

$$\forall k: m \leq m_k \leq M_k \leq M_{(\text{по определению})} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta_k \leq M \cdot \sum_{k=1}^n \Delta_k = M \cdot (b - a),$$

т.е. $\forall \xi: S_\xi \leq M \cdot (b - a)$, аналогично:

$$\sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta_k \geq m \cdot \sum_{k=1}^n \Delta_k = m \cdot (b - a), \forall \xi: s_\xi \geq m \cdot (b - a) \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall \xi: m \cdot (b - a) \leq s_\xi \leq S_\xi \leq M \cdot (b - a).$$

ОПР 1.5.5.3 (Верхнего и нижнего интеграла).

Обозначим через $\bar{J} = \inf S_\xi$, где \inf берётся по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$. \bar{J} — называется *верхним интегралом* и обозначается: $\bar{J} = \int_a^b f(x) \cdot dx$. Аналогично для *нижнего*: $\underline{J} = \sup s_\xi$ и обозначается как $\underline{J} = \int_a^b f(x) \cdot dx$.

ОПР 1.5.6 (R2. Интегрируемость по Риману).

Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — ограничена, тогда f — называется *интегрируемой по Риману*, если \bar{J} совпадает с \underline{J} , в этом случае $J = \bar{J} = \underline{J}$ — называется *интегралом Римана* и обозначается: $J = \int_a^b f(x) \cdot dx$.

1.5.7 Теорема Дарбу

ОПР 1.5.7.1 (продолжения разбиения).

Разбиение ξ_1 — называется *продолжением разбиения* ξ_2 , если все точки разбиения ξ_2 содержатся в разбиении ξ_1 .

ОПР 1.5.7.2 (суммы разбиений).

Пусть ξ_1 и ξ_2 — пара разбиений, через $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$ назовём разбиение, которое содержит точки разбиения ξ_1 и точки разбиения ξ_2 . В этом случае называется суммой разбиения.

Лемма 1.5.7.3 (Лемма 1).

▷ Пусть

ξ_1 — продолжение разбиения ξ_2 .

▷ Тогда

$$S_{\xi_1} \leq S_{\xi_2}, \text{ а } s_{\xi_1} \geq s_{\xi_2}.$$

▷ Доказательство.

- Рассмотрим разбиение ξ_2 : $S_{\xi_2} = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta_k$. Т.к. ξ_1 — продолжение разбиения ξ_2 , то в интервале $[x_{k-1}, x_k]$ есть S точек из ξ_1 . Тогда для разбиения ξ_1 на $[x_{k-1}, x_k]$ имеем:

$$\sum_{j=1}^S M_{k_j} \cdot \Delta_{k_j} \leq \sum_{j=1}^S M_k \cdot \Delta_{k_j} = M_k \cdot \sum_{j=1}^S \Delta_{k_j} = M_k \cdot \Delta_k \Rightarrow$$

суммируя ещё и по k получится, что $S_{\xi_1} \leq S_{\xi_2}$

- Аналогично. $s_{\xi_1} \geq s_{\xi_2}$.

□

Лемма 1.5.7.4 (Лемма 2).

- ▷ Для любой пары разбиений ξ_1 и ξ_2 имеет место: $S_{\xi_1} \geq s_{\xi_2}$

▷ Доказательство.

- Пусть выполнено условие, рассмотрим: $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$ по построению — ξ является продолжением ξ_1 и ξ_2 одновременно, тогда в силу Леммы 1.5.7.3 получаем, что $S_\xi \leq S_{\xi_1}$ и $s_\xi \geq s_{\xi_2}$. Но из факта 1.5.5.2 известно, что $s_\xi \leq S_\xi \Rightarrow s_{\xi_2} \leq s_\xi \leq S_\xi \leq S_{\xi_1}$.

□

Лемма 1.5.7.5 (Лемма 3).

- ▷ Если f — ограниченная функция, то $\underline{J} \leq \bar{J}$.
- ▷ Доказательство.
 - Т.к. для любых разбиений ξ_1 и ξ_2 : $s_{\xi_1} \leq S_{\xi_2}$, в силу Леммы 2 1.5.7.4. Возьмём \sup по всем ξ_1 , получим, что $\underline{J} \leq S_{\xi_2}$; а если взять \sup по всем ξ_2 , то в общем: $\underline{J} \leq \bar{J}$.

□

Лемма 1.5.7.6 (Лемма 4).

- ▷ $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0 \forall$ разбиения $\xi \|\xi\| < \delta: S_\xi \leq \bar{J} + \varepsilon$, а $s_\xi \geq \underline{J} - \varepsilon$
- ▷ Доказательство.
 - Будем считать, что $f(x) \geq 0$, если не так, то в силу ограниченности функции можно найти $A \mid f(x) + A \geq 0$.
 - По определению точной нижней грани — существует разбиение ξ_0 такое, что $S_{\xi_0} \leq \bar{J} + \frac{\varepsilon}{2}$ (из теоремы о существовании точной верхней грани). Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — точки разбиения ξ_0 ; $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$; $\lambda = \frac{\varepsilon}{4 \cdot n \cdot M}$; ξ — такое разбиение, что $\|\xi\| < \lambda$. Отрезки из разбиения ξ разобьём на два класса: к первому классу относятся отрезки, которые целиком попадают в отрезок $[x_k - \lambda, x_k + \lambda]$, тогда $S_\xi = S_\xi^I + S_\xi^{II}$ — из положительности функции, тогда $S_\xi^I \leq \sum_k M_k \cdot \Delta_k \leq M \cdot \sum_k \Delta_k \leq M \cdot \sum_k \frac{2 \cdot \varepsilon}{4 \cdot M \cdot n} \leq \frac{2 \cdot \varepsilon \cdot M}{4 \cdot M \cdot n} \cdot \sum_{k=1}^n 1 = \frac{n \cdot 2 \cdot \varepsilon \cdot M}{4 \cdot M \cdot n} = \frac{\varepsilon}{2}$, очевидно $S_\xi^{II} \leq S_{\xi_0} \Rightarrow S_\xi \leq \bar{J} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \bar{J} + \varepsilon$

□

Теорема 1.5.7.7 (Теорема Дарбу).

- ▷ Пусть
 f — ограничена и $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.
- ▷ Тогда
определения $R1$ и $R2$ — эквивалентны.
- ▷ Доказательство.
 - $R2 \rightarrow R1$: Пусть f — интегрируема на $[a, b]$ в смысле $R2$; ξ — разбиение. Надо доказать, что $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0 \mid \|\xi\| < \delta \Rightarrow |R(f, \xi) - L| < \varepsilon$; $|\sum_k f(t_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) - L| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < \sum_k f(t_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) < L + \varepsilon$. Заметим, что $\forall t_k \in [x_{k-1}, x_k]: m_k \leq f(t_k) \leq M_k$, следовательно

$\sum_k m_k \cdot \Delta x \leq \sum_k f(t_k) \cdot \Delta x \leq \sum_k M_k \cdot \Delta x$, где $\Delta x = x_k - x_{k-1}$. Из Леммы 4 1.5.7.6 следует $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0 \mid \|\xi\| < \delta: \underline{J} - \varepsilon \leq s_\xi \leq S_\xi \leq \bar{J} + \varepsilon$. Т.к. f — интегрируема согласно $R2$, то $\bar{J} = \underline{J}$. Получаем, что $\forall \varepsilon > 0: |\sum_k f(t_k) \cdot \Delta x - J| < \varepsilon$, значит функция интегрируема в смысле $R1$.

- $R1 \rightarrow R2$: Выпишем условие интегрируемости по Риману $R1$:

$$\forall \xi \|\xi\| < \delta: \left| \sum_k f(t_k) \cdot \Delta x - L \right| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < \sum_k f(t_k) \cdot \Delta x < L + \varepsilon. \sum_k m_k \cdot \Delta x \leq \sum_k f(t_k) \cdot \Delta x \leq \sum_k M_k \cdot \Delta x;$$

отсюда следует: $\sum_k f(t_k) \cdot \Delta x \leq L + \varepsilon$, $\sum_k M_k \cdot \Delta x \leq L + \varepsilon$; $S_\xi \leq L + \varepsilon$; $\sum_k m_k \cdot \Delta x \geq L - \varepsilon$; $\Rightarrow \forall \xi \|\xi\| < \delta: L - \varepsilon \leq s_\xi \leq S_\xi \leq L + \varepsilon \Rightarrow f$ — интегрируема, согласно $R2$.

□

Теорема 1.5.8 (Интегрируемость непрерывных функций).

- ▷ Пусть
 f — непрерывна на $[a, b]$.
- ▷ Тогда
 f — интегрируема по Риману и интеграл по Риману совпадает с интегралом по Ньютону.
- ▷ Доказательство.
 - Так как f — непрерывна на $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на $[a, b]$, значит $\exists w(t)$ — модуль непрерывности. Пусть ξ — разбиение $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$;

$$r(\xi) = \int_a^b f(x) dx - R(f, \xi) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(t_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \sum_k f(t_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_k \left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - f(t_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \right] = \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(t_k)) dx,$$

где $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

о Т.к. $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $f(x) - f(t_k) \leq w(\|\xi\|)$, следует

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(t_k)) \, dx \right| &\leq w(\|\xi\|) \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot |r(\xi)| \leq \\ &\leq \sum_k w(\|\xi\|) \cdot (x_k - x_{k-1}) = w(\|\xi\|) \cdot \sum_k (x_k - x_{k-1}) = \\ &= w(\|xi\|) \cdot (b - a); \end{aligned}$$

т.к. $w(\|\xi\|) \rightarrow 0$, при $\|\xi\| \rightarrow 0$, то $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0 \mid w(\|\xi\|) \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)} \cdot \|\xi\| < \delta \Rightarrow r(\xi) < \varepsilon$, значит функция — интегрируема.

□

Глава 2

Функциональные ряды и последовательности

ОПР 2.1 (числовой последовательности).

Пусть $\varphi_n(x)$ — набор функций, зависящих от набора n . Когда задан набор функций, считается, что существует множество $A \subseteq \mathbb{R} (A \neq \emptyset)$ такое, что $\varphi_n(x)$ определены на $A \forall n \in \mathbb{N}$.

В этом случае $\varphi_n(x)$ называется последовательностью функций.

Аналогично, выражение $\sum_{n=a}^{\infty} \varphi_n(x)$ называется рядом функции.

Пусть $x_0 \in A$, тогда всякой последовательности функций можно сопоставить числовую последовательность $a_n = \varphi(x_0)$.

ОПР 2.2 (точки сходимости).

Точка $x_0 \in A$ называется точкой сходимости функциональной последовательности $\varphi_n(x)$, если числовая последовательность $\varphi_n(x_0)$ сходится.

ОПР 2.3 (области сходимости).

$\Omega \subseteq A$ называется областью сходимости последовательности $\varphi_n(x)$ если $\forall x_0 \in \Omega x_0$ — точка сходимости.

Пример 2.3.1 (области сходимости).

▷ $f(x) = x^n$; $x_0 = \frac{1}{3} \rightarrow (\frac{1}{3})^n$ — сходится. $S = (-1, 1]$ и $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

ОПР 2.4 (точки сходимости ряда).

Точка x_0 называется точкой сходимости ряда $\sum \varphi_n(x)$ если ряд $\sum \varphi_n(x_0)$ — сходится.

ОПР 2.5 (области сходимости ряда).

$\Omega \subseteq A$ называется областью сходимости ряда $\sum \varphi_n(x)$ если $\forall x_0 \in A x_0$ — точка сходимости.

ОПР 2.6 (области сходимости ряда).

$\Omega \subseteq A$ называется областью сходимости ряда $\sum \varphi_n(x)$ если $\forall x_0 \in A x_0$ — точка сходимости.

ОПР 2.7 (поточечной сходимости).

Пусть $f_n(x)$ — последовательность функций, Ω — область сходимости, $A \subseteq \Omega$, тогда $\forall x \in A f_n(x)$ — сходится поточечно, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ — поточечный предел.

Для рядов:

Пусть дан ряд $\sum_{n=a}^{\infty} f_n(x)$, $S_n(x)$. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=a}^{\infty} f_n(x)$ ряд сходится поточечно если последовательность частичных сумм сходится поточечно.

Пример 2.7.1 (Порядок взятия предела).

▷ Рассмотрим $S_{mn} = \frac{m}{m+n}$: чем отличается

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} S_{mn} \right),$$

от

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_{mn} \right)?$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{mn} = 1 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} 1 = 1; \text{ а } \lim_{m \rightarrow \infty} S_{mn} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 0;$$

Пример 2.7.2 (Непрерывность функционального ряда).

▷ Пусть $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, рассмотрим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n = f(x)$$

— сходится в любой точке x , кроме 0, $f(0) = 0$. Пусть $x \neq 0$, тогда $S_n(x) = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n = x^2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{1+x^2}}$; $S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2 \cdot (1+x^2)}{x^2} = 1 + x^2 = f(x) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ 1 + x^2, & x \neq 0. \end{cases}$ — не непрерывна.

Пример 2.7.3 (Сходимость производных).

▷ Рассмотрим $f_n(x) = \frac{\sin(n \cdot x)}{\sqrt{n}}$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $f'(x) = 0$; $f'_n(x) = \sqrt{n} \cdot \cos(n \cdot x) \Rightarrow f_n(x) \not\rightarrow f'(x)$.

Пример 2.7.4 (Интегрируемость $f(x)$).

▷ Пусть $[a, b] = [0, 1]$, $f_n(x) = n^2 x \cdot (1 - x^2)^n$ — по Риману интегрируема
 $\Rightarrow f_n(x) \rightarrow 0$ на $[0, 1]$, $f_n(x) \rightarrow f(x) \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 0$;

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= n^2 \cdot \int_0^1 x \cdot (1 - x^2)^n dx = -\frac{n^2}{2} \cdot \int_0^1 (1 - x^2)^n d(1 - x^2) = \\ &= -\frac{n^2}{2} \cdot \frac{(1 + x^2)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{n^2}{2 \cdot (n+1)}, \end{aligned}$$

но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2 \cdot (n+1)} = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 f_n(x) dx \right) \neq \int_0^1 f(x) dx.$$

▷ $f_n(x) = nx \cdot (1 - x^2)$, $f_n(x) \rightarrow 0$, $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{n}{2 \cdot (n+1)}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2 \cdot (n+1)} = \frac{1}{2}$.

2.8 Равномерная непрерывность

ОПР 2.8.1 (равномерно сходящейся последовательность функций).

Последовательность функций $f_n(x)$ — называется равномерно сходящейся на множестве $A \subseteq \mathbb{R}$ к функции $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0: \exists M \mid \forall n > m, \forall x \in A: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Обозначение 2.8.2

▷ $f_n(x)$ — сходятся равномерно к $f(x)$: $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, $x \in A$.

ОПР 2.8.3 (равномерно сходящийся функциональный ряд).

Функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ — равномерно сходится на A , если его последовательность частичных сумм — сходится.

Теорема 2.8.4 (Критерий Коши о равномерной сходимости).

▷ Последовательность $f_n(x)$ — равномерно сходится на множестве $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \mid \exists M \in \mathbb{N} \mid \forall n, m > M \quad \forall x \in A \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

▷ Доказательство.

◦ (\Rightarrow): Пусть $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на A , тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists M \mid \forall n > M \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in A$. Т.к. $n, m > M$ рассмотрим $|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| <_{(m > M)} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall x \in A$. Что и является критерием Коши.

◦ (\Leftarrow): Пусть $f_n(x)$ удовлетворяет критерию Коши, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \mid \forall n, m > M \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

При всяком фиксированном x , $f_n(x)$ — последовательность Коши \Rightarrow она сходится $\Rightarrow f(x)$ определена $\Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in A$.

С другой стороны, $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$. Зафиксируем n и в этом неравенстве перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A.$$

А это означает, что $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ по определению.

□

Теорема 2.8.5 (Необходимый признак Вейерштрасса равномерной сходимости).

▷ Пусть

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ на } A, \quad M_n = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|;$$

▷ Тогда

$$f_n(x) \Rightarrow f(x) \text{ на } A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0.$$

▷ Доказательство.

◦ (\Rightarrow): Очевидно из определения равномерной сходимости 2.8.1 на стр. 45: $\forall \varepsilon > 0: \exists M \mid \forall n > M: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon - \forall x \in A$, тогда $M_n = \sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$.

◦ (\Leftarrow):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon: \exists M \mid \forall n > M: |M_n| < \varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

□

Пример 2.8.5.1 (К теореме).

▷ Рассмотрим $f_n(x) = x^n$, $A = (0, 1)$, $f_n(x) \rightarrow 0$ на $(0, 1)$:

$$M_n = \sup_{x \in S} |x^n - 0| = \sup_{x \in S} x^n = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 1 \Rightarrow$$

равномерно не сходится, а на $(0, \frac{1}{2}) - M_n = \sup_{x \in (0, \frac{1}{2})} x^n = \frac{1}{2^n}$ — равномерная сходимость.

Теорема 2.8.6 (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости для рядов).

▷ Пусть

$f_n(x)$ — последовательность функций на A $|f_n(x)| \leq M_n \forall x \in A, \forall n$.

▷ Тогда

если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на A .

▷ Доказательство.

Это следует из признака Вейерштрасса для частичных сумм ряда.

□

Теорема 2.8.7 (О предельном переходе в последовательностях).

▷ Пусть

$f_n(x)$ — сходится на $E \subset \mathbb{R}$ к $f(x)$ ($f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на E). Пусть t — предельная точка множества E . предположим, что $\lim_{x \rightarrow t} f_n(x) = A_n \forall n$.

▷ Тогда

1. последовательность A_n сходится;

2. $\lim_{x \rightarrow t} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$

т.е. $\lim_{x \rightarrow t} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow t} f_n(x))$.

▷ Доказательство.

◦ Пусть $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости $\exists M \forall n, m > M, \forall x \in E: |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Перейдем к пределу $x \rightarrow t$ в неравенстве. Получим: $|A_n - A_m| \leq \varepsilon \Rightarrow A_n$ — последовательность Коши A_n сходится $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$

◦ Рассмотрим:

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &\leq |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - A_n + A_n - A| \leq \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|. \end{aligned}$$

За счет равномерной сходимости $\forall x \in A$:

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

За счет существования $\lim_{x \rightarrow t} f(x) = A_n$:

$$|f(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, то:

$$|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow t} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow t} f_n(x) \right).$$

Если x принадлежит окрестности t , то:

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim_{x \rightarrow t} f(x) = A$.

□

Следствие 2.8.8 (Теорема о непрерывности предельной точки).

▷ Если $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на $E \subset \mathbb{R}$ и $f_n(x)$ — непрерывна на E , то $f(x)$ — непрерывна на E .

▷ Доказательство.

◦ Если $f_n(x)$ непрерывна в точке $t \forall n$, то $\exists \lim_{x \rightarrow t} f_n(x) = A_n \forall n$. Следовательно, по теореме о предельном переходе:

$$\lim_{x \rightarrow t} f(x) = \lim_{x \rightarrow t} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow t} f_n(x) \right)$$

□

Следствие 2.8.8.1.

Если функциональный ряд $f_n(x)$ ($f_n(x)$ — непрерывна) сходится равномерно на множестве $E \subset \mathbb{R}$, то $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ определена и $S(x)$ непрерывна на E .

Пример 2.8.8.2 (Не непрерывной, сходящейся неравномерно функции).

▷ $[0, 1], x^n, f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$ — не непрерывная, сходимость — неравномерная.

Теорема 2.8.9 (о равномерной сходимости и интегрируемости по Риману).

▷ Пусть

$f_n(x)$ — последовательность функций, интегрируемых по Риману на $[a, b]$. Предположим, что $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на $[a, b]$.

▷ Тогда

1. $f(x)$ — интегрируема на $[a, b]$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right) = \int_a^b (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx = \int_a^b f(x) dx$.

▷ Доказательство.

- Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем η $\eta \cdot |b - a| < \frac{\varepsilon}{3}$. Из равномерной сходимости следует, что $\exists M \forall n > M$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \eta \quad \forall x \in [a, b]. \quad (*)$$

Пусть $n > M$, ξ — некоторое разбиение. По теореме Дарбу из того, что f_n — интегрируема по Риману, следует, что $S(\xi, f_n) - s(\xi, f_n) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Из (*) следует, что $f_n(x) - \eta \leq f(x) \leq f_n(x) + \eta$.

$$S(\xi, f) \leq S(\xi, f_n) + S(\xi, \eta) \leq S(\xi, f_n) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Аналогично:

$$s(\xi, f) \geq s(\xi, f_n) - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда:

$$S(\xi, f) - s(\xi, f) \leq S(\xi, f_n) - s(\xi, f_n) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Следовательно, f — интегрируема по Риману.

- Т.к. функция интегрируема по Риману, то:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| &\leq \left| \int_a^b (f(x) - f_n(x)) dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq \text{из } (*) \leq \int_a^b \eta dx = |b - a| \cdot \eta \\ &\forall \varepsilon \exists N \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| < \varepsilon. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx &= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

□

Замечание 2.8.9.1 (Условие, что отрезок $[a, b]$ ограничен — по существу!).

Рассмотрим $f_n(x) = \frac{n}{x^2 + n^2}$ — определены на $(-\infty, +\infty)$, $f_n(x) \rightarrow 0$ (поточечно).

Докажем, что $f_n(x) \Rightarrow 0$.

$$M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{n}{x^2 + n^2} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_n(x) \Rightarrow 0$ на всем \mathbb{R} по теореме Вейерштрассе

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dx = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{x^2 + n^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\arctan \frac{x}{n})' dx = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \frac{x}{n} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan \frac{x}{n} &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

Получаем контрпример, т.е.:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \pi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \pi = \pi.$$

Теорема 2.8.10 (Равномерная сходимость и дифференцируемость).

▷ Пусть

$f_n(x)$ — последовательность дифференцируемых на $[a, b]$ функций такая, что \exists точка $x_0 \in (a, b)$ $f_n(x_0)$ — сходится. Если последовательность $f'_n(x)$ — сходится равномерно на $[a, b]$, то:

▷ Тогда

1. $f_n(x)$ — сходится равномерно на $[a, b]$ к $f(x)$;
2. $f'(x)$ существует на $[a, b]$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x) = (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))'$.

▷ Доказательство.

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $N \mid \forall n, m > N \mid f_n(x_0) - f_m(x_0) \mid < \frac{\varepsilon}{2}$. Это возможно, т.к. $f_n(x_0)$ — сходится, а значит $f_n(x_0)$ — последовательность Коши.

$\forall t \in [a, b]$ можно выбрать $N_1 \mid \forall m, n > N_1 \mid f'_m(t) - f'_n(t) \mid < \frac{\varepsilon}{2|b-a|}$,

т.к. $f_n(x), f_m(x)$ — сходятся равномерно.

Рассмотрим $f_m(x) - f_n(x)$. Очевидно, что эта функция дифференцируема на $[a, b]$.

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x) - (f_m(t) - f_n(t))| &\leq \\ |x - t|(f'_m(\theta) - f'_n(\theta))_{\theta \in [a, b]} &\leq \text{из формулы Лагранжа} \leq \\ |x - t| \frac{\varepsilon}{2|b-a|} &\leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{т.к. } |x - t| \leq |b - a| \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

○

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq \\ |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0)) + (f_n(x_0) - f_m(x_0))| &\leq \\ |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $|f_n(x) - f_m(x)|$ — удовлетворяют критерию Коши для равномерной сходимости $\Rightarrow f_n(x) \Rightarrow f(x)$.

○ Пусть $x \in [a, b]$. Рассмотрим $\varphi_n(t) = \frac{f_n(x) - f_n(t)}{x - t}$, определенную на $[a, b] \setminus \{x\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \frac{1}{x - t} \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(t)) = \frac{1}{x - t} (f(x) - f(t))$$

(т.к. пределы сущ-ют из 1-го утв-ия)

$$\lim_{t \rightarrow x} \varphi_n(t) \lim_{t \rightarrow x} \frac{f_n(x) - f_n(t)}{x - t} = f'_n(x)$$

(следует из дифф-ти $f_n(x)$ в точке x)

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| &\leq |x - t| \frac{\varepsilon}{2|b-a|} \\ &\quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{(согласно (2.8.1))}} \\ \Rightarrow \left| \frac{\varphi_n(t) - \varphi_m(t)}{x - t} \right| &\leq \frac{\varepsilon}{2|b-a|} \quad \forall x \in [b-a] \setminus \{x\} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в неравенстве можно перейти к пределу $t \rightarrow x$ (по теореме о предельном переходе 2.8.7.

□

Теорема 2.8.11 (Вейерштрасса о равномерном приближении).

▷ Пусть

Функция $f(x)$ — непрерывна на $[a, b]$.

▷ Тогда

Существует такая последовательность полиномов $P_n(x)$, что $P_n(x) \Rightarrow f(x)$ на $[a, b]$, при $n \rightarrow \infty$. Это означает $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$.

▷ Доказательство.

○ Упростим:

✓ Вместо $[a, b]$ рассмотрим отрезок $[0, 1]$ т.к. $y = k \cdot x + b$ и при такой замене многочлен перейдет в многочлен.

✓ $f(0) = 0, f(1) = 0, g(x) = f(x) - f(0) - x \cdot (f(1) - f(0))$. Т.о., $g(0) = 0, g(1) = 0$.

Таким образом: $f(x)$ — непрерывна на $[0, 1], f(0) = f(1) = 0$,

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

Значит, $f(x)$ — определена на $\mathbb{R}, f(x)$ — непрерывна на $\mathbb{R}, f(x)$ — равномерно непрерывна на $[0, 1]$ по теореме Кантора $\Rightarrow f(x)$ — равномерно непрерывна на \mathbb{R} .

○ Введём $Q_n(x) = C_n(x) \cdot (1 - x^2)^n$ и потребуем, чтобы удовлетворяла следующим условиям: равна нулю для $|x| > 1, C_n \cdot (1 - x^2)^n - |x| < 1$ и $\int_{-1}^1 Q_n(t) dt = 1 \Rightarrow C_n = \frac{1}{\int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx}, Q_n$ — „шапочка“ или „Дельта последовательность“.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx &= 2 \cdot \int_0^1 (1 - x^2)^n dx \geq 2 \cdot \int_0^{1/\sqrt{n}} (1 - x^2)^n dx \geq \\ &\geq (\text{неравенство Бернулли}) 2 \cdot \int_0^{1/\sqrt{n}} (1 - n \cdot x^2) dx = 2 \cdot \left(x - \frac{nx^3}{3} \right) \Big|_0^{1/\sqrt{n}} = 2 \cdot \\ &\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{3 \cdot \sqrt{n}} \right) \cdot \frac{4}{3 \cdot \sqrt{n}} \Rightarrow C_n < \sqrt{n}. \end{aligned}$$

○ Пусть $\sigma > 0$ — произвольно, тогда:

$$0 \leq Q_n(x) \leq \sqrt{n} \cdot (1 - \delta^2)^n - \forall x \mid \delta < |x| \leq 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} \cdot (1 - \delta^2)^n) = 0 \Rightarrow (\text{Теорема Вейерштрасса 2.8.5}) Q_n(x) \Rightarrow 0$$

на интервале $[-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$, т.к. $(1 - \delta^2)^n \rightarrow 0$.

- $P_n(x) = \int_{-1}^1 f(x+t) \cdot Q_n(t) dt$ — нужный многочлен. Докажем, что это вообще-то многочлен: рассмотрим $f(x+t)$: если $(x+t) > 1$, то $f(x+t) = 0$; а если $(x+t) < 0$, то $f(x+t) = 0 \Rightarrow t \in [-x, 1-x] \Rightarrow P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t) \cdot Q_n(t) dt =_{(x+t=u)} \int_0^1 f(u) \cdot Q_n(u-x) du$. Заметим:

$$\begin{aligned} Q_n(u-x) &= C_n \cdot (1-(u-x)^2)^n = C_n \cdot \sum_{\ell} (C_n^{\ell} \cdot (u-x)^{2\ell} \cdot (-1)^{\ell}) = \\ &= C_n \cdot \sum_k (x^k \cdot \phi_k(u)), \end{aligned}$$

где $\phi_k(u)$ — многочлен по u , следовательно:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(u) \cdot Q_n(u-x) du &= \int_0^1 f(u) \cdot \sum_k \phi_k(u) du = \\ &= \sum_k x^k \cdot \int_0^1 f(u) \cdot \phi_k(u) du = \sum_k \alpha_k \cdot x^k = P_n(x) \Rightarrow P_n(x) \end{aligned}$$

— многочлен.

- $P_n(x) \Rightarrow f(x)$: пусть $\varepsilon > 0$, тогда существует $\delta > 0$ такая, что из $|x-y| < \delta$ следует, что $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} - \forall x, y \in \mathbb{R}$ — из равномерной непрерывности $f(x)$. Введём $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ — в силу теоремы Вейерштрасса о максимуме/минимуме: $M < \infty$.

Вычислим:

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^1 f(x+t) \cdot Q_n(t) dt - f(x) \cdot \int_{-1}^1 Q_n(t) dt \right| = \\ &= \left| \int_{-1}^1 (f(x+t) - f(x)) \cdot Q_n(t) dt \right| = \\ &= \left| \int_{-1}^{-\delta} (\dots) dt + \int_{-\delta}^{\delta} (\dots) dt + \int_{\delta}^1 (\dots) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{-1}^{-\delta} (\dots) dt \right| + \left| \int_{-\delta}^{\delta} (\dots) dt \right| + \left| \int_{\delta}^1 (\dots) dt \right| \leq \\ &\leq \underbrace{\int_{-1}^{-\delta} |\dots| dt + \int_{-\delta}^{\delta} |\dots| dt + \int_{\delta}^1 |f(x+t) - f(x)| \cdot Q_n(t) dt}_{\leq 2M \cdot \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t) dt + 2M \cdot \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t) dt + 2M \cdot \int_{\delta}^1 Q_n(t) dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \int_{-1}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)| \cdot Q_n(t) dt &\leq 2M \cdot \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t) dt \leq 2M \cdot \\ &\cdot \int_{-1}^{-\delta} -\delta \sqrt{n} \cdot (1-\delta^2)^n dt = 2M \cdot \sqrt{n} \cdot (1-\delta^2)^n \cdot \int_{-1}^{-\delta} dt \leq 2M \cdot \sqrt{n} \cdot \\ &\cdot (1-\delta^2)^n \end{aligned}$$

✓

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| \cdot Q_n(t) dt &\leq \\ &\leq (\text{в силу непрерывности}) \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_{-1}^1 Q_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |P_n(x) - f(x)| &\leq 2 \cdot (2M \cdot \sqrt{n} \cdot (1-\delta^2)^n) + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ а т.к. } 4M \cdot \sqrt{n} \cdot (1-\delta^2)^n \rightarrow 0, \\ \text{при } n \rightarrow \infty, \text{ то } \exists M \forall n > M: 4M \cdot \sqrt{n} \cdot (1-\delta^2)^n &< \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |P_n(x) - f(x)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists M \forall n > M \text{ и } \forall x \in \mathbb{R}: |P_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \\ &\Rightarrow P_n(x) \Rightarrow f(x). \end{aligned}$$

□

2.9 Степенные ряды

ОПР 2.9.1 (степенного ряда).

Пусть дан ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$, где $\varphi_k(x) = a_k x^k$. В этом случае ряд называется степенным и записывается: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Замечание 2.9.1.1.

У степенного ряда всегда есть точка сходимости. Это точка $x = 0$.

ОПР 2.9.2 (степенного ряда центрирования).

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ называется степенным рядом центрирования в точке x_0 .

Лемма 2.9.3 (Первая лемма Абеля о степенных рядах).

▷ Если степенной ряд $\sum \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot x^n$ сходится в точке $x_0 \neq 0$, то $\forall x$ $|x| < |x_0|$ — ряд сходится абсолютно.

▷ Доказательство.

○ Пусть x_0 — точка сходимости ряда. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x_0^n$ — сходится, тогда в силу необходимого признака сходимости: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot x_0^n = 0 \Rightarrow$ последовательность $\{a_n \cdot x_0^n\}$ — ограничена (из теоремы о том, что любая сходящаяся последовательность ограничена)

$$\Rightarrow \exists M \forall n: |a_n \cdot x_0^n| \leq M.$$

- Рассмотрим ряд $\sum_n a_n x^n = \sum_n a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$. Проверяем на абсолютную сходимость:

$$\begin{aligned}\sum_n |a_n x^n| &= \sum_n |a_n| \cdot |x|^n = \sum_n |a_n| \cdot |x_0|^n \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \\ |a_n| \cdot |x_0|^n \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n &\leq M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \\ \left|\frac{x}{x_0}\right| &= q\end{aligned}$$

Т.к. $|x| < |x_0| \Rightarrow q < 1 \Rightarrow$ ряд $\sum_n M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = M \sum_n \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = M \sum_n q^n$ — сходится как геометрическая прогрессия, т.к. $q < 1$.

Следовательно, по теореме Вейерштрасса ряд $\sum_n a_n x^n$ сходится абсолютно.

□

Следствие 2.9.4 (Расходимость ряда).

- ▷ Пусть в точке $x_0 \neq 0$ ряд $\sum_n a_n x_0^n$ расходится, тогда $\forall x \mid |x| > |x_0|$ ряд расходится.
- ▷ Доказательство.

От противного: если сходится, то сходится и в x_0 .

□

Следствие 2.9.5 (Структура области сходимости).

- ▷ Для любого степенного ряда : $\exists R \geq 0 \mid \forall x: |x| < R$ — ряд сходится абсолютно; $\forall x \mid |x| > R$ — расходится, а если $|x| = R$ — всё, что угодно.

Если $R = 0$, то ряд сходится только в точке x_0 , а если $R = \infty$, то ряд сходится всюду. R — *радиус сходимости ряда*.

Что происходит в $-R$ и R требует дополнительного исследования.

Теорема 2.9.6 (О радиусе сходимости).

- ▷ Пусть
Дан ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$.
- ▷ Тогда
$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$
- ▷ Доказательство.

- Зафиксируем $x_0 \neq 0$ — произвольно из \mathbb{R} . Рассмотрим $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x_0^n$, применим признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} \cdot x_0^{n+1}|}{|a_n \cdot x_0^n|} = |x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{x_0}{R} \quad (R \neq 0).$$

$\frac{|x_0|}{R} < 1 \Rightarrow |x_0| < R$ — ряд сходится.

$\frac{|x_0|}{R} < 1 \Rightarrow |x_0| < R$ — ряд расходится.

Если $R = 0$, то ряд расходится $\forall |x_0| \neq 0$.

□

Теорема 2.9.7 (О радиусе сходимости).

- ▷ Пусть
Дан ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$.
- ▷ Тогда
$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$
- ▷ Доказательство.
 - То же самое, о вместо Даламбера — радикальный признак Коши.

□

Лемма 2.9.8 (Вторая лемма Абеля).

- ▷ Пусть
Замкнутый интервал $[\alpha, \beta] \in (-R, R)$.
- ▷ Тогда
Степенной ряд $\sum_n a_n x^n$ сходится равномерно на $[\alpha, \beta]$.
- ▷ Доказательство.
 - Пусть $\gamma = \max(|\alpha|, |\beta|)$. Ясно, что $0 < \gamma < R$.
По первой лемме Абеля 2.9.3 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma^n$ — сходится. Если $|x| < \gamma$, то $|a_n x^n| < a_n \gamma^n$.
Поскольку ряд $\sum a_n \gamma^n$ сходится, то по теореме Вейерштрасса о равномерной сходимости рядов, ряд $\sum_n a_n x^n$ сходится равномерно на интервале $|x| \leq \gamma$.
Поскольку интервал $[\alpha, \beta] \subset [-\gamma, \gamma] \Rightarrow$ ряд $\sum_n a_n x^n$ сходится равномерно на $[\alpha, \beta]$.



Следствие 2.9.9 (О непрерывности степенного ряда).

▷ Пусть

$$S(x) = \sum_n a_n x^n, \quad R > 0.$$

▷ Тогда

$$\forall x \in (-R, R) \quad S(x) \text{ — непрерывна.}$$

▷ Доказательство.

- Пусть $x \in (-R, R)$, тогда из свойств вещественных чисел следует, что $\exists[\alpha, \beta] \quad [\alpha, \beta] \subset (-R, R)$.

По второй лемме Абеля 2.9.8 степенной ряд сходится на $[\alpha, \beta]$ — равномерно.

По теореме о равномерной сходимости функциональных рядов следует, что $S(x)$ — непрерывна на $[\alpha, \beta]$.

Т.к. $x \in [\alpha, \beta]$, то $S(x)$ — непрерывна.



Теорема 2.9.10 (Об интегрируемости степенного ряда).

▷ Пусть

$$S(x) = \sum_n a_n x^n, \quad R > 0. \text{ Пусть } [\alpha, \beta] \subset (-R, R).$$

▷ Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_n a_n x^n dx = \sum_n a_n \int_{\alpha}^{\beta} x^n dx = \sum_n a_n \cdot \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{n+1}.$$

▷ Доказательство.

- Поскольку $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$, то ряд $\sum_n a_n x^n$ по второй лемме Абеля 2.9.8 сходится равномерно на $[\alpha, \beta]$. очевидно, что функция $a_n x^n$ интегрируема по Риману на интервале $[\alpha, \beta]$ (из теоремы об интегрировании функциональных рядов).

По той же теореме:

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{n+1}.$$



Следствие 2.9.11 (Радиус сходимости ряда первообразных).

▷ Пусть

$$\text{Ряд } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \text{ имеет радиус сходимости } R > 0.$$

▷ Тогда

Ряд из первообразных $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$ имеет радиус сходимости, не меньший, чем R .

▷ Доказательство.

- Пусть $x \in (-R, R)$, произвольное $r > 0 \mid |x| < r < R$.

Т.к. степенной ряд — интегрируемая функция на $[0, r] \subset (-R, R)$,

то:

$$\int_0^r S(x) dx = \sum_n \int_0^r a_n x^n dx = \sum_n a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

$$\sum_n a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ — сходится.}$$

Следовательно по первой лемме Абеля 2.9.3 ряд $\sum_n a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$ сходится $\forall x \mid |x| < r$.

Поскольку r выбрано произвольно на интервале $(0, R)$, то отсюда следует, что ряд сходится $\forall x \mid |x| < R$.



Теорема 2.9.12 (О дифференцируемости степенного ряда).

▷ Пусть

$$S(x) = \sum_n a_n x^n, \quad R > 0.$$

▷ Тогда

$$\forall x \in (-R, R) \text{ функция } S(x) \text{ — дифференцируема в } x, \text{ причем, } S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

▷ Доказательство.

$$\varphi_n(x) = a_n x^n.$$

Надо доказать:

1. $\varphi_n(x)$ — непрерывна и дифференцируема (очевидно);
2. ряд сходится хотя бы в одной точке (эта точка $x = 0$);

3. ряд $\varphi'_n(x) = na_n x^{n-1}$ сходится равномерно на каком-нибудь множестве.
- Пусть $x \in (-R, R)$. Выберем x, r_0, r так, чтобы $|x|, r_0 < r < R$. Тогда $\forall x \in (-r_0, r_0)$ ряд $\sum_n a_n x^n$ сходится абсолютно и равномерно (следует из предыдущих теорем) \Rightarrow ряд $\sum_n a_n r^n$ — сходится

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n r^n = 0$$

$$\Rightarrow \exists M \mid \forall n |a_n r^n| \leq M.$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} |\varphi'_n(x)| &= |na_n x^{n-1}| \leq |na_n r_0^{n-1}| \leq \\ &\leq |na_n| \cdot r^{n-1} \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1} \leq Mn \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Обозначим $\frac{r_0}{r} = q$. Т.о. $|\varphi'_n(x)| \leq Mnq^{n-1}$.

Рассмотрим $\sum_n Mnq^{n-1} = M \sum_n nq^{n-1}$. Докажем, что этот ряд сходится:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)q^n}{nq^{n-1}} = q \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = q < 1$$

\Rightarrow ряд сходится

\Rightarrow по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_n \varphi'_n(x)$ сходится равномерно на интервале $|x| < r_0$

$\Rightarrow S(x)$ — дифференцируема на $|x| < r_0$ и $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$.

Поскольку r_0, r выбирались произвольно, то отсюда следует и $\forall x \in (-R, R)$.

□

Следствие 2.9.13 (Следствие 1).

- ▷ Радиус сходимости продифференцируемого степенного ряда не меньше, чем радиус сходимости исходного (следует из построения).

Следствие 2.9.14 (Следствие 2).

- ▷ Пусть дан ряд $\sum_n a_n x^n$. Сопоставим ему ряды $\sum_n na_n x^{n-1}$, $\sum_n a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. У всех трех рядов радиусы сходимости одинаковы.

Глава 3

Метрические пространства

ОПР 3.1 (метрики и метрического пространства).

Пусть M — произвольное множество; отображение $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ — называется метрикой, если

1. $\forall x, y \in M: \rho(x, y) \geq 0$;
2. $\forall x, y \in M: \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3. $\forall x, y \in M: \rho(x, y) = \rho(y, x)$;
4. $\forall x, y, z \in M: \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Тогда ρ называется метрикой на множество M . M называется метрическим пространством.

Пример 3.1.1 (метрики).

1. $M = \mathbb{R}: \rho(x, y) = |x - y|$;
2. $M = \mathbb{R}^n: \rho_1(X, Y) = \max_{i \in [1, \dots, n]} x_i - y_i$, где $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.
3. $M = \mathbb{R}^n: \rho_2(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

УТВ 3.2 (Подмножества метрических пространств).

- ▷ Если M — метрическое пространство, то $\forall S \subseteq M$, S — метрическое пространство.

3.3 Дополнительные свойства метрики

3.3.0.1 Свойство 1 (Неравенство „ломанной“)

▷ Пусть

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in M,$$

▷ Тогда

$$\rho(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \dots + \rho(x_{n-1}, x_n).$$

▷ Доказательство.

- Очевидно из основного свойства 4 определения 3.1.

□

3.3.0.2 Свойство 2 (Неравенство параллелограмма)

▷ Пусть

$$x, y, z, u \in M.$$

▷ Тогда

$$|\rho(x, y) - \rho(z, u)| \leq \rho(x, z) + \rho(y, u).$$

▷ Доказательство.

- Из свойства 1

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &\leq \rho(x, z) + \rho(z, u) + \rho(u, y) \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \rho(x, y) - \rho(z, u) \leq \rho(x, z) + \rho(u, y); \\ \rho(z, u) - \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(u, y). \end{cases} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \rho(x, y) - \rho(z, u) &\geq -(\rho(x, z) + \rho(u, y)). \end{aligned}$$

□

3.3.0.3 Свойство 3 (Второе неравенство треугольника)

▷ Пусть

$$x, y, z \in M.$$

▷ Тогда

$$|\rho(x, y) - \rho(z, y)| \leq \rho(x, z).$$

▷ Доказательство.

- В свойстве 2 положим $u = y$.

□

3.3.1 Последовательности

ОПР 3.3.1.1 (последовательности).

Последовательностью в метрическом пространстве M — называется любое отображение $\phi: \mathbb{N} \in M$.

ОПР 3.3.1.2 (сходимости последовательности).

Будем говорить, что последовательность x_n точек из метрического пространства сходится к $a \in M$, если последовательность $b_n = \rho(x_n, a) \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$.

Лемма 3.3.1.3 (Единственность предела).

▷ Пусть

Последовательность x_n — имеет предел в M .

▷ Тогда

Этот предел — единственный.

▷ Доказательство.

- Пусть $x_n \xrightarrow{\rho} p$ и $x_n \xrightarrow{\rho} q$, рассмотрим расстояние $0 < \rho(p, q) \leq \rho(p, x_n) + \rho(x_n, q)$, т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(p, x_n) = 0$, то $0 < \rho(p, q) \leq 0 + 0 = 0$. ПРОТИВОРЕЧИЕ.

□

ОПР 3.3.1.4 (Последовательность Коши).

Последовательность $x_n \subset M$ — называется последовательностью Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0: \exists R \mid \forall n, m > R: \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Лемма 3.3.1.5 (О сходящейся последовательности).

▷ Всякая сходящаяся в M последовательность является последовательностью Коши. ОБРАТНОЕ НЕВЕРНО.

▷ Доказательство.

- $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, y) + \rho(y, x_m)$, где $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Т.к. последовательность x_n — сходится, то $\exists R \mid \forall n > R: \rho(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Если $n > R, m > R$, то $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

□

ОПР 3.3.1.6 (Специального множества).

$$\begin{array}{ll} B_r a = \{x \in M \mid \rho(x, a) < r\} & \text{открытый шар радиуса } r \text{ с центром } a. \\ \overline{B}_r a = \{x \in M \mid \rho(x, a) \leq r\} & \text{закрытый шар радиуса } r \text{ с центром } a. \\ S_r a = \{x \in M \mid \rho(x, a) = r\} & \text{сфера радиуса } r \text{ с центром } a. \\ B_{\frac{1}{n}} a, n \in \mathbb{N} & \text{стандартная шаровая окрестность точки } a. \end{array}$$

ОПР 3.3.1.7 (Ограниченности множества).

Будем говорить, что $S \subseteq M$ — ограничено, если

$$\exists K \in \mathbb{R} \mid \forall x, y \in S: \rho(x, y) \leq K. \text{ В частности } K = \sup_{x, y \in S} \rho(x, y) = \text{diam}(S)$$

ОПР 3.3.1.8 (Неограниченного множества).

Будем говорить, что $S \subseteq M$ — не ограничено, если

$$\forall k \in \mathbb{N}: \exists x, y \in S \mid \rho(x, y) > k.$$

ОПР 3.3.1.9 (предельной точки).

Пусть $S \subseteq M$. Будем говорить, что $a \in M$ — предельная точка S , если $\forall \varepsilon > 0: \exists B_\varepsilon(a) \mid B_\varepsilon(a) \cap (S \setminus \{a\}) \neq \emptyset$.

ОПР 3.3.1.10 (точки прикосновения).

Пусть $E \subseteq M$ — метрическое пространство, тогда $a \in M$ называется точкой прикосновения множества E , если $\forall \varepsilon \quad B_\varepsilon(a) \cup E = \emptyset$.

Лемма 3.3.1.11 (Характеризация предельных точек).

▷ a — является предельной точкой $S \subseteq M \Leftrightarrow$ существует последовательность $x_n \in S \mid \forall n: x_n \neq a, x_n \xrightarrow{\rho} a$.

▷ Доказательство.

- (\Rightarrow): Пусть $B_{\frac{1}{n}}(a) \cap (S \setminus \{a\}) \neq \emptyset$, тогда $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \cap (S \setminus \{a\}). \rho(x_n, a) \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$.
- (\Leftarrow): Пусть существует сходящаяся x_n , тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$, значит $\forall \varepsilon > 0: \exists k \mid \forall n > k: \rho(x_n, a) < \varepsilon$, т.к. $x_n \in B_\varepsilon(a), x_n \neq a$, то $(S \setminus \{a\}) \cap B_\varepsilon(a) \neq \emptyset$.

□

ОПР 3.3.1.12 (области).

$S \subseteq M$ — называют открытым (областью), если $\forall a \in S: \exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(a) \subseteq S$.

Следствие 3.3.1.13 ($B_r(a)$ — открыто).

▷ $B_r(a)$ — открыто

ОПР 3.3.1.14 (замкнутого множества).

$S \subseteq M$ — называется замкнутым, если $M \setminus S$ — открыто.

ОПР 3.3.1.15 (Полного метрического пространства).

Метрическое пространство M — называется полным, если всякая последовательность Коши имеет предел в M .

Пример 3.3.1.16 (К определению).

▷ \mathbb{R} с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ — полное метрическое пространство.

Лемма 3.3.1.17 (О метриках в \mathbb{R}^n).

▷ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n: \rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq \sqrt{n} \cdot \rho_1(x, y)$.

▷ Доказательство.

◦ $|x_k - y_k|^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_{ki} - y_{ki})^2 \Rightarrow |x_k - y_k| \leq \sqrt{(\sum_{i=1}^n |x_{ki} - y_{ki}|^2)} - \forall k = 1, 2, \dots, n. \Rightarrow \max_{k=1, \dots, n} |x_k - y_k| \leq \sqrt{(\sum_{i=1}^n |x_{ki} - y_{ki}|^2)}.$

◦

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2 &\leq \sum_{i=1}^n \max_{k=1, \dots, n} |x_k - y_k|^2 = \\ &= n \cdot \max_{k=1, \dots, n} |x_k - y_k|^2 \Rightarrow \rho_2(x, y) \leq \sqrt{n} \cdot \rho_1(x, y). \end{aligned}$$

□

3.3.1.18 Обозначение

▷ $x_k \in \mathbb{R}^n: \vec{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}), \vec{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}), \dots; \vec{x}_1 = (x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tn}); \dots \Rightarrow x_k \in \mathbb{R}^n$

Это означает, что это — последовательность Коши относительно метрики ρ_2 , т.е. $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta \forall l, m > \delta: \rho_2(x_l, x_m) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{li} - x_{mi})^2} < \varepsilon$.

УТВ 3.3.1.19 (Свойства сходимости).

▷ Если последовательность \vec{x}_k — сходится к вектору \vec{x}_0 в \mathbb{R}^n относительно метрики ρ_2 , то это означает, что $\forall i: \exists \lim_{l \rightarrow \infty} x_{li} = x_{0i}$ и наоборот: если существует $\lim_{l \rightarrow \infty} x_{li} = x_{0i}$, то последовательность x_l — сходится в метрике ρ_2 .

▷ Доказательство.

◦ Получается немедленно из леммы.

✓ (\Rightarrow): Пусть \vec{x}_l — сходится к \vec{x}_0 в ρ_2 , тогда

$\rho_1(\vec{x}_l, \vec{x}_0) = \max_k |x_{lk} - x_{0k}| \leq \rho_2(\vec{x}_l, \vec{x}_0) < \varepsilon$ — начиная с некоторого номера,

$\Rightarrow \max_k |x_{lk} - x_{0k}| < \varepsilon \Rightarrow |x_{lk} - x_{0k}| < \varepsilon$ — эта последовательность сходится.

✓ (\Leftarrow): Очевидно.

□

Следствие 3.3.1.20 (Полнота \mathbb{R}^n).

▷ Пространство \mathbb{R}^n — полно, относительно метрики ρ_2 .

▷ Доказательство.

◦ Если x_l — последовательность Коши, то x_{li} , где $i = 1, 2, \dots, n$ — также являются последовательностями Коши в \mathbb{R} . Т.к. \mathbb{R} — полно, следовательно существует предел $x_{0i} - \forall i = 1, 2, \dots, n$. Отсюда следует, в силу полноты $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ — предел x_l , относительно метрики ρ_1 . Значит наше пространство полно, а в силу неравенства этот предел относительно ρ_2 .

□

3.4 Компактные множества

ОПР 3.4.1 (компактного множества).

Пусть M — метрическое пространство, подмножество S пространства M — называется компактным, если для каждой ограниченной последовательности $x_n \in S$ можно выбрать сходящуюся в S подпоследовательность (т.е. предел сходящейся подпоследовательности принадлежит S).

Пример 3.4.2 (К определению).

▷ Множество $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ — компактно, так как в силу теоремы Вейерштрасса можно выбрать сходящуюся подпоследовательность и отрезок — замкнут.

Лемма 3.4.3 (Полнота компактных множеств).

▷ Всякое компактное подмножество S метрического пространства M — полно.

▷ Доказательство.

- Пусть x_n — последовательность Коши в S , x_0 — предельная точка, тогда $x_n \rightarrow x_0$ в смысле метрики ρ_1 , которая там есть. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда выберем p и q такие, что $\rho(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2} - \forall p, q$, начиная с некоторого номера. Т.к. $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$, то начиная с некоторого номера $\rho(x_q, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ (следует из сходимости) $\Rightarrow \rho(x_p, x_0) \leq \rho(x_p, x_q) + \rho(x_q, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow x_0$ — предел любой подпоследовательности $\Rightarrow S$ — полно.

□

Следствие 3.4.3.1 (Замкнутость компактных множеств).

▷ Компактное множество замкнуто.

▷ Доказательство.

- Пусть x_0 — предельная точка множества S , тогда шар $B_{\frac{1}{n}}x_0 \cap (S \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$; $x_n \in B_{\frac{1}{n}}x_0 \cap (S \setminus \{x_0\})$, стало быть $x_n \rightarrow x_0$, а т.к. S — компактное, то $x_0 \in S$ (т.к. любая сходящаяся подпоследовательность должна иметь предел в S)

□

Лемма 3.4.4 (Ограниченность компактного подмножества).

▷ Всякое компактное подмножество S во множестве M — ограничено.

▷ Доказательство.

- От противного: пусть S — не ограничено, тогда в силу не ограниченности существует точка x_1 $\rho(x_0, x_1) > 1$. Построим последовательность x_2, x_3, \dots, x_n таких, что $\rho(x_{n+1}, x_n) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \rho(x_k, x_{k+1})$, это неравенство гарантирует, что точки x_n — различные. Отсюда следует, что $\forall p, q$, (в силу дополнительных свойств метрики) $\rho(x_p, x_q) > 1$, где $p \neq q \Rightarrow$ мы получили последовательность x_1, x_2, \dots, x_n $x_i \in S$ и такая последовательность не имеет предела, т.к. нарушено условие Коши \Rightarrow противоречие $\Rightarrow S$ — компактно.

□

Следствие 3.4.4.1 (Замкн-ть и огран-ть компактного множества).

▷ Если S — компактно, то он замкнуто и ограничено; вообще говоря обратное неверно.

▷ Доказательство.

- Я вам дать не могу, знаний не хватает.

□

ОПР 3.4.5 (ε -сети).

Пусть M — метрическое пространство, $S \subseteq M$; $B \subseteq M$ B — называется ε -сетью множества S , если $\forall x \in S: \exists y \in B \mid \rho(x, y) < \varepsilon$, или по другому: $S \subseteq \bigcup_{y \in B} B_\varepsilon(y)$.

Теорема 3.4.6 (Хаусдорфа о критерии компактности).

▷ $S \subseteq M$ — компактно $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$: существует конечная ε -сеть U_ε („очень важный критерий“).

▷ Доказательство.

- (\Rightarrow): пусть S — компактно, $\varepsilon > 0$, $x_1 \in S$, тогда выберем множество $U_1 = \{x \mid \rho(x, x_1) < \varepsilon\}$. Пусть $x_2 \notin U_1$, тогда выберем множество $U_2 = \{x \mid \rho(x, x_2) < \varepsilon\}$. Строим по индукции: U_1, U_2, \dots . Если при каком-нибудь r — множество покрывает S , то нужное покрытие — ε -сеть. Если не существует, получаем:

$x_1, x_2, \dots, x_n - \forall p, q \mid \rho(x_p, x_q) > \varepsilon$, $p \neq q$, но x_1, x_2, \dots, x_n — не является сходящейся, что противоречит компактности.

- (\Leftarrow): Пусть $\forall \varepsilon$ — существует ε -сеть, $x_0 \in S$, $\varepsilon > 1$, x_1 такой, что $\rho(x_0, x_1) < 1$. Выберем

$$\varepsilon = \frac{1}{2} x_2: \rho(x_0, x_2) < \frac{1}{2}; \dots; \varepsilon = \frac{1}{2^k},$$

$$x_k \mid \rho(x_0, x_k) < \frac{1}{2^k}. x_1, x_2, \dots, x_k \in S$$

и $x_n \rightarrow x_0$ в смысле метрики ρ .

□

ОПР 3.4.7 (открытого покрытия).

Пусть U_α — открытое в M (семейство открытых множеств). Будем говорить, что U_α — открытое покрытие множества S , если $S \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

Следствие 3.4.7.1 (условие компактности).

▷ S — компактно \Leftrightarrow для любого открытого покрытия множества S — можно выбрать конечное подпокрытие.

▷ Доказательство.

- $S, x \in S, \forall \varepsilon > 0$ рассмотрим $B_\varepsilon(x)$ — открыто по определению $\Rightarrow \Rightarrow$ (очевидно) $\subset \bigcup_{x \in S} B_\varepsilon(x)$.

□

Следствие 3.4.7.2 (компактность ограниченных и замкнутых множеств).

▷ Всякое замкнутое, ограниченное подмножество в \mathbb{R}^n — компактно.

▷ Доказательство.

- Пусть $\varepsilon > 0$, тогда выберем всевозможные точки с разными координатами. Т.к. у нас сходимость эквивалентна сходимости по координатам, то $\forall \varepsilon: \exists(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ предъявим $\forall \varepsilon$ — конечную ε -сеть, т.е. существует шар с каким-то радиусом, который покрывает множество.

□

3.5 Непрерывность

Пусть (M_1, ρ_1) и (M_2, ρ_2) — два метрических пространства. Пусть $f: M_1 \rightarrow M_2$.

ОПР 3.5.1 (1 непрерывной в предельной точке функции).

Будем говорить, что f — непрерывная в т. \vec{p}_0 (предельная точка M_1), если для любой последовательности $P_n \subset M_1: p_n \neq \vec{p}_0$ и $p_n \xrightarrow{\rho_1} \vec{p}_0$ имеет место: $f(p_n) \xrightarrow{\rho_2} f(\vec{p}_0)$.

ОПР 3.5.2 (2 непрерывной в предельной точке функции).

Будет говорить, что f — непрерывная в \vec{p}_0 (предельная точка M_1), если $\forall \varepsilon > 0 - \exists \delta > 0: \rho_1(x, \vec{p}_0) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(\vec{p}_0)) < \varepsilon$.

...

ОПР 3.5.3 (Сжимающего отображения).

Пусть $\phi: M \xrightarrow{\rho} M$. Будем говорить, что ϕ — сжимающее отображение, если $\forall x, y \in M: \rho(\phi(x), \phi(y)) \leq q \cdot \rho(x, y)$, где $q < 1$.

Лемма 3.5.4 (Непрерывность сжимающего отображения).

▷ Всякое сжимающее отображение — непрерывно

▷ Доказательство.

- УПР.

□

Теорема 3.5.5 (О неподвижной точке).

▷ Пусть

M — полное метрическое пространство

(всякая последовательность Коши имеет предел); $f: M \rightarrow M$ и f — сжимающее отображение.

▷ Тогда

Существует единственная неподвижная точка отображения f (т.е.

$$\exists x: f(x) = x).$$

▷ Доказательство.

- Единственность: пусть x_1 и $x_2 \in \mathbb{R}$ — две разные неподвижные точки, тогда $x_1 = f(x_1)$ и $x_2 = f(x_2)$. Рассмотрим

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(f(x_1), f(x_2)) \leq q \cdot \rho(x_1, x_2) \Rightarrow (1 - q) \cdot \rho(x_1, x_2) \leq 0,$$

но т.к. $0 \leq q < 1 \Rightarrow 0 \leq \rho(x_1, x_2) \leq 0 \Rightarrow \rho(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ из свойств метрики.

- Конструкция: пусть $x_1 \in M$ — произвольная точка, построим последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ по следующему правилу: $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, \dots , $x_m = f(x_m)$, \dots . Пусть $\ell = \rho(x_1, x_2)$, а $q < 1$ — показатель сжатия, рассмотрим

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+1}) &= \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq q \cdot \rho(x_{n-1}, x_n) = \\ &= q \cdot \rho(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \leq q^2 \cdot \rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \dots \\ &\leq q^{n-1} \cdot \rho(x_1, x_2) = q^{n-1} \cdot \ell. \end{aligned}$$

$\rho(x_n, x_{n+k}) \leq$ (используя дополнительные свойства метрики) $\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \rho(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \leq q^{n-1} \cdot \ell + q^n \cdot \ell + \dots + q^{n+k-2} \cdot \ell = q^{n-1} \cdot \ell \cdot (1 + q + \dots + q^{k-1}) = q^{n-1} \cdot \ell \cdot \frac{1-q^k}{1-q} \leq \ell \cdot \frac{q^{n-1}}{1-q} \Rightarrow$ последовательность — является последовательностью Коши, т.к. $\forall \varepsilon: \exists k \mid \forall n, m > k: \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Считаем $n > m$, $\rho(x_n, x_m) \leq \ell \cdot \frac{q^{n-1}}{1-q}$, но т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell \cdot \frac{q^{n-1}}{1-q} = 0$, т.к. $0 < q < 1 \Rightarrow \exists k: \forall n > k: \ell \cdot \frac{q^{n-1}}{1-q} < \varepsilon \Rightarrow$ верно.

Т.к. x_1, x_2, \dots, x_n — последовательность Коши, а пространство M — полно, то $\exists x_0 \in M \mid x_n \rightarrow x_0$. Учитывая, что $x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow x_{n+1} \xrightarrow{\rho} x_0$, а $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x_0)$, т.к. f — непрерывная в силу леммы о непрерывности сжимающего отображения 3.5.4 на стр. 69 $\Rightarrow x_0 = f(x_0) \Rightarrow x_0$ — неподвижна.

□

Глава 4

Функции многих переменных

ОПР 4.1 (нормы).

$\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_n$ — n -мерное арифметическое пространство.

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{0} = (0, 0, \dots, 0), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n),$
 $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$

В \mathbb{R}^n определена операция сложения, относительно которой \mathbb{R}^n — абелева группа по сложению.

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда определено $\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$

В \mathbb{R}^n существует отображение, называемое нормой:

$$\|\vec{x}\|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

$\vec{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \quad (i = 1, \dots, n)$ назовём базисными векторами:

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

4.2 Свойства нормы:

- ▷ 1. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\|_n \geq 0$, причём $\|\vec{x}\|_n = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ (очевидно из определения);
- 2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\lambda \cdot \vec{x}\|_n = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|_n$ — однородность нормы (очевидно из определения);
- 3. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} + \vec{y}\|_n \leq \|\vec{x}\|_n + \|\vec{y}\|_n$ — следует из неравенства Минковского*, при $p = 2$.

* Гласит о том, что при $p \geq 1$ выполняется: $(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^n |y_i|^p)^{1/p}$

Т.о. \mathbb{R}^n снабжено структурой нормированного пространства.

ОПР 4.3 (скалярного произведения).

В \mathbb{R}^n есть структура евклидова пространства. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ определено отображение $\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Это называется скалярным произведением.

4.4 Свойства скалярного произведения

- ▷ 1. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$ — симметричность;
- 2. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n :$

$$(\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y}, \vec{z}) = \lambda \cdot (\vec{x}, \vec{z}) + \mu \cdot (\vec{y}, \vec{z})$$

— билинейность;

- 3. $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\|_n \cdot \|\vec{y}\|_n$

— это следует из неравенства Коши-Буняковского*.

ОПР 4.5 (метрики).

В \mathbb{R}^n введём метрику $\rho(\vec{x}, \vec{y})$ по правилу:

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

То, что это метрика — доказать самостоятельно.

ОПР 4.6 (непрерывность отображения в точке).

Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Будем говорить, что отображение F непрерывно в точке $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ если F непрерывно в точке x_0 как отображение метрических пространств $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_n)$ в $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_m)$.

Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Тогда любому набору (x_1, x_2, \dots, x_n) сопоставляется набор (y_1, y_2, \dots, y_m) . Т.е. определено отображение $F_j: (x_1, \dots, x_n) \rightarrow y_j \quad (j = 1, \dots, m)$.

Т.о.:

$$y_j = F_j(x_1, \dots, x_n) \quad (j = 1, \dots, m)$$

$$F_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{— координатное отображение.}$$

* Гласит о том, что $\forall \vec{x}, \vec{y}: |\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}$.

4.7 Линейные отображения

ОПР 4.7.1 (линейного отображения).

Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, F — называется линейным отображением, если $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda$ имеет место:

- $F(\vec{x} + \vec{y}) = F(\vec{x}) + F(\vec{y})$; — линейность
- $F(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot F(\vec{x})$ — однородность В частности, $F(\text{vec}0) = \text{vec}0$.

Лемма 4.7.2 (линейность суперпозиции линейных отображений).

▷ Пусть

$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $G: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, F и G — линейные отображения

▷ Тогда

$G \circ F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ — тоже линейное отображение.

▷ Доказательство.

Из алгебры.

□

УТВ 4.7.3 (О представлении решения).

- ▷ Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейное отображение, тогда существует такой набор векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$, что $F(\vec{x}) = x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{a}_n$. Причём $\vec{a}_i = F(\vec{e}_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Следствие 4.7.3.1 (матрица линейного отображения).

Всякому линейному отображению $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ соответствует матрица размера $m \times n$:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Эта матрица называется *матрицей линейного отображения*. Причём суперпозиция линейных отображений соответствует произведению матриц.

ОПР 4.7.4 (нормы линейного отображения).

Пусть дано линейное отображение $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, тогда норма линейного отображения:

$$\|F\| = \sup_{\substack{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \\ \|\vec{x}\|_n = 1}} \|F(\vec{x})\|_m.$$

Следствие 4.7.4.1.

▷

$$\|F(\vec{x})\|_m \leq \|F\| \cdot \|\vec{x}\|_n \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

▷ Доказательство.

- Если $\vec{x} = \vec{0}$, то очевидно; пусть $\vec{x} \neq \vec{0}$, тогда рассмотрим $\vec{y} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_n} \neq \vec{0}$. Очевидно из свойства однородности нормы 4.2 на стр. 71: $\|\vec{y}\|_n = 1$ (из однородности), тогда

$$\|F\| \geq (\text{из свойств sup}) \|F(\vec{y})\|_m = \left\| F\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_n}\right) \right\|_m =$$

$$\left\| F(\vec{x}) \cdot \frac{1}{\|\vec{x}\|_n} \right\|_m = \frac{1}{\|\vec{x}\|_n} \cdot \|F(\vec{x})\|_m \Rightarrow \\ \Rightarrow \|F\| \cdot \|\vec{x}\|_n \geq \|F(\vec{x})\|_m.$$

□

Следствие 4.7.4.2 (Связь нормы отображения и сжимаемости).

▷ Пусть

Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, $\|F\| = q < 1$.

▷ Тогда

Отображение F — сжимающее.

▷ Доказательство.

- $\rho(F(\vec{x}), F(\vec{y})) = \|F(\vec{x}) - F(\vec{y})\|_n = (\text{линейность}) \|F(\vec{x} - \vec{y})\|_n \leq \|F\| \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\|_n = q \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\|_n = q \cdot \rho(\vec{x}, \vec{y})$. Т.к. $q < 1$, то отображение сжимающее.

□

Лемма 4.7.5 (Оценка нормы линейного отображения).

- ▷ Если $\forall x \in \mathbb{R}^n, F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейное отображение, то:

$$\|F(x)\|_m \leq M \|\vec{x}\|_n,$$

где $M = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$, а a_{ij} — м-ца линейного отображения F относительно стандартного базиса.

В частности, $\|F\| \leq M$.

▷ Доказательство.

◦

$$\begin{aligned}
\|F(x)\|_m &= \|x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n\|_m \leq (\text{св-во нормы}) \\
&\leq |x_1| \|\vec{a}_1\|_m + |x_2| \|\vec{a}_2\|_m + \dots + |x_n| \|\vec{a}_n\|_m \leq (\text{нер-во Коши-Буняковского}) \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\vec{a}_i\|_m^2} = \|\vec{x}\|_n \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_j |a_{ij}|^2} = \|\vec{x}\|_n \cdot M.
\end{aligned}$$

□

Теорема 4.7.6 (Непрерывность линейного отображения).▷ Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, F — линейно, тогда F — непрерывно в любой точке $x \in \mathbb{R}^n$.▷ Доказательство.◦ Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим:

$$\|F(x) - F(x_0)\|_m \stackrel{(\text{линейность})}{=} \|F(x - x_0)\|_m \leq \|F\| \cdot \|x - x_0\|_n.$$

Согласно лемме 4.7.5 $\|F\| \leq M \cdot \|x - x_0\|_n$.Пусть $x \rightarrow x_0$ в метрике $\mathbb{R}^n \Rightarrow \|F(x) - F(x_0)\| \rightarrow 0 \Rightarrow F(x) \rightarrow F(x_0)$ в метрике $\mathbb{R}^m \Rightarrow F(x)$ — непрерывна в точке x_0 .

□

4.8 Аффинные отображения

ОПР 4.8.1 (аффинного отображения).Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейное отображение и $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, тогда отображение $F_{\vec{b}}(\vec{x}) = F(\vec{x}) + \vec{b}$ — называется аффинным.**Лемма 4.8.2** (Условие сжимаемости аффинного отображения).▷ Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, F — линейно. Если $\|F\| < 1$, то $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ аффинное отображение $F_{\vec{b}}(\vec{x}) = F(\vec{x}) + \vec{b}$ — сжимающее.▷ Доказательство.◦ Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$, тогда:

$$\begin{aligned}
\|F_{\vec{b}}(\vec{x}) - F_{\vec{b}}(\vec{y})\|_n &= \|F(\vec{x}) + \vec{b} - F(\vec{y}) - \vec{b}\|_n = \\
&= \|F(\vec{x}) - F(\vec{y})\|_n = \|F(\vec{x} - \vec{y})\|_n \leq \|F\| \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\|_n.
\end{aligned}$$

Т.к. $\|F\| < 1$, то отображение сжимающее.

□

Пример 4.8.3 (типичное применение).▷ $Ax = \vec{b}$, $A = n \times n$ — матрица; $(A - E)\vec{x} + E\vec{x} = \vec{b}$, где E — единичная матрица

$$\vec{x} = -(A - E)\vec{x} + \vec{b}$$

Рассмотрим аффинное отображение:

$$F_{\vec{b}} = -(A - E)\vec{x} + \vec{b}.$$

Если $\| -A + E \| < 1$, то неподвижная точка этого отображения будет решением этого уравнения.

4.9 Частная производная

ОПР 4.9.1 (параметризованной кривой).

Рассмотрим отображение

 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$. $\forall t \in (a, b)$ $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ — параметризованная кривая в \mathbb{R}^n .Будем говорить, что f — непрерывно в точке $t_0 \in (a, b)$, если $\forall i = 1, \dots, n$ $f_i(t)$ — непрерывно в точке t_0 . Такое отображение иногда называют вектор-функцией.**ОПР 4.9.2** (дифференцируемость параметризованной кривой в точке).Пусть $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, f называется дифференцируемой в точке $t_0 \in (a, b)$ если:

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \vec{l} \in \mathbb{R}^n.$$

Расшифровка: f — дифференцируема в точке $t_0 \in (a, b)$ если существует такой вектор $\vec{l} \in \mathbb{R}^n$, что:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - \vec{l} \right\|_n = 0.$$

Тогда этот вектор обозначается так:

$$\vec{l} = \frac{df}{dt}(t_0) = f'_t(t_0), \text{ где } f \text{ — вектор-функция.}$$

Следствие 4.9.3 (Условие дифференцируемости в точке).

▷ f — дифференцируема в точке $t_0 \in (a, b)$ если:

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \exists \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} = l_i.$$

Теорема 4.9.4 (Теорема 1).

▷ Пусть

$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, L — линейное отображение. Если $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, f — дифференцируема в $t_0 \in (a, b)$.

▷ Тогда

$g = L \circ f$, $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ — дифференцируема в точке t_0 , причём

$$\frac{dg}{dt}(t_0) = L \left(\frac{df}{dt}(t_0) \right).$$

▷ Доказательство.

◦ Рассмотрим:

$$\begin{aligned} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} &= \frac{L(f(t)) - L(f(t_0))}{t - t_0} = \\ &= \frac{L(f(t) - f(t_0))}{t - t_0} = L \left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right). \end{aligned}$$

Пусть $t \rightarrow t_0$, тогда $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \rightarrow \frac{df}{dt}(t_0)$.

В силу непрерывности линейного отображения следует:

$$L \left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right) = L \frac{df}{dt}(t_0) \Rightarrow \exists \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = L \left(\frac{df}{dt}(t_0) \right)$$

□

Теорема 4.9.5 (Теорема 2).

▷ Пусть

Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, причём f — непрерывна на $[a, b]$, f — дифференцируема на (a, b) . Предположим, что $\|f'_t(t)\|_n \leq M \forall t \in (a, b)$, т.е.:

$$\|f'_t(t_0)\|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{df_i}{dt}(t_0) \right)^2}.$$

▷ Тогда

$$\|f(b) - f(a)\|_n \leq M|b - a|.$$

▷ Доказательство.

◦ Если $f(b) - f(a) = \vec{0}$ (или $\|f(b) - f(a)\|_n = 0$), то неравенство очевидно.

Будем считать, что $\|f(b) - f(a)\|_n > 0$, тогда $\vec{u} = \frac{f(b) - f(a)}{\|f(b) - f(a)\|_n}$.

Очевидно, $\|\vec{u}\|_n = 1$.

◦ Рассмотрим линейное отображение $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $L(\vec{x}) = \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle$. То, что L — линейно, следует из свойств скалярного произведения.

Рассмотрим функцию $\phi(t) = L(f(t)): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Согласно теореме 4.9.4 $\phi(t)$ — дифференцируема на (a, b) и $\phi(t)$ — непрерывна на $[a, b]$.

◦ Применим к $\phi(t)$ формулу Лагранжа, тогда:

$$\phi(b) - \phi(a) = \phi'(t_0)(b - a) \quad (t_0 \in (a, b))$$

$$|\phi(b) - \phi(a)| = |\phi'(t_0)| \cdot |b - a|.$$

◦ Рассмотрим:

$$\begin{aligned} |\phi(b) - \phi(a)| &= | \langle \vec{u}, f(b) \rangle - \langle \vec{u}, f(a) \rangle | = | \langle \vec{u}, f(b) - f(a) \rangle | = \\ &= \left| \left\langle \frac{f(b) - f(a)}{\|f(b) - f(a)\|_n}, f(b) - f(a) \right\rangle \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\|f(b) - f(a)\|_n} \cdot \langle f(b) - f(a), f(b) - f(a) \rangle \right| = \\ &= \frac{\|f(b) - f(a)\|_n^2}{\|f(b) - f(a)\|_n} = \|f(b) - f(a)\|_n \end{aligned}$$

$$|\phi'(L)| = \left| \langle \vec{u}, \frac{df}{dt}(t_0) \rangle \right| \leq$$

$$\leq (\text{в силу нер-ва Коши-Буняковского}) \|u\|_n \cdot \left\| \frac{df}{dt}(t_0) \right\|_n = \left\| \frac{df}{dt}(t_0) \right\|_n \leq M$$

Т.о. $\|f(b) - f(a)\|_n \leq M|b - a|$.

□

Следствие 4.9.6 (Неравенство).

▷ Пусть

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, f — непрерывна на $[a, b]$, f — дифференцируема на (a, b) .

Пусть $\vec{l} \in \mathbb{R}^n$ $\|f'(t) - \vec{l}\| < \varepsilon \forall t \in (a, b)$.

▷ Тогда

$$\left\| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - \vec{l} \right\| < \varepsilon.$$

▷ Доказательство.

- Рассмотрим функцию $\vec{g}(t) = \vec{f}(t) - t \cdot \vec{l}$, тогда $\|\vec{g}'(t)\|_n = \|\vec{f}'(t) - \vec{l}\|_n \leq \varepsilon \Rightarrow$ (Теорема 4.9.5) $\|\vec{g}(b) - \vec{g}(a)\|_n \leq \varepsilon \cdot |b - a| \Rightarrow$
 $\Rightarrow \left\| \frac{\vec{f}(b) - \vec{f}(a)}{b - a} - \vec{l} \cdot \frac{b - a}{b - a} \right\|_n \leq \varepsilon.$

□

4.9.7 Конструкция для частных производных

▷ Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, U — открыто; $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$; $\vec{x}_0 \in U$; т.к. U — открыто, то $\exists \delta > 0 \mid B_\delta(\vec{x}_0) \subset U$.

▷ Пусть \vec{e} — произвольный вектор из \mathbb{R}^n . Рассмотрим прямую $\Phi_{\vec{e}}(t) = \vec{x}_0 + t\vec{e}$.

Заметим, что $\exists \eta > 0 \mid \forall t \mid |t| < \eta \quad \Phi_{\vec{e}}(t) \subset B_\delta \subset U \left(\eta = \frac{\delta}{\|\vec{e}\|_n} \right).$

▷ В том случае, когда $\vec{e} = \vec{e}_i \quad (i = 1, \dots, n)$:

$$\Phi_{\vec{e}_i}(t) = \Phi_i(t) \quad (i = 1, \dots, n).$$

▷ Рассмотрим функцию $G_i(t) = f(\Phi_i(t)) = f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_i)$.

ОПР 4.9.8 (i -ой частной производной).

Если функция $G_i(t)$ — дифференцируема в точке 0, то будем говорить, что функция f обладает i -ой частной производной в точке \vec{x}_0 .

Этот факт обозначается следующим образом:

$$\frac{\partial G_i}{\partial t}(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0).$$

Следствие 4.9.9 (Тождества частной производной).

▷

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G_i(t) - G_i(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_i) - f(\vec{x}_0)}{t}.$$

Пример 4.9.9.1 (взятия частной производной).

▷ Пусть $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\mathbb{R}^3(x, y, z), \mathbb{R}^2(u, v));$

$$u = f_1(x, y, z) = xy + xz,$$

$$v = f_2(x, y, z) = x^2 + yz,$$

$$\vec{x}_0 = (1, -1, 2),$$

$$\vec{e} = (0, 1, 0).$$

Тогда:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$x = 1;$$

$$y = -1 + t;$$

$$z = 2.$$

Вычислим отображение в точке \vec{x}_0 :

$$u(t) = (-1 + t) + 2$$

$$v(t) = 1 + (-1 + t) \cdot 2$$

$$\frac{du}{dt}(0) = 1$$

$$\frac{dv}{dt}(0) = 2$$

Т.о.:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4.10 Дифф-ть функций многих переменных

ОПР 4.10.1 (дифференцируемости).

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, u — открытое в \mathbb{R}^n множество. Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \in U$.

f называется дифференцируемой в точке x_0 если существует линейное отображение $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \forall x \in U$ имеет место:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + L(\vec{x} - \vec{x}_0) + \alpha(x) \cdot \|x - x_0\|_n$$

, где $\alpha(x): U \rightarrow \mathbb{R}^m$ такое, что $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0 \text{ по метрике } \mathbb{R}^n} 0$ по метрике \mathbb{R}^m .

Т.е. при $\|x - x_0\|_n \rightarrow 0, \|\alpha(x)\|_m \rightarrow 0$.

В том случае, когда L существует, L называется дифференциалом отображения f . Матрица линейного отображения называется матрицей Якоби.

Обозначение: $L = D_{x_0}f, L(\vec{x} - \vec{x}_0) = (D_{x_0}f)(\vec{x} - \vec{x}_0)$.

Теорема 4.10.2 (Дифференциал).

▷ Пусть

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^m, U$ — открыто в $\mathbb{R}^n, x_0 \in U, f$ — дифференцируема в точке x_0 .

▷ Тогда

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t} = (D_{x_0}f)\vec{x}.$$

Предел понимается в смысле метрики \mathbb{R}^n .

▷ Доказательство.

◦ Зафиксируем $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, x_0 \in U$, тогда $\exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(x_0) \subset U$, следовательно $\exists \delta > 0 \mid \forall t \mid |t| < \delta \quad (x_0 + tx) \in B_\varepsilon(x_0)$.

Заметим, что $\delta < \frac{\varepsilon}{\|x\|_n}$ если $x \neq 0$. Если f — дифференцируема в точке x_0 , то имеет место:

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \alpha(x)\|x - x_0\|_n.$$

Пусть $t \mid |t| < \delta$, тогда:

$$\begin{aligned} f(x_0) + L(x_0 + tx - x_0) + \alpha(x_0 + tx) \cdot \|x_0 + tx - x_0\|_n &= \\ = f(x_0) + tL(x) + \alpha(x_0 + tx) \cdot |t| \cdot \|x\|_n & \\ f(x_0 + tx) - f(x_0) = tL(x) + \alpha(x_0 + tx) \cdot \|x\|_n \cdot |t|. & \end{aligned}$$

Пусть $t \neq 0$, поделим на t :

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t} &= L(x) + \alpha(x) + \alpha(x_0 + tx) \cdot \frac{|t|}{t} \cdot \|x\|_n \\ \lim_{t \rightarrow 0} (L(x) + \alpha(x_0 + tx) \cdot \frac{|t|}{t} \cdot \|x\|_n) &= L(x) + \|x\|_n \cdot \lim_{t \rightarrow 0} (\alpha(x_0 + tx) \frac{|t|}{t}) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t} &= L(\vec{x}) = (D_{x_0}f)\vec{x}. \end{aligned}$$

□

Следствие 4.10.2.1 (Условие существования всех частных производных).

▷ Если f — дифференцируема в точке x_0 , то $\forall i = 1, \dots, n$ существуют частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$.

▷ Доказательство.

◦ Возьмём в предыдущей теореме $\vec{x} = e_i$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} = (D_{x_0}f)\vec{e}_i.$$

Слева — по определению частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$. Т.о. получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = (D_{x_0}f)\vec{e}_i.$$

Обратное, вообще говоря, неверно.

□

Следствие 4.10.2.2 (Координатное представление).

▷

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_i x_i e_i$$

$$(D_{x_0}f)(\vec{x}) = (D_{x_0}f)\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i (D_{x_0}f)(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

ОПР 4.10.3 (производной по направлению).

Пусть $x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_n = 1$. Тогда выражение $(D_{x_0}f)(\vec{x})$ — называется производной по направлению x в точке x_0 .

ОПР 4.10.4 (градиента).

Если в теореме 4.10.2 $m = 1$, то $(D_{x_0}f)\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$. Тогда можно рассмотреть вектор с компонентами:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right).$$

Этот вектор называется градиентом и обозначается $\nabla f(x_0), \text{grad} f$.

В частности отсюда следует, что производная по направлению $(D_{x_0}f)(\vec{x}) = \nabla f(x_0), \vec{x} >$.

Пример 4.10.5 (непрерывной, с частной производной и не дифференцируемой функции).

- ▷ Непрерывная функция, имеющая частную производную в точке, но не являющейся дифференцируемой:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2 \cdot xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

▷ Доказательство.

- Докажем, что $f(x, y)$ — непрерывная в точке $(0, 0)$: из условия непрерывности — если $\vec{w} = (x, y)$, $\|\vec{w}\|_2 \rightarrow 0$, то $\|f(\vec{w})\|_1 = |f(\vec{w})| \rightarrow 0$.

$\|\vec{w}\|_2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$, но $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ и $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$; тогда

$$\left| \frac{2 \cdot xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{2 \cdot |x| \cdot |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow$$

функция непрерывна.

- Посчитаем

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0;$$

$$\text{аналогично } \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0 \Rightarrow$$

матрица линейного отображения имеет вид $(0, 0)$.

- Предположим, что f — дифференцируема: пусть $(x_0, y_0) = (0, 0)$, тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cdot x_1, y_0 + t \cdot y_1) - f(x_0, y_0)}{t} =$$

$$(D_{\vec{x}_0} f) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = (0, 0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Пусть $(x_0, y_0) = (0, 0)$; $(x_1, y_1) = (1, 1)$, тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cdot (x_0 + t \cdot x_1) \cdot (y_0 + t \cdot y_1)}{\sqrt{(x_0 + t \cdot x_1)^2 + (y_0 + t \cdot y_1)^2}} - f(x_0, y_0)}{t} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2 \cdot t^2}{\sqrt{2} \cdot t} - 0 \right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow$$

\Rightarrow функция в $\vec{0}$ — не дифференцируема из Определения 4.10.1 на стр. 80.

□

Лемма 4.10.6 ().

▷ Пусть

U — n -мерный интервал в \mathbb{R}^n ($U = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times \dots \times [\alpha_n, \beta_n]$).

Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, f — непрерывна в U .

Предположим, что $\forall x_0 \in U$, f — имеет все частные производные в точке x_0 .

$$\text{Пусть } \exists M \mid \forall x \in U \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right\|_m \leq M \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

▷ Тогда

$$\forall x_1, x_2 \in U \quad \|f(x_1) - f(x_2)\|_m \leq M \cdot \sqrt{n} \cdot \|x_1 - x_2\|_n$$

▷ Доказательство.

- Пусть $x_1, x_2 \in U \subset \mathbb{R}^n$. Причём, x_1, x_2 различаются только в i -ой координате:

$$x_1 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{1i}, \dots, x_{0n})$$

$$x_2 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{2i}, \dots, x_{0n})$$

$$\phi(t) = f(x_{01}, \dots, x_{0(i-1)}, t, x_{0(i+1)}, \dots, x_{0n})$$

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \|U'(t)\| = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{01}, \dots, t, \dots, x_{0n}) \right\|$$

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_m = \|\phi(x_{1i}) - \phi(x_{2i})\|_m \leq \|\phi'(t)\|_m \cdot |x_{1i} - x_{2i}| \leq$$

$$M \cdot |x_{1i} - x_{2i}|, \quad \text{где } t \in [x_{1i}, x_{2i}]$$

Это следует из неравенства Лагранжа.

- Пусть $x_1, x_2 \in U$ — произвольные точки. Тогда построим цепочку точек по правилу:

$$\checkmark y_0 = x_1$$

$$\checkmark y_1 = \text{первая координата из } x_2 \text{ и вставляется на место } x_1$$

$$\checkmark \dots$$

$$\checkmark y_k = \text{берутся первые } (k-1) \text{ координат из } y_{k-1}.$$

$$\checkmark \text{ на } k\text{-ое место кладём } k \text{ координат из } x_2$$

$$\checkmark \text{ Далее по индукции.}$$

Получим последовательность точек таких, что y_k и y_{k+1} отличаются на одну координату. Т.к. U — n -мерный интервал, то $y_k \in U \quad \forall k$:

$$\|y_k - y_{k+1}\| = \sqrt{(x_{1k} - x_{2k})^2} = |x_{1k} - x_{2k}|.$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} & \|f(x_1) - f(x_2)\|_m = \\ & = \|f(y_0) - f(y_1) + f(y_1) - f(y_2) + \dots + f(y_{n-1}) - f(y_n)\|_m \leq \\ & \leq \|f(y_0) - f(y_1)\|_m + \|f(y_1) - f(y_2)\|_m + \dots + \|f(y_{n-1}) - f(y_n)\|_m \leq \\ & \leq M\|x_1 - x_2\|_m + M\|x_2 - x_3\|_m + \dots + M\|x_{n-1} - x_n\|_m \leq \\ & \leq (\text{нер-во Коши-Буняковского}) M\sqrt{n}\sqrt{\sum |x_{1i} - x_{2i}|^2} = \\ & = M\sqrt{n}\|x_1 - x_2\|_n. \end{aligned}$$

□

Теорема 4.10.7 (Достаточный признак дифф-ти отображения в точке).

▷ Пусть

U — открытое множество в \mathbb{R}^n , $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in U$

▷ Тогда

Если в точке x_0 существуют все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$, $i = 1, \dots, n$, причём, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ — непрерывны в $x_0 \quad \forall i$, то f — дифференцируема в точке x_0 .

▷ Доказательство.

◦ Т.к. U — открытое множество, то $\exists \delta_0 > 0 \mid B_{\delta_0}(x_0) \subset U$.

$$\forall x \in B_{\delta_0}(x_0) g(x) = f(x) - f(x_0) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_0).$$

$g(x_0) = 0$, g имеет все частные производные в точке x_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|g(x)\|_m}{\|x - x_0\|_n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \|\alpha(x)\|_m = 0 \end{aligned}$$

Докажем это (т.к. из этого будет следовать дифференцирование).

◦ Пусть $\varepsilon > 0$, выберем $\delta_1 < \delta_0$ так, чтобы из $\|x - x_0\|_n < \delta_1 \Rightarrow \Rightarrow \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.

Это возможно, т.к. $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) = 0$, а $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ — непрерывна в точке x_0 .

◦

$$I_n = [\alpha_1, \beta_1] \dots [\alpha_n, \beta_n]$$

$$\alpha_i = x_{0i} - \frac{\delta_1}{\sqrt{n}}$$

$$\beta_i = x_{0i} + \frac{\delta_0}{\sqrt{n}}$$

Очевидно, что $I_n \subset B_{\delta_1}(x_0)$.

Пусть $x_1 \in I_n$, $x_0 \in I_n$. Тогда:

$$\|g(x_1)\|_m = \|g(x_1) - g(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n}\|x_1 - x_0\| \quad \text{из леммы 4.10.6}$$

$$\|g(x_1)\|_m < \varepsilon\|x_1 - x_0\|$$

$$\delta_2 \mid B_{\delta_2}(x_0) < I_n \Rightarrow \|g(x)\|_m < \varepsilon\|x - x_0\|_n \quad \forall x \in B_{\delta_2}(x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \neq x_0 \frac{\|g(x)\|_m}{\|x - x_0\|_n} < \varepsilon \quad \text{причём, } \|x - x_0\| < \delta_1.$$

Поскольку это верно $\forall \varepsilon$, то:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|g(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0 \Rightarrow \text{функция дифференцируема в точке } x_0.$$

□

Теорема 4.10.8 (О дифференцируемости суперпозиций).

▷ Пусть

U — открытое в \mathbb{R}^n , V — открытое в \mathbb{R}^m ; $f: U \rightarrow V$ ($f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$). Пусть $g: V \rightarrow \mathbb{R}^l$, $x_0 \in U$, $y_0 = f(x_0) \in V$.

Предположим, что f — дифференцируема в точке x_0 , g — дифференцируема в точке y_0 . Рассмотрим отображение $h = g \circ f$, $h: U \rightarrow \mathbb{R}^l$.

▷ Тогда

1. h — дифференцируема в точке x_0 ;

$$2. \underbrace{D_{x_0} h}_{l \times n} = \underbrace{D_{y_0} g}_{l \times m} \cdot \underbrace{D_{x_0} f}_{m \times n}$$

▷ Доказательство.

- Пусть L — матрица отображения $D_{x_0} f$, K — матрица отображения $D_{y_0} g$. Выпишем условие дифференцируемости:

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \alpha(x)\|x - x_0\| \quad , \text{ где } \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0, x \in \mathbb{R}^n$$

$$g(y) = f(y_0) + K(y - y_0) + \beta(y)\|y - y_0\| \quad , \text{ где } \beta(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} 0, y \in \mathbb{R}^m.$$

$$\begin{aligned} h(x) &= g(f(x)) = f(x_0) + K(f(x) - f(x_0)) + \beta(f(x)) \cdot \|f(x) - f(x_0)\|_m \\ K(f(x) - f(x_0)) &= K(L(x - x_0) + \alpha(x)\|x - x_0\|_n) = \\ &= KL(x - x_0) + \|x - x_0\|_n \cdot K \cdot \alpha(x) \end{aligned}$$

Т.о.:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x_0) + KL(x - x_0) + \|x - x_0\|_n \cdot K \cdot \alpha(x) + \\ &\quad + \beta(f(x)) \cdot \|f(x) - f(x_0)\|_m =_{(x \neq x_0)} \\ &= h(x_0) + KL(x - x_0) + \underbrace{K\alpha(x) + \beta(f(x)) \cdot \frac{\|f(x) - f(x_0)\|_m}{\|x - x_0\|_n}}_{\gamma(x)} \cdot \|x - x_0\|_n. \end{aligned}$$

- Достаточно доказать, что $\gamma(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$:

$$\begin{aligned} \|\gamma(x)\|_l &\leq \|K\alpha(x)\|_l + \left\| \beta(f(x)) \cdot \frac{\|f(x) - f(x_0)\|_m}{\|x - x_0\|_n} \right\|_l \leq \\ &\leq \|K\| \cdot \|\alpha(x)\|_m + \frac{\|f(x) - f(x_0)\|_m}{\|x - x_0\|_n} \cdot \|\beta(f(x))\|_l \\ \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 &\Rightarrow \|K\| \cdot \|\alpha(x)\|_m \rightarrow 0. \end{aligned}$$

- Т.к. f — дифференцируема в точке x_0 , то $\frac{\|f(x) - f(x_0)\|_m}{\|x - x_0\|_n}$ — ограничена

$$\|\beta(f(x))\|_l \xrightarrow{f(x) \rightarrow f(x_0)} 0 \Rightarrow y \rightarrow y_0, \beta(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} 0.$$

□

4.11 Теорема об обратной функции

$$\text{Пусть дано } F(x), F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, y = F(x), \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = y_1 \\ F_2(x_1, \dots, x_n) = y_2 \\ \dots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) = y_n \end{cases}$$

F — линейное отображение с матрицей $L, y = Lx$. Если $\det L \neq 0$, то $\forall y$ существует единственное решение x_0, y_0 .

Возьмём $y_1 \|y_1 - x_0\| < \varepsilon$. F — дифференцируема, следовательно:

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_0) + L(x - x_0) + \alpha(x)\|x - x_0\|_n \\ y &= F(x_0) + L(x - x_0) + \alpha(x)\|x - x_0\|_n \\ y_1 &= F(x_0) + L(x - x_0) + \alpha(x)\|x - x_0\|_n. \end{aligned}$$

Решение методом разложения по малому параметру.

$$D_{x_0} f, \det(D_{x_0} f) = J(f, x_0)$$

$$J(f \cdot g, x_0) =_{(\text{по св-ву } \det)} J(f, g(x_0)) \cdot J(g, x_0).$$

Теорема 4.11.1 (Об обратной функции).

▷ Пусть

$U \subset \mathbb{R}^n, U$ — открыто, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n, x_0 \in U$. Предположим, что f — имеет все частные производные в $U, \frac{\partial f}{\partial x_i}$ — непрерывны в точке $x_0 \forall i$.

Пусть $y_0 = f(x_0)$.

▷ Тогда

Если $J(f, x_0) \neq 0$, то существует окрестность V точки x_0 и окрестность W точки y_0 такие, что $\forall y \in W \exists$ единственный $x \in V | f(x) = y$.

Следовательно, определено обратное отображение $f^{-1}: W \rightarrow V$, которое дифференцируемо в точке y_0 , причём $D_{y_0} f^{-1} = (D_{x_0} f)^{-1}$.

▷ Доказательство.

- Пусть $x_0 \in U$. В силу дифференцируемости:

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \underbrace{\alpha(x) \cdot \|x - x_0\|_n}_{g(x)},$$

$$g(x) = 0; \quad g(x) = f(x) - f(x_0) = L(x - x_0).$$

В силу линейности $g(x) = 0$.

$\forall x \in U \frac{\partial g}{\partial x_i}$ — существует.

В силу предыдущей теоремы, $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) = 0 \forall i = 1, \dots, n$.

$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0)$ — непрерывна в x_0 .

Т.к. $f(x_0) = y_0$, то:

$$\begin{aligned} f(x) &= y_0 + L(x - x_0) + g(x) \quad , \text{ где } y = f(x) \\ y &= y_0 + L(x - x_0) + g(x). \end{aligned}$$

Пусть $K = L^{-1}, KL = I$ (E — единичная матрица).

$y - y_0 = L(x - x_0) + g(x)$, подействуем справа и слева матрицей K :

$$\begin{aligned} K(y - y_0) &= E(x - x_0) + g(x) \\ x &= x_0 + K(y - y_0) - Kg(x) \\ Kg(x) &= h(x) \\ x &= x_0 + K(y - y_0) - h(x) \\ h(x_0) &= 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x_i} \text{ — непрерывна в точке } x_0. \end{aligned}$$

- Зафиксируем y и рассмотрим отображение $\phi_y(x) = x_0 + K(y - y_0) - h(x)$, тогда имеет место уравнение $x = \phi_y(x)$. Если x — неподвижная точка отображения ϕ_y при фиксированном y , то x — является решением уравнения $y = f(x)$.

Нужно найти условие для y ? которое гарантировало бы, что $\phi_y(x)$ имеет неподвижную точку.

План действий: нужно придумать такое метрическое пространство M , чтобы $\phi_y: M \rightarrow M$ и ϕ_y было бы сжимающим.

Пусть $\delta_0 > 0$ такое, что $B_{\delta_0}(x_0) \subset U$.

Далее, $\forall \rho < \delta_0, B_\rho(x_0) \subset B_{\delta_0}(x_0) \subset U$. Пусть ρ — произвольное ($\rho < \delta_0$), тогда $\overline{B_\rho(x_0)}$ является метрическим пространством (т.к. является подпространством метрического пространства \mathbb{R}^n) и оно полное, т.к. замкнутое.

$\overline{B_\rho(x_0)}$ — необходимое метрическое пространство. Т.к. $D_{x_0}h = 0$

(дифференциал отображения) и $h(x_0) = 0$, то:

$$\begin{aligned} \frac{\|h(x)\|_n}{\|x - x_0\|_n} &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0, \\ \exists \delta_1 < \delta_0, \delta_1 > 0 \mid \frac{\|h(x)\|_n}{\|x - x_0\|_n} &< \frac{1}{2} \quad \forall x \mid \|x - x_0\| < \delta_1 \\ \Rightarrow \|h(x)\|_n &< \frac{1}{2} \cdot \|x - x_0\|_n \end{aligned}$$

- Пусть $\rho < \delta_1$, выберем y так, чтобы $\|y - y_0\| < \frac{\rho}{2\|K\|_n}$.

$$\begin{aligned} \|\phi_y(x) - x_0\| &= \|x_0 + K(y - y_0) - h(x) - x_0\|_n = \|K(y - y_0) - h(x)\|_n \leq \\ &\leq \|K(y - y_0)\|_n + \|h(x)\|_n \leq \|K\|_n \cdot \|y - y_0\|_n + \frac{\|x - x_0\|_n}{2} \leq \\ &\leq \frac{\|K\|_n \cdot \rho}{2 \cdot \|K\|_n} + \frac{\rho}{2} = \rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\phi_y(x) - x_0\|_n &< \rho \\ \phi_y(x) &\leq B_\rho(x_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi_y(x): \overline{B_y(x_0)} &\rightarrow \overline{B_\rho(x_0)} \quad \forall \rho \in \delta_1, \forall y \mid \|y - y_0\|_n < \frac{\rho}{2\|K\|_n}. \end{aligned}$$

- Докажем, что это отображение сжимающее. Выберем $\delta_2 < \delta_1$ так, чтобы:

$$\left\| \frac{\partial h}{\partial x_i} \right\|_n < \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \forall x \in B_{\delta_2}(x_0), \forall i = 1, \dots, n.$$

Это возможно в силу непрерывности $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ в точке x_0 .

$\forall x_1, x_2 \in B_{\delta_2}(x_0)$ имеет место:

$$\|h(x_1) - h(x_2)\|_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n} \|x_1 - x_2\|_n \quad \text{— следует из леммы.}$$

$$\begin{aligned} \|h(x_1) - h(x_2)\|_n &\leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|_n \\ \|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)\|_n &= \\ = \|x_0 + K(y - y_0) - h(x_1) - x_0 - K(y - y_0) - h(x_2)\|_n &= \\ = \|h(x_2) - h(x_1)\|_n &\leq \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\|_n \Rightarrow \end{aligned}$$

Отображение $\phi_y(x)$ — сжимающее, с показателем $q = \frac{1}{2}$. Следовательно, если взять $\rho < \delta_2$, то получим, что $\phi_y(x): \overline{B_y(x_0)} \rightarrow \overline{B_\rho(x_0)}$ — сжимающее отображение.

$\overline{B_y(x_0)}$ — замкнутое метрическое пространство \Rightarrow полное \Rightarrow существуют:

$$V = B_{\delta_2}(x_0) \quad \text{и} \quad W = B_{\frac{\delta_2}{2\|K\|_n}}(y_0)$$

Рассмотрим $f: V \rightarrow W: \forall y \in W \exists x \mid f(x) = y$ — единственно \Rightarrow определено отображение $f^{-1}: W \rightarrow V$.

- Докажем, что f^{-1} непрерывно. Т.к. $\forall y \ f^y = x$, то в силу того, что

$$\|y - y_0\|_n < \frac{\rho}{2\|K\|_n}:$$

$$\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\|_n = \|f^{-1}(y) - x_0\|_n < \rho$$

$$\|y - y_0\|_n < \frac{\rho}{2\|K\|_n}$$

Если $y \rightarrow y_0$, то:

$$f^{-1}(y) \rightarrow x_0 = f^{-1}(y_0) \Rightarrow f^{-1}(y) \text{ непрерывно в точке } y_0.$$

- Докажем дифференцируемость $f^{-1}(y)$. Т.к.:

$$x = x_0 + L(x - x_0) + g(x)$$

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + K(y - y_0) - h(f^{-1}(y))$$

Т.к. $h(f^{-1}(y)) = h(x)$, то в силу непрерывности f^{-1} в точке x_0 получаем, что при $h(f^{-1}(y)) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} 0$.

$h(x) = \alpha(x) - \|x - x_0\|_n \Rightarrow f^{-1}(y)$ — дифференцируема в точке $y_0 \Rightarrow K = L^{-1}$ — дифференциал отображения.

- Докажем формулу для дифференцируемости:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in V$$

Т.к. f и f^{-1} — дифференцируемы в точках x_0, y_0 соответственно, где $y_0 = f(x_0)$.

Пользуемся цепным правилом:

$$D_{f(x_0)} \cdot D_{x_0} f = E$$

$$D_{y_0} f^{-1} = D_{x_0} f = E$$

$$(D_{y_0} f^{-1}) = (D_{x_0} f)^{-1}.$$

□

4.12 Теорема о неявной функции

ОПР 4.12.1 (гиперповерхности).

Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим множество $M = \{f^{-1}(0)\}$. M называется гиперповерхностью, т.е. M — множество векторов $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0$ или $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), f(x_1, \dots, x_n) = 0$

Пример 4.12.2 (гиперповерхности).

▷ $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, F$ — аффинное отображение.

$$F(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b$$

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0$$

— это гиперповерхность.

▷ $F = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 16, M$ — сфера радиуса 4 в \mathbb{R}^n

ОПР 4.12.3 (пересечения гиперповерхностей).

Предположим, что задано k -функций:

$$F_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

...

$$F_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

F_i можно сопоставить гиперповерхность M_i .

$$\begin{cases} F_1(\vec{x}) = 0 \\ \dots \\ F_k(\vec{x}) = 0 \end{cases}$$

$M = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k$ — пересечение гиперповерхностей. M припишем размерность $n - k$.

Предметом исследований является устройство множества M .

ОПР 4.12.4 (частичного дифференциала).

Пусть $U \subset \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Если $z \in U$, то $z = (x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$.

Пусть $F: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^k$. Предположим, что $y = y_0$ — фиксированное.

Тогда для любого фиксированного y_0 $\tilde{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \tilde{F}(x) = F(x, y_0)$.

$D_x \tilde{F}$ — линейное отображение $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, которое называется частным дифференциалом.

Теорема 4.12.5 (О неявной функции).

▷ Пусть

$U \subset \mathbb{R}^{n+m}$, U — открыто; $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, f — дифференцируема и все частные производные непрерывны. Предположим, что $\exists c \in \mathbb{R}^{n+m}$, $c = (a, b) \parallel f(c) = f(a, b) = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$.

Предположим, что частный дифференциал $D_x f$ в точке (a, b) имеет $\det \neq 0$.

▷ Тогда

существует окрестность V точки a в \mathbb{R}^n и окрестность W точки b в $\mathbb{R}^m \parallel V \times W \subset U$ (т.е. точка $c \in V \times W$) такие, что $\forall y \in W$ существует единственный $x \in V$. Следовательно, существует отображение $x = g(y) \parallel f(g(y), y) \equiv 0 \quad \forall y \in W$.

Причём, отображение g — дифференцируемо.

Комментарий:

Пусть $f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$. Нас интересует множество:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$$

Оно определяет M . Другими словами $c = (a, b) \parallel f_i(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) = 0 \quad \forall i$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n) — определитель \neq 0$.

Тогда существует отображение $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \parallel a_i = g_i(b_1, \dots, b_m) \quad i = 1, \dots, n$:

$$f_i(g_i(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m), y_1, y_2, \dots, y_m) = 0.$$

Пример 1:

Пусть:

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad f: \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Множество $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ — сфера; $c = (a, b)$, $a \in \mathbb{R}^1$, $b \in \mathbb{R}^2$.

Точка, заведомо принадлежащая сфере: $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$; $a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $b = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= x^2 - \frac{1}{3} \\ f(x, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) &= \tilde{f}(x) \\ \tilde{f}: \mathbb{R}^1 &\rightarrow \mathbb{R}^1 \\ d\tilde{f} &= 2x, \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 0 \\ g: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^1 \\ g(y, z) & \\ g^2(y, z) + y^2 + z^2 - 1 &\equiv 0 \\ g(y, z) &= \pm \sqrt{1 - y^2 - z^2}; g(b) = a \\ g(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) &= \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \\ g(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{— должно быть.} \end{aligned}$$

Отсюда, $g = -\sqrt{1 - y^2 - z^2}$ — параметризация данной поверхности.

Пример 2:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 \\ f_2(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 - 1 \end{cases}$$

$z = (1, 1, 1)$ — лежит

$$c = (a, b)$$

$$a = (1, 1)$$

$$b = (1).$$

▷ Доказательство.

◦

Замечание 4.12.5.1.

▷ Если $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, то

$$(\star) \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0; \\ f_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0; \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0. \end{cases}; \begin{cases} f_1(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m); \\ f_2(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m); \\ \vdots \\ f_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m); \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} g_1(y_1, \dots, y_m); \\ g_2(y_1, \dots, y_m); \\ \vdots \\ g_n(y_1, \dots, y_m). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = g_1(b_1, \dots, b_m); \\ a_2 = g_2(b_1, \dots, b_m); \\ \vdots \\ a_n = g_n(b_1, \dots, b_m). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m), y_1, \dots, y_m) = 0; \\ f_2(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m), y_1, \dots, y_m) = 0; \\ \vdots \\ f_n(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m), y_1, \dots, y_m) = 0. \end{cases}$$

$$-\forall(y_1, y_2, \dots, y_n) \in W.$$

Замечание 4.12.5.2 (Гиперповерхность).

▷ Всякое условие вида $f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 - \forall y$ — определяет гиперповерхность в \mathbb{R}^{n+m} ; множество точек, удовлетворяющих (\star) — является пересечением поверхностей.

Пример 4.12.5.1 (Пересечения поверхностей).

$$\triangleright \begin{cases} f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1; \\ f_2(x, y, z) = x + y + z. \end{cases}; f_1(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1; f_2 = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0.$$

Замечание 4.12.5.3 (Линейное отображение).

▷ Пусть f — такое, сопоставим ему линейное отображение $D_{(a,b)}f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Выпишем матрицу Якоби отображения:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix},$$

$\text{rk}(D_{(a,b)}f) = n$. Предположим, что матрица Якоби имеет ранг...

Замечание 4.12.5.4 (Тождественное равенство).

$$\triangleright n + m = 3, 2 + 1 = 3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), (2x, 2y, 2z) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), y = \pm\sqrt{1 - x^2 - z^2} = g(x, z), \text{ но } g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \Rightarrow g(x, z) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, f(x, g(x, z), z) \equiv 0 \text{ (тождественно равно)}.$$

▷ Доказательство.

◦ Рассмотрим $F(\vec{x}, \vec{y}): \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$:

$$\begin{cases} F_1(\vec{x}, \vec{y}) = f_1(\vec{x}, \vec{y}); \\ F_2(\vec{x}, \vec{y}) = f_2(\vec{x}, \vec{y}); \\ \vdots \\ F_n(\vec{x}, \vec{y}) = f_n(\vec{x}, \vec{y}); \\ F_{n+1}(\vec{x}, \vec{y}) = y_1; \\ \vdots \\ F_{n+m}(\vec{x}, \vec{y}) = y_m; \end{cases} \quad (D_{(x,y)}f) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$\det(D_{\vec{x}}F) = \det(D_{\vec{x}}f) \cdot \det E = \det(D_{\vec{x}}f); \det(D_{(\vec{a}, \vec{b})}f) \neq 0 \Rightarrow$ к отображению F — применима теорема об обратном отображении, которая гласит, что $f(f^{-1}(\vec{u}, \vec{w})) = (\vec{u}, \vec{w})$, где $(\vec{u}, \vec{w}) \in W \subset \mathbb{R}^{m+n}$.

◦ Существуют отображения ϕ_1 и $\phi_2 \mid F^{-1}(\vec{u}, \vec{w}) = (\phi_1(\vec{u}, \vec{w}), \phi_2(\vec{u}, \vec{w}))$, где $\phi_1: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$; $\phi_2: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$; $f(\phi_1(\vec{u}, \vec{w}), \phi_2(\vec{u}, \vec{w})) = \vec{u}$, а $\phi_2(\vec{u}, \vec{w}) = \vec{w}$, где ϕ_1 и ϕ_2 — существуют. Положим $g(\vec{y}) := \phi_1(\vec{0}, \vec{y})$, тогда $f(\phi_1(\vec{0}, \vec{y}), \phi_2(\vec{0}, \vec{y})) = \vec{0}$ и $\phi_2(\vec{0}, \vec{y}) = \vec{y} \Rightarrow f(g(\vec{y}), \vec{y}) = 0 - \forall \vec{y} \in W. g(\vec{y}) \in V, W \times V \subset U (\vec{w} \rightarrow \vec{v})$.

◦ Единственность: пусть \vec{x}_1 и \vec{x}_2 — две точки такие, что для некоторого \vec{y} : $f(\vec{x}_1, \vec{y}) = f(\vec{x}_2, \vec{y}) = 0 \Rightarrow F(\vec{x}_1, \vec{y}) = (\vec{0}, \vec{y})$, а $F(\vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{0}, \vec{y})$ — противоречие, т.к. для f верна теорема об обратной функции, такого быть не может $\Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2$.

□

Пример 4.12.5.2 (к замечанию).

▷ $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$. Пусть $\begin{cases} f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3; \\ f_2 = x^2 - y^2 + z^2 - 1. \end{cases}$. Рассмотрим $\vec{c} = (1, 1, 1) \in \delta(f_1) \cap \delta(f_2)^*$; $g_1(t), g_2(t)$ такие, что

$$f_1(1, 1, 1) = 0; f_2(1, 1, 1) = 0; \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & -2y & 2z \end{pmatrix} (1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$x = g_1(z), y = g_2(z); g_1^2(z) + g_2^2(z) + z^2 = 3$$

и $g_1^2(z) - g_2^2(z) + z^2 = 1$ (удовлетворяет окружности $z = 1$), сложим:
 $2 \cdot g_1^2(z) + 2 \cdot z^2 = 4 \Rightarrow g_1^2(z) = 2 - z^2 \Rightarrow g_1(z) = \pm\sqrt{2 - z^2}$ и отнимем:
 $2 \cdot g_2^2(z) = 2, g_2^2(z) = 1, g_2(z) = \pm 1 = 1$, т.е. $x = \sqrt{2 - z^2}$, а $y = 1$.

4.13 Высшие производные

Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, U — открыто, тогда если $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ для i фиксированной — существует в U , то определено отображение $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, если $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ такое, что существует $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_i}$.

Теорема 4.13.1 (равенство частных производных).

▷ Пусть

Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ так, что $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \cdot \partial x_i}$ — существуют и непрерывны в U .

▷ Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \cdot \partial x_i}.$$

▷ Доказательство.

- Лектору было очевидно Надо заметить, что без условия непрерывности это неверно, смотрите следующие два пункта, взятые полностью из книжки товарища Фихтенгольца.

□

Пример 4.13.1.1 (Взятие смешанных производных в разном порядке).

* Область определения

▷ При рассмотрении примеров взятия смешанных производных* бросается в глаза совпадение смешанных производных, взятых по одним и тем же переменным, но в разном порядке.

Нужно сразу же отметить, что это вовсе не вытекает с необходимостью из определения смешанных производных, так что существуют случаи, когда упомянутого совпадения нет.

Для примера рассмотрим функцию $f(x, y) = xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (при $x^2 + y^2 > 0$), $f(0, 0) = 0$.

Имеем:

$$f'_x(x, y) = y \cdot \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4 \cdot x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \text{ (при } x^2 + y^2 > 0), f'_x(0, 0) = 0.$$

Придав x частное значение, равное нулю, будем иметь при любом y (в том числе и при $y = 0$): $f'_x(0, y) = -y$. Продифференцировав эту функцию по y , получим $f''_{xy}(0, y) = -1$. Отсюда следует, в частности, что в точке $(0, 0)$ будем иметь $f''_{xy}(0, 0) = -1$. Вычислив таким же образом f''_{yx} в точке $(0, 0)$, получим $f''_{yx}(0, 0) = 1$.

Итак, для рассматриваемой функции $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

Тем не менее, подмеченное на примерах совпадение смешанных производных, отличающихся лишь порядком дифференцирований, не случайное: оно имеет место в широком классе случаев — при соблюдении определённых условий. Начнём со следующей простой теоремы.

Теорема 4.13.1.2 (Равенство частных производных).

▷ Пусть

Предположим, что

- $f(x, y)$ определена в (открытой) области D ,
- в этой области существуют первые производные f'_x и f'_y , а также вторые смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} и, наконец,
- эти последние производные f''_{xy} и f''_{yx} как функции x и y непрерывны в некоторой точке (x_0, y_0) области D .

▷ Тогда

В этой точке $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

▷ Доказательство.

* Частная производная высшего порядка, взятая по различным переменным, например $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial z^2}, \dots$, называется *смешанной* частной производной.

- Рассмотрим выражение

$$W = \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{h \cdot k},$$

где h, k отличны от нуля, например положительны, и притом настолько малы, что в D содержится весь прямоугольник $[x_0, x_0 + h; y_0, y_0 + k]$; такими мы их фиксируем до конца рассуждения.

- Введём теперь вспомогательную функцию от x :

$$\phi(x) = \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k},$$

которая в промежутке $[x_0, x_0 + k]$ имеет производную

$$\phi'(x) = \frac{f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0)}{k}$$

и, следовательно, непрерывна. С помощью этой функции выражение W , которое равно

$$W = \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k} - \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \right)$$

можно переписать в виде:

$$W = \frac{\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)}{h}.$$

- Так как для функции $\phi(x)$ в промежутке $[x_0, x_0 + h]$ выполняются все условия теоремы Лагранжа, то мы можем по формуле конечных приращений, преобразовать выражение W так: $W = \phi'(x_0 + \theta \cdot h) = \frac{f'_x(x_0 + \theta \cdot h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta \cdot h, y_0)}{k}$ ($0 < \theta < 1$).

Пользуясь существованием второй производной $f''_{xy}(x, y)$, снова применим формулу конечных приращений, на этот раз — у функции от y : $f'_x(x_0 + \theta \cdot h, y)$ в промежутке $[y_0, y_0 + k]$. Окончательно получим $W = f''_{xy}(x_0 + \theta \cdot h, y_0 + \theta_1 \cdot k)$ ($0 < \theta, \theta_1 < 1$).

- Но выражение W содержит x и y , с одной стороны, и h и k — с другой, одинаковым образом. Поэтому можно обменять их роли и, введя вспомогательную функцию $\xi(y) = \frac{f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)}{h}$, путём аналогичных рассуждений получить результат: $W = f''_{yx}(x_0 + \theta_2 \cdot h, y_0 + \theta_3 \cdot k)$ ($0 < \theta_2, \theta_3 < 1$).

Из последних сопоставлений находим: $f''_{xy}(x_0 + \theta \cdot h, y_0 + \theta_1 \cdot k) = f''_{yx}(x_0 + \theta_2 \cdot h, y_0 + \theta_3 \cdot k)$. Устремив теперь h и k к нулю, перейдём в этом равенстве к пределу. Ввиду ограниченности множителей

$\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$, аргументы и справа и слева стремятся, соответственно, к x_0, y_0 . А тогда окончательно и получим $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$, что и требовалось доказать.

- Таким образом, непрерывные смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} всегда равны.

□

ОПР 4.13.2 (принадлежность классу).

- Будем говорить, что $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — принадлежит классу $C^r(U)$, если U — открыто в \mathbb{R}^n и $\forall k \leq r$ — существуют и непрерывны все частные производные по порядку k .
- Мультииндексный формализм: пусть $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ и $\alpha_i \geq 0$; такая, что $|\vec{\alpha}| = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$ и $|\vec{\alpha}| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.
 $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = a \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$, где $a \in \mathbb{R}^m$ — элементарный полином. Обозначения:

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = a \cdot \vec{x}^{\vec{\alpha}}; \quad \frac{\partial^{|\vec{\alpha}|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\vec{\alpha}|} f}{\partial \vec{x}^{\vec{\alpha}}}; \quad \sum_{|\vec{\alpha}|=k} a_{\vec{\alpha}} \cdot \vec{x}^{\vec{\alpha}}$$

— многочлен суммарной степени k .

Теорема 4.13.3 (Формула Тейлора для функций многих переменных).

▷ Пусть

$U \in \mathbb{R}^n, U$ — открытое множество, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m, \vec{x}_0 \in U, f \in C^r(U)$.

▷ Тогда

$\forall \vec{x} \in U$ имеет место:

$$f(\vec{x}_0 + \vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq r} \frac{1}{\alpha!} \cdot (D^\alpha f(x_i) \cdot x^\alpha) + \varepsilon_r(\vec{x}) \cdot \|\vec{x}\|_n^2$$

— формула Тейлора, где $\varepsilon_r(x) \xrightarrow{\|\vec{x}\|_n \rightarrow 0} 0$.

▷ Доказательство.

- Введём функцию $\phi(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{x})$. Очевидно, что $\phi(0) = f(\vec{x}_0)$.

$$\phi^{(k)}(0) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \cdot D^\alpha f(x_0) \cdot x^\alpha.$$

- Пусть $\eta > 0 \mid \beta_\eta(\vec{x}_0 \subset U)$. Будем считать, что $\|\vec{x}\|_n < \eta$.
Тогда $\phi(t)$ определено $\forall t \in [-1, 1]$.
 $\phi(t)$ — дифференцируема по tr -раз.

- Применим к $\phi(t)$ формулу Тейлора:

$$\phi(t) = \phi(t_0) + \frac{\phi'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \dots + \frac{\phi^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + \frac{\phi^{(2)}(\theta)}{r!}(t - t_0)^r$$

— формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, где $t, t_0 \in [-1, 1], \theta \in (t_0, t)$.

- Возьмём $t_0 = 0, t = 1$:

$$\begin{aligned} \phi(1) &= \phi(0) + \frac{\phi'(0)}{1!} + \dots + \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} + \dots + \frac{\phi^{(r)}(\theta)}{r!} = \\ &= \phi(0) + \dots + \frac{\phi^{(r)}(0)}{r!} + \dots + \frac{\phi^{(r)}(\theta) - \phi^{(r)}(0)}{r!} \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

- Теперь подставим:

$$\begin{aligned} \phi^{(k)}(0) &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(x_0 \cdot x^\alpha) \\ f(\vec{x}_0 + \vec{x}) &= f(x_0) + \sum_{0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0) \cdot x^\alpha + \varepsilon_r(x) \cdot \|\vec{x}\|_n^2 \\ \varepsilon_r(x) \cdot \|\vec{x}\|_n^2 &= \frac{\phi^{(r)}(\theta) - \phi^{(r)}(0)}{r!} = \\ &= \frac{1}{r!} \cdot \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \cdot \frac{D^\alpha f(\vec{x}_0 + \theta \vec{x}) - D^\alpha f(\vec{x}_0)}{r!} = \\ &= \|\vec{x}\|_n^r \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \frac{D^\alpha f(\theta) - D^\alpha f(x_0)}{r!} \cdot \frac{x^\alpha}{\|\vec{x}\|_n^r} \\ \varepsilon_r(x) &= \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{D^\alpha f(\theta) - D^\alpha f(x_0)}{r!} \right) \cdot \frac{x^\alpha}{\|\vec{x}\|_n^r} \end{aligned}$$

- Докажем, что $\varepsilon_r(x) \xrightarrow{\|\vec{x}\|_n \rightarrow 0} 0$. Поскольку $D^\alpha f(x)$ — непрерывен по условию, то $(D^\alpha f(\theta) - D^\alpha f(x_0)) \xrightarrow{\|\vec{x}\|_n \rightarrow 0} 0$.

$$\begin{aligned} \frac{x^\alpha}{\|\vec{x}\|_n^r} &= \frac{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}}{\|\vec{x}\|_n^{\alpha_1} \|\vec{x}\|_n^{\alpha_2} \dots \|\vec{x}\|_n^{\alpha_1}} \quad \forall i = 1, \dots, n \\ \frac{x_i^{\alpha_i}}{\|\vec{x}\|_n^{\alpha_i}} &= \left(\frac{x_i}{\|\vec{x}\|_n} \right)^{\alpha_i} < 1 \quad \text{по свойству нормы} \Rightarrow \varepsilon_r(x) \xrightarrow{\|\vec{x}\|_n \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

□

4.14 Локальные экстремумы

ОПР 4.14.1 (локальных max и min).

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n, U$ — открыто; $f: U \rightarrow \mathbb{R}, \vec{x}_0 \in U$. Будем говорить, что \vec{x}_0 является локальным max(min) функции f если:

$$\exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(x_0) \subset U, \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

ОПР 4.14.2 (локального экстремума).

\vec{x}_0 называется точкой локального экстремума функции f если x_0 — либо локальный max, либо локальный min.

Теорема 4.14.3 (Необходимое условие локального экстремума).

- Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}, U \in \mathbb{R}^n, U$ — открыто, f — дифференцируема в U . Если $\vec{x}_0 \in U$ — точка локального экстремума функции f , то $D_{x_0} f = 0$ (нулевое отображение).

$$D_x f = \nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) = (0, \dots, 0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

▷ Доказательство.

- Пусть $x \mid \|x\|_n \neq 0, x_0 \subset U$, тогда $\exists \delta > 0 \mid D_\delta(x_0) \subset U$.

Более того, потребуем, чтобы $\forall x \subset B_\delta(x_0) \quad f(x) \geq f(x_0)$ (рассмотрим случай локального минимума).

- Рассмотрим при $|t| < \eta$ функцию $\phi(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{x}), \phi(0) = f(x_0)$.

По определению 4.17.1 $\forall |t| < \eta \quad \phi(0) = f(x_0) \leq f(x_0 + tx) = \phi(t) \Rightarrow$ при $t = 0$ — есть точка локального min функции $\phi(t) \Rightarrow$ из свойств функции одной переменной $\phi'(0) = 0$.

С другой стороны (док-во формулы Тейлора при $k = 1$):

$$\phi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}x_n$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)x_n = 0 \quad \forall \vec{x} \neq 0.$$

$\vec{x} = \vec{e}_i$ — базисный вектор

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \forall i.$$

**ОПР 4.14.4** (стационарной точки).

Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, U — открытое, f — дифференцируема в U . Точка x_0 называется стационарной если $\forall i \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$.

4.15 Квадратичная форма

ОПР 4.15.1 (квадратичной формы).

Пусть $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$. Отображение $Q(\vec{x})$ — называется квадратичной формой, a_{ij} — матрица квадратичной формы (симметричная).

4.15.2 Свойства квадратичной формы

- ▷ 1. $Q(t\vec{x}) = t^2 Q(\vec{x}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$;
- 2. $Q(0) = 0$;
- 3. $Q(x)$ — непрерывное отображение.

ОПР 4.15.3 (положительно и отрицательно определённой квадратичной формы).

Квадратичная форма Q называется положительно (отрицательно) определённой, если $\forall \vec{x} \neq 0 \quad Q(\vec{x}) > 0$ ($Q(\vec{x}) < 0$).

ОПР 4.15.4 (положительной и отрицательной квадратичных форм).

Квадратичная форма Q называется положительной (отрицательной), если $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad Q(\vec{x}) \geq 0$ ($Q(\vec{x}) \leq 0$).

ОПР 4.15.5 (неопределённой квадратичной формы).

Квадратичная форма Q называется неопределённой, если $\exists \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) > 0, Q(y) < 0$.

Пример 4.15.6 (Квадратичных форм).

▷ В \mathbb{R}^2 , (x_1, x_2) :

$x_1^2 + x_2^2$ — положительно определённая
 $-x_1^2 - x_2^2$ — отрицательно определённая
 x_1^2 — положительная
 $-x_2^2$ — отрицательная
 $x_1^2 - x_2^2$ — неопределённая

Пример 4.15.6.1 (Определённость формы).

▷ Пусть \mathbb{R}^2 , (x, y)

$$\circ Q(x, y) = x^2 + y^2; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0$ — положительно определённая квадратичная форма.

$$\circ Q(x, y) = -x^2 - y^2; \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$-x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0$ — отрицательно определённая квадратичная форма.

$$\circ Q(x, y) = x^2 + 0 \cdot y^2; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ — положительная, но не положи-}$$

тельно определённая квадратичная форма. $Q(0, 1) = 0$.

$$\circ Q(x, y) = x^2 - y^2 \text{ — неопределённая. } Q(1, 0) = 1 > 0; Q(0, 1) = -1 < 0.$$

Теорема 4.15.7 (Монотонность положительно определённой квадратичной формы).

▷ Пусть

$Q(\vec{x})$ — положительно определённая квадратичная форма.

▷ Тогда

$$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{R} \mid k_1 > 0, k_2 > 0, \text{ что } (\star) \quad k_2 \cdot \|\vec{x}\|_n^2 \leq Q(\vec{x}) \leq k_1 \cdot \|\vec{x}\|_n^2.$$

▷ Доказательство.

◦ Если $\vec{x} = 0$, то (\star) выполняется — это очевидно.

◦ Пусть $S_1(0) = \{\vec{x} \mid \|\vec{x}\|_n = 1\}$. Очевидно, что $S_1(0)$ — ограничено в \mathbb{R}^n и замкнуто в \mathbb{R}^n . Отсюда следует, что $S_1(0)$ — компактное метрическое пространство.

◦ Рассмотрим метрическое отображение $Q(\vec{x})$, где $\vec{x} \in S_1(0)$, $Q(\vec{x})$ — непрерывна, т.к. является многочленом.

◦ $Q(\vec{x})$, при $\|\vec{x}\|_n = 1$ — определена на компактном множестве $S_1(0)$, а согласно теореме Вейерштрасса — $\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in S_1(0) \mid \text{при } \vec{x}_1 \neq \vec{x}_2 (!) \text{ —}$

$$\checkmark \max_{\|\vec{x}\|=1} Q(\vec{x}) = Q(\vec{x}_1) = k_1 > 0;$$

$$\checkmark \min_{\|\vec{x}\|=1} Q(\vec{x}) = Q(\vec{x}_2) = k_2 > 0.$$

$$k_2 \leq Q(\vec{x}) \leq k_1 - \forall \vec{x} \mid \|\vec{x}\|_n = 1.$$

- Пусть $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, тогда если $\|\vec{y}\|_n \neq 0$, то $\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|_n} \in S_1(0)$, следовательно имеет место такой факт:

$$\begin{aligned} k_2 &\leq Q\left(\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|_n}\right) \leq k_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow k_2 &\leq \frac{1}{\|\vec{y}\|_n^2} \cdot Q(\vec{y}) \leq k_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow k_2 \cdot \|\vec{y}\|_n^2 &\leq Q(\vec{y}) \leq k_1 \cdot \|\vec{y}\|_n^2. \end{aligned}$$

□

ОПР 4.15.8 (Матрица Гессе).

Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(U)$. Из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа: $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + L(\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}(\vec{x}_0) \cdot (x_i - x_{i0}) \cdot (x_j - x_{j0}) + \varepsilon_2(\vec{x}) \cdot \|\vec{x}\|_n^2$.

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}(\vec{x}_0); \quad a_{ij} = a_{ji}; \quad \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}(\vec{x}_0) \right\} - \text{называется матрицей}$$

Гессе. A — квадратичная форма, построенная по матрице Гессе называется квадратичной формой, ассоциативной с f в точке \vec{x}_0 .

Теорема 4.15.9 (О квадратичной форме, ассоциативной с функцией в точке).

▷ Пусть

- U — открыто в \mathbb{R}^n , $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(U)$.
- \vec{x}_0 — экстремальная точка.

▷ Тогда

Если \vec{x}_0 — локальный максимум, то квадратичная форма ассоциативная с f в точке \vec{x}_0 — отрицательна. Если x_0 — локальный минимум, то положительна.

▷ Доказательство.

- Согласно теореме Тейлора: $f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) = f(\vec{x}_0) + L(t\vec{x}) + \frac{1}{2} \cdot Q(t \cdot \vec{x}) + \varepsilon_2(t \cdot \vec{x}) \cdot \|t \cdot \vec{x}\|_n^2$. Поскольку \vec{x}_0 — экстремальная точка, то $L = 0$ — согласно теореме Ферма. $f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} \cdot Q(t \cdot \vec{x}) + \varepsilon_2(t \cdot \vec{x}) \cdot \|t \cdot \vec{x}\|_n^2$. $f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \frac{t^2}{2} \cdot Q(\vec{x}) + t^2 \cdot \varepsilon_2(t \cdot \vec{x}) \cdot \|x\|_n^2$.
- Т.к. \vec{x}_0 — локальный минимум, то $f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{x}) - f(\vec{x}_0) \geq 0$, отсюда следует, что $\frac{Q(\vec{x})}{2} + \varepsilon_2(t \cdot \vec{x}) \cdot \|x\|_n^2 \geq 0$. Перейдём к пределу, при $t \rightarrow 0$: $\|t \cdot \vec{x}\|_n \rightarrow 0 \Rightarrow \varepsilon_2(t \cdot \vec{x}) \rightarrow 0$, из определения ε_2 . Отсюда следует: $\forall \vec{x}: Q(\vec{x}) \geq 0$, значит формула положительна.

ОПР 4.15.10 (стационарной точки).

Точка \vec{x}_0 — называется стационарной точкой функции $f: U \rightarrow \mathbb{R}$; $U \subseteq \mathbb{R}^n$, если $\forall i: \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = 0$.

Экстремальные точки — стационарные, обратное — не верно.

Теорема 4.15.11 (Достаточные условия экстремума).

▷ Пусть

- U — открыто в \mathbb{R}^n , $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(U)$;
- \vec{x}_0 — стационарная точка функции f .

▷ Тогда

Если квадратичная форма ассоциативная с функцией f в точке \vec{x}_0 — положительно определена, то \vec{x}_0 — точка минимума. Аналогично, если квадратичная форма — отрицательно определена, то \vec{x}_0 — максимум.

▷ Доказательство.

- Т.к. $f \in C^2(U)$, то имеет место формула Тейлора: $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + L(\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2} \cdot Q(\vec{x} - \vec{x}_0) + \varepsilon_2(\vec{x}) \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n^2$, т.к. \vec{x}_0 — стационарная точка, то $L = 0$, $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} \cdot Q(\vec{x} - \vec{x}_0) + \varepsilon_2(\vec{x}) \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n^2$.
- Пусть Q — положительно определена, тогда в силу теоремы о квадратичной форме 4.15.7 на стр. 104, имеет место: $k_2 \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n^2 \leq \leq Q(\vec{x} - \vec{x}_0) \leq k_1 \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n^2$; $k_1, k_2 > 0$.
- Выберем шар $B_\varepsilon(\vec{x}_0)$ так, чтобы $|\varepsilon_2(\vec{x})| < \frac{k_2}{2} - \forall \vec{x} \in B_\varepsilon(\vec{x}_0)$; это возможно, ибо $\varepsilon_2(\vec{x}) \rightarrow 0$, при $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$;

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &\geq f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} \cdot Q(\vec{x} - \vec{x}_0) - \frac{k_1}{2} \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n^2 \geq \\ &\geq f(\vec{x}_0) + \frac{k_1}{2} \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n^2 - \frac{k_1}{2} \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_n^2 = f(\vec{x}_0). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\exists \varepsilon > 0: \forall x \in B_\varepsilon(\vec{x}_0): f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$.

□

Следствие 4.15.11.1 (Случай неопределённой квадратичной формы).

- ▷ Если $Q(\vec{x})$ — не определена, то существует шар

$$B_\varepsilon(\vec{x}_0) \subseteq U \text{ и } \vec{x}_1, \vec{x}_2 \mid f(\vec{x}_1) > f(\vec{x}_0) \text{ и } f(\vec{x}_2) < f(\vec{x}_0).$$

▷ Доказательство.

○ Очевидно.

□

Пример 4.15.11.2 (Стационарных, не экстремальных точек).

▷ $f(\vec{x}, \vec{y}) = x^2 + y^3$, $(2 \cdot x, 3 \cdot y^2)$; $x = 0$, $y = 0$ — стационарная точка.
 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \cdot y \end{pmatrix} (0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $p^2 + 0 \cdot q^2 \geq 0$; $(0, 0)$ — не является экстремальной.

▷ $f(\vec{x}, \vec{y}) = x^2 + y^4$; $(0, 0)$ — стационарная.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \cdot y^2 \end{pmatrix} (0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; p^2 + 0 \cdot q^2 \geq 0 \text{ — не экстремальная.}$$

4.16 Аналитические многообразия

ОПР 4.16.1 (аналитического многообразия).

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ — называется аналитическим многообразием размерности $(n - k)$, если существуют такие функции $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$, что $\forall \vec{x} \in M$: $\phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $\phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, \dots , $\phi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$; ϕ_i — дважды непрерывно дифференцируема.

ОПР 4.16.2 (регулярной точки).

Точка $\vec{x}_0 \in M$ — называется регулярной, если ранг матрицы

$$\text{rk} \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)_{\substack{i=1,2,\dots,k \\ j=1,2,\dots,n}} \right\} = k,$$

в противном случае точка \vec{x}_0 — называется особой.

ОПР 4.16.3 (регулярного аналитического многообразия).

Аналитическое многообразие M — называется регулярным, если $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$: \vec{x} — регулярная точка.

Пример 4.16.4 (Аналитических многообразий).

▷ Пусть \mathbb{R}^3 ; $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$; аналитическое многообразие M определяется уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ — это сфера. Докажем, что

$$\text{сфера — регулярное аналитическое выражение: } (2x, 2y, 2z), \begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \\ z = 0. \end{cases} \text{ —}$$

условие того, что ранг равен 0, но точка $(0, 0, 0) \notin M$.

▷ $\phi(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$, тогда M : $x^3 + y^3 + z^3 = 0$; матрица $(3 \cdot x^2, 3 \cdot y^2, 3 \cdot z^2)$; ранг 0 в $(0, 0, 0) \in M \Rightarrow M$ не является регулярным.

▷ Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, тогда рассмотрим множество пар $(x, f(x))$, т.е. график: $(\vec{x}, f(\vec{x})) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$; докажем, что график дифференцируемой функции — регулярное аналитическое многообразие: обозначим график как x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , рассмотрим $F(\vec{x}) = x_{n+1} - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \Rightarrow$ уравнение определяет график функции.

Рассмотрим $\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1\right)$: ранг всегда 1 \Rightarrow является.

▷ Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \Rightarrow$ определены

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

тогда определим аналитическое многообразие в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$:

$$\begin{cases} x_{n+1} - f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ x_{n+2} - f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ \vdots \\ x_{n+k} - f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases};$$

докажем, что оно — регулярно:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

\Rightarrow есть нулевой минор размерности $k \times k$.

ОПР 4.16.5 (параметризуемое аналитическое многообразие).

Аналитическое многообразие M назовём параметризуемым в окрестности точки x_0 , если существует такое отображение $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $U \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$, что $g(\vec{y}_0) = \vec{x}_0$ и $\forall \vec{y} \in U$:

$$\begin{cases} \phi_1 \left(g_1(\overbrace{y_1, y_2, \dots, y_{n-k}}^{=\vec{y}}), g_2(\vec{y}), \dots, g_n(\vec{y}) \right) = 0; \\ \vdots \\ \phi_k(g_1(y_1, y_2, \dots, y_{n-k}), g_2(\vec{y}), \dots, g_n(\vec{y})) = 0. \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = g_1(y_1, y_2, \dots, y_{n-k}); \\ \vdots \\ x_n = g_n(y_1, y_2, \dots, y_{n-k}). \end{cases}.$$

Если окрестность U точки $\vec{y}_0 \mid M \subseteq g(U)$, то M — называется параметризуемым.

Следствие 4.16.5.1 (Теорема о неявном отображении).

▷ Если точка $\vec{x}_0 \in M$ — регулярная, то существует окрестность точки \vec{x}_0 , допускающая параметризацию.

ОПР 4.16.6 (линейного многообразия).

Предположим, что задано аналитическое многообразие M . $\phi_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i = 1, \dots, k$. Предположим, что ϕ имеет вид:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + e_i \quad i = 1, \dots, k.$$

В этом случае M — называется линейным многообразием.

Предположим, $x_0 \in M$, тогда в силу линейности алгебры ϕ_i можно представить в виде:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_{0j}),$$

где a_{ij} — элементы матрицы A размера $k \times n$.

Уравнение линейного многообразия имеет вид: $A(x - x_0) = 0$. В этом случае будем говорить, что линейное многообразие M проходит через точку x_0 .

ОПР 4.16.7 (касательного пространства и касательной плоскости).

Пусть M — произвольное аналитическое многообразие и $x_0 \in M$. Поскольку многообразие M задаётся системой уравнений $\phi_i(x_1, \dots, n) = 0, i = 1, \dots, k$, то сопоставим многообразию M и точке x_0 матрицу:

$$A = \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x_0) \right\}.$$

Согласно тому, что M — многообразие, матрица A имеет максимальный ранг равный k .

Всякой точке $x_0 \in M$ можно сопоставить линейное многообразие T_{x_0} вида $A(x - x_0) = 0$ или в координатах:

$$\sum \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x_0)(x_j - x_{0j}) = 0.$$

В этом случае линейное многообразие T_{x_0} называется касательным пространством к многообразию в точке x_0 .

Если $k = 1$, то T_{x_0} называется касательной плоскостью.

Пример 4.16.8 (касательного пространства и касательной плоскости).

▷ Пусть $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, m_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$, следовательно:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$$

$$A = (2x, 2y, 2z)$$

$$A(m_0) = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$$

$$A(x - m_0) : (2x_0, 2y_0, 2z_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0 \quad \text{— плоскость}$$

$$x_0x + y_0y - y_0^2 + z_0z - z_0^2 = x_0x + y_0y + z_0z - 1$$

4.16.9 Замечание

▷ Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^{n+1}; M: x_{n+1} - f(x_1 \dots x_n) = 0, x_{n+1} = z$

\vec{x}_0 — точка локального экстремума функции f , тогда очевидно, что $z_0 = f(x_0), (z_0, x_0) \in M$.

Рассмотрим как выглядит касательная к пространству в точке (z_0, x_0) :

$$A = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), -\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right).$$

Уравнение касательной в точке z_0, x_0 имеет вид:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - x_{01}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_n - x_{0n})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \quad \forall i.$$

Т.к. экстремум, то уравнение касательной плоскости будет: $z = z_0$. Т.е. плоскость параллельна \mathbb{R}^n .

Если \vec{x}_0 — стационарная точка, то касательная плоскость в этой точке имеет вид: $z = z_0 = f(x_0)$.

ОПР 4.16.10 (касательного проектора).

Пусть M — аналитическое многообразие; \vec{x}_0 — регулярная точка;

$L = \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) \right\}$, тогда линейное многообразие $L \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$, такое линейное аналитическое многообразие называется аналитическим проектором к аналитическому многообразию M в точке \vec{x}_0 .

Замечание 4.16.11 (Из алгебры).

▷ Матрица $k \times n$, $k < n$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = \mathbf{A},$$

если $\text{rk } \mathbf{A} = k$, $\vec{\delta}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i=1, 2, \dots, k$; $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = 0$, то это означает, что $(\vec{\delta}_i, \vec{x}) = 0$, $i=1, 2, \dots, k$; $\vec{\delta}_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right)$ — линейно независима (градиент перпендикулярен всем векторам).

Пример 4.16.11.1 (перпендикулярности градиента).

▷ Пусть $M: x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$; $(1, 1, 1) \in M$; $(2x, 2y, 2z)$; $(2, 2, 2)$; $(2 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-1) + 2 \cdot (z-1)) = 0 = x + y + z - 3$.

ОПР 4.16.12 (лежания на параметрическом многообразии).

Пусть $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, тогда определена кривая в \mathbb{R}^n ; будем говорить, что кривая лежит на параметрическом многообразии M , если $\forall t \in (a, b)$:

$$\begin{cases} \phi_1(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) = 0; \\ \phi_2(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) = 0; \\ \vdots \\ \phi_k(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) = 0. \end{cases}$$

Лемма 4.16.13 (принадлежность касательного вектора).

▷ Пусть

$$t_0: \vec{x}_0 = \vec{\gamma}(t_0).$$

▷ Тогда

Касательный вектор в точке t_0 к кривой $\vec{\gamma}$ принадлежит касательному пространству к M в точке \vec{x}_0 .

▷ Доказательство.

○ Напомним, что касательный вектор к кривой в точке t_0 определяется как

$$\vec{\sigma} = \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}(t_0), \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}(t_0), \dots, \frac{\partial \gamma_n}{\partial t}(t_0) \right).$$

○ Рассмотрим $\phi_j(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) = 0 - \forall t \in (a, b)$, где $t_0 \in (a, b)$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi_j(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) &= 0; \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(\gamma(t_0)) \cdot \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}(t_0) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \cdot \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}(t_0) &= 0 - \forall j = 1, 2, \dots, k \Rightarrow \mathbf{L} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t}(t_0) = 0. \end{aligned}$$

□

ОПР 4.16.14 (независимых кривых).

Будет говорить, что кривые $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_\ell$ — независимы в точке t_0 , если касательные вектора линейно независимы.

Лемма 4.16.15 (Существование независимых кривых).

▷ Пусть

x_0 — регулярная точка аналитического многообразия M .

▷ Тогда

Если k — число функций $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$, определённых на M , то существует $n - k$ независимых кривых, проходящих через точку \vec{x}_0 .

▷ Доказательство.

○ x_0 — регулярная, тогда

$$\begin{cases} \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ \vdots \\ \phi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

— уравнение линейного аналитического многообразия, в силу теоремы о неявных отображениях 4.16.5.1 на стр. 109: существует точка \vec{y}_0 и отображение $g: \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k \mid g(\vec{y}_0) = \vec{x}_0$ и

$$\begin{cases} \phi_1(g_1(y_1, y_2, \dots, y_{n-k}), g_2(\vec{y}), \dots, g_k(\vec{y}), y_1, y_2, \dots, y_{n-k}) = 0; \\ \phi_2(g_1(y_1, y_2, \dots, y_{n-k}), g_2(\vec{y}), \dots, g_k(\vec{y}), y_1, y_2, \dots, y_{n-k}) = 0; \\ \vdots \\ \phi_k(g_1(y_1, y_2, \dots, y_{n-k}), g_2(\vec{y}), \dots, g_k(\vec{y}), y_1, y_2, \dots, y_{n-k}) = 0; \end{cases}.$$

Рассмотрим точку \vec{y}_0 и определим отображение

$$\vec{\gamma}_s = \begin{pmatrix} g_1(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{s-10}, y_{s0} + t, y_{s+10}, \dots, y_{n-k}) \\ g_2(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{s-10}, y_{s0} + t, y_{s+10}, \dots, y_{n-k}) \\ \dots \\ g_k(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{s-10}, y_{s0} + t, y_{s+10}, \dots, y_{n-k}) \\ y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{s-10} \\ y_{s0} + t \\ y_{s+10} \\ \vdots \\ y_{n+k} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \gamma_s - \forall s = 1, 2, \dots, (n-k)$ — кривая, $\vec{\gamma}_s \in M \Rightarrow$ линейно независима.

□

ОПР 4.16.16 (условного min и max).

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — аналитическое многообразие, предположим, что $M \subset V, V$ — открыто в \mathbb{R}^n . $f: V \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда точка $m_0 \in M$ называется *условным локальным min(max)*, если существует окрестность U точки m_0 $\forall x \in U \cap M$ имеет место: $f(x) \geq f(m_0)$ ($f(x) \leq f(m_0)$).

ОПР 4.16.17 (условного экстремума).

Точка m_0 называется *точкой* условного экстремума функции f , если m_0 либо точка условного локального max или условного локального min.

Пример: $f(x, y) = x + y \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Пример 4.16.17.1 (Простой).

▷ Пусть

$$f = x + y; \quad M: x^2 + y^2 = 1$$

$$\phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

$$\phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

$$x_1 = F_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n);$$

$$\dots;$$

$$x_k = F_k(\vec{x});$$

$$f(F_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n), F_2(\vec{x}), \dots, F_k(\vec{x}), x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$$

от $(n-k)$ переменных, но так выразить x_1, x_2, \dots, x_n не получается.

Теорема 4.16.18 (О необходимом условии условного экстремума).

▷ Пусть

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ — аналитическое многообразие, заданное в виде

$$\begin{cases} \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ \vdots \\ \phi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases}.$$

Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $\vec{x}_0 \in M$ — регулярная точка условного экстремума функции f .

▷ Тогда

Существуют вещественные числа

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \mid \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} - \forall j = 1, 2, \dots, n;$$

градиент функции f в \vec{x}_0 — есть линейная комбинация градиентов ϕ_i в \vec{x}_0 .

▷ Доказательство.

○ Пусть $\vec{x}_0 \in M$, тогда $\exists \phi: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, такая, что $\vec{\phi}(t) \subseteq M - \forall t \mid |t| < \delta$ — кривая на аналитическом многообразии. $\vec{\phi}(0) = \vec{x}_0$, рассмотрим $F(t) = f(\vec{\phi}(t)): f(-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}, t_0 = 0$ — точка экстремума функции $F(t)$.

○ При достаточно малом δ :

$$\frac{dF}{dt}(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{\phi}(0)) \cdot \frac{d\phi_i}{dt}(0) =_{(\text{т.к. } \phi(0) = x_0)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \cdot \frac{d\phi_i}{dt}(0).$$

Следовательно вектор

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right)$$

— перпендикулярен вектору из касательного пространства. Т.к. кривая произвольная \Rightarrow вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right)$ — перпендикулярен каждому вектору из касательного пространства. Можно выбрать n кривых: их касательные векторы образуют базис касательного пространства.

- Т.к. \vec{x}_0 — регулярная, то это означает, что данные вектора линейно независимы и образуют пространство, натягивающееся на эти вектора.

□

Следствие 4.16.18.1 (Метод Э.-Л. поиска условного экстремума).

▷ Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \phi_i(x_1 \dots x_n) = 0 (i = 1, \dots, k)$.

Пусть $H = f + \sum_{i=1}^k \lambda_i \phi_i$ — функция Лагранжа.

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 & n \text{ уравнений} \\ \phi(x_1, \dots, x_n) = 0 & (i = 1, \dots, k) \quad k \text{ уравнений} \end{cases}$$

Т.о. число неизвестных равно $n + k$.

Пример 4.16.19 (Пример 1).

▷ Дано: Найти $\max S$ прямоугольника: x, y — стороны, P — периметр.

▷ Решение:

$$f = xy$$

$$\phi(x, y) = 2(x + y) - P = 0$$

$$H = xy + \lambda(2(x + y) - P)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = y + 2\lambda = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = x + 2\lambda = 0 \text{ (усл.-ие на безуслов. экстр.)}$$

$$\Rightarrow x = -2\lambda, y = -2\lambda$$

$$2(x + y) - P = 0$$

$$2(-2\lambda - 2\lambda) - P = 0 \quad \text{т.к. точка удовлетворяет линейному многообразию}$$

$$-8\lambda - P = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{P}{8} \Rightarrow x = y = \frac{P}{4} \Rightarrow \text{это квадрат.}$$

Пример 4.16.20 (Пример 2).

▷ Дано: парабола $y = x^2$ и прямая $y = \frac{x}{3} - 5$. Найти расстояние от параболы до прямой.

▷ Решение:

Пусть (u, v) — точка на параболе, (p, q) — на прямой;

$$f(u, v, p, q) = (u - p)^2 + (v - q)^2$$

Ограничения:

$$\begin{cases} v - u^2 = 0 \\ q - \frac{p}{3} + 5 = 0 \end{cases}$$

$$H(u - p)^2 + (v - q)^2 + \lambda(v - u^2) + \mu(q - \frac{p}{3} + 5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u} = 2(u - p) - 2\lambda u = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial v} = 2(v - q) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial p} = -2(u - p) - \frac{\mu}{3} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial q} = -2(v - q) + \mu = 0 \\ v - u^2 = 0 \\ q - \frac{p}{3} + 5 = 0 \end{cases}$$

Теорема 4.16.21 (Формула Тейлора для функций многих переменных).

▷ Пусть

$U \in \mathbb{R}^n, U$ — открытое множество, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m, \vec{x}_0 \in U, f \in C^r(U)$.

▷ Тогда

$\forall \vec{x} \mid (\vec{x}_0 + \vec{x}) \in U$ имеет место:

$$f(\vec{x}_0 + \vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq r} \frac{1}{\alpha!} \cdot (D^\alpha f(x_i) \cdot x^\alpha) + \varepsilon_r(\vec{x}) \cdot \|\vec{x}\|_n^2$$

— формула Тейлора, где $\varepsilon_r(x) \xrightarrow{\|\vec{x}\|_n \rightarrow 0} 0$.

▷ Доказательство.

○ Введём функцию $\phi(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{x})$. Очевидно, что $\phi(0) = f(\vec{x}_0)$.

$$\phi^{(k)}(0) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \cdot D^\alpha f(x_0) \cdot x^\alpha.$$

○ Пусть $\eta > 0 \mid \beta_\eta(\vec{x}_0) \subset U$. Будем считать, что $\|\vec{x}\|_n < \eta$.

Тогда $\phi(t)$ определено $\forall t \in [-1, 1]$.

$\phi(t)$ — дифференцируема по tr -раз.

- Применим к $\phi(t)$ формулу Тейлора:

$$\phi(t) = \phi(t_0) + \frac{\phi'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \dots + \frac{\phi^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + \frac{\phi^{(r)}(\theta)}{r!}(t-t_0)^r$$

— формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, где $t, t_0 \in [-1, 1], \theta \in (t_0, t)$.

- Возьмём $t_0 = 0, t = 1$:

$$\begin{aligned} \phi(1) &= \phi(0) + \frac{\phi'(0)}{1!} + \dots + \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} + \dots + \frac{\phi^{(r)}(\theta)}{r!} = \\ &= \phi(0) + \dots + \frac{\phi^{(r)}(0)}{r!} + \dots + \frac{\phi^{(r)}(\theta) - \phi^{(r)}(0)}{r!} \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

- Теперь подставим:

$$\begin{aligned} \phi^{(k)}(0) &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(x_0 \cdot x^\alpha) \\ f(\vec{x}_0 + \vec{x}) &= f(x_0) + \sum_{0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0) \cdot x^\alpha + \varepsilon_r(x) \cdot \|\vec{x}\|_n^2 \\ \varepsilon_r(x) \cdot \|\vec{x}\|_n^2 &= \frac{\phi^{(r)}(\theta) - \phi^{(r)}(0)}{r!} = \\ &= \frac{1}{r!} \cdot \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \cdot \frac{D^\alpha f(\vec{x}_0 + \theta \vec{x}) - D^\alpha f(\vec{x}_0)}{r!} = \\ &= \|x\|_n^r \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \frac{D^\alpha f(\theta) - D^\alpha f(x_0)}{r!} \cdot \frac{x^\alpha}{\|x\|_n^r} \\ \varepsilon_r(x) &= \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{D^\alpha f(\theta) - D^\alpha f(x_0)}{r!} \right) \cdot \frac{x^\alpha}{\|x\|_n^r} \end{aligned}$$

- Докажем, что $\varepsilon_r(x) \xrightarrow{\|\vec{x}\|_n \rightarrow 0} 0$. Поскольку $D^\alpha f(x)$ — непрерывен по условию, то $(D^\alpha f(\theta) - D^\alpha f(x_0)) \xrightarrow{\|\vec{x}\|_n \rightarrow 0} 0$.

$$\begin{aligned} \frac{x^\alpha}{\|x\|_n^r} &= \frac{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}}{\|x\|_n^{\alpha_1} \|x\|_n^{\alpha_2} \dots \|x\|_n^{\alpha_n}} \quad \forall i = 1, \dots, n \\ \frac{x_i^{\alpha_i}}{\|x\|_n^{\alpha_i}} &= \left(\frac{x_i}{\|x\|_n} \right)^{\alpha_i} < 1 \quad \text{по свойству нормы} \Rightarrow \varepsilon_r(x) \xrightarrow{\|\vec{x}\|_n \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

□

4.17 Локальные экстремумы

ОПР 4.17.1 (локальных max и min).

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n, U$ — открыто; $f: U \rightarrow \mathbb{R}, \vec{x}_0 \in U$. Будем говорить, что \vec{x}_0 является локальным max(min) функции f если:

$$\exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(x_0) \subset U, \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

ОПР 4.17.2 (локального экстремума).

\vec{x}_0 называется точкой локального экстремума функции f если x_0 — либо локальный max, либо локальный min.

Теорема 4.17.3 (Необходимое условие локального экстремума).

- ▷ Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n, U$ — открыто, f — дифференцируема в U . Если $\vec{x}_0 \in U$ — точка локального экстремума функции f , то $D_{x_0} f = 0$ (нулевое отображение).

$$D_x f = \nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) = (0, \dots, 0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

▷ Доказательство.

- Пусть $x \mid \|x\|_n \neq 0, x_0 \in U$, тогда $\exists \delta > 0 \mid D_\delta(x_0) \subset U$.
Более того, потребуем, чтобы $\forall x \in B_\delta(x_0) \quad f(x) \geq f(x_0)$ (рассмотрим случай локального минимума).
- Рассмотрим при $|t| < \eta$ функцию $\phi(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{x}), \phi(0) = f(x_0)$.
По определению 4.17.1 $\forall |t| < \eta \quad \phi(0) = f(x_0) \leq f(x_0 + tx) = \phi(t) \Rightarrow$ при $t = 0$ — есть точка локального min функции $\phi(t) \Rightarrow$ из свойств функции одной переменной $\phi'(0) = 0$.

С другой стороны (док-во формулы Тейлора при $k = 1$):

$$\begin{aligned} \phi'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}x_n \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)x_n &= 0 \quad \forall \vec{x} \neq 0. \end{aligned}$$

$\vec{x} = \vec{e}_i$ — базисный вектор

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \forall i.$$

□

ОПР 4.17.4 (стационарной точки).

Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, U — открытое, f — дифференцируема в U . Точка x_0 называется стационарной если $\forall i \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$.

4.18 Квадратичная форма

ОПР 4.18.1 (квадратичной формы).

Пусть $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$. Отображение $Q(\vec{x})$ — называется квадратичной формой, a_{ij} — матрица квадратичной формы (симметричная).

4.18.2 Свойства квадратичной формы

- ▷ 1. $Q(t\vec{x}) = t^2 Q(\vec{x}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$;
- 2. $Q(0) = 0$;
- 3. $Q(x)$ — непрерывное отображение.

ОПР 4.18.3 (положительно и отрицательно определённой квадратичной формы).

Квадратичная форма Q называется положительно (отрицательно) определённой, если $\forall \vec{x} \neq 0 \quad Q(\vec{x}) > 0$ ($Q(\vec{x}) < 0$).

ОПР 4.18.4 (положительной и отрицательной квадратичных форм).

Квадратичная форма Q называется положительной (отрицательной), если $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad Q(\vec{x}) \geq 0$ ($Q(\vec{x}) \leq 0$).

ОПР 4.18.5 (неопределённой квадратичной формы).

Квадратичная форма Q называется неопределённой, если $\exists \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) > 0, Q(y) < 0$.

Пример 4.18.6 (Квадратичных форм).▷ В $R^2, (x_1, x_2)$:

- $x_1^2 + x_2^2$ — положительно определенная
- $-x_1^2 - x_2^2$ — отрицательно определенная
- x_1^2 — положительная
- $-x_2^2$ — отрицательная
- $x_1^2 - x_2^2$ — неопределенная

Теорема 4.18.7 (Представление квадратичной формы).

▷ Любая квадратичная форма (при смене базиса) может быть представлена в виде:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2,$$

где $\alpha_i = \{0, 1, -1\}$.

▷ Доказательство.

◦

□

ОПР 4.18.8 (линейного многообразия).

Предположим, что задано аналитическое многообразие M . $\phi_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i = 1, \dots, k$. Предположим, что ϕ имеет вид:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + e_i \quad i = 1, \dots, k.$$

В этом случае M — называется линейным многообразием.

Предположим, $x_0 \in M$, тогда в силу линейности алгебры ϕ_i можно представить в виде:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_{0j}),$$

где a_{ij} — элементы матрицы A размера $k \times n$.

Уравнение линейного многообразия имеет вид: $A(x - x_0) = 0$. В этом случае будем говорить, что линейное многообразие M проходит через точку x_0 .

ОПР 4.18.9 (касательного пространства и касательной плоскости).

Пусть M — произвольное аналитическое многообразие и $x_0 \in M$. Поскольку многообразие M задаётся системой уравнений $\phi_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, k$, то сопоставим многообразию M и точке x_0 матрицу:

$$A = \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x_0) \right\}.$$

Согласно тому, что M — многообразие, матрица A имеет максимальный ранг равный k .

Всякой точке $x_0 \in M$ можно сопоставить линейное многообразие T_{x_0} вида $A(x - x_0) = 0$ или в координатах:

$$\sum \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x_0)(x_j - x_{0j}) = 0.$$

В этом случае линейное многообразие T_{x_0} называется касательным пространством к многообразию в точке x_0 .

Если $k = 1$, то T_{x_0} называется касательной плоскостью.

Пример 4.18.10 (касательного пространства и касательной плоскости).

▷ Пусть $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, m_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$, следовательно:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$$

$$A = (2x, 2y, 2z)$$

$$A(m_0) = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$$

$$A(x - m_0) : (2x_0, 2y_0, 2z_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0 \quad \text{— плоскость}$$

$$x_0x + y_0y + z_0z - z_0^2 = x_0x + y_0y + z_0z - 1$$

4.18.11 Замечание

▷ Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в \mathbb{R}^{n+1} ; $M: x_{n+1} - f(x_1 \dots x_n) = 0, x_{n+1} = z$

\vec{x}_0 — точка локального экстремума функции f , тогда очевидно, что $z_0 = f(x_0), (z_0, x_0) \in M$.

Рассмотрим как выглядит касательная к пространству в точке (z_0, x_0) :

$$A = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), -\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right).$$

Уравнение касательной в точке z_0, x_0 имеет вид:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - x_{01}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_n - x_{0n})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \quad \forall i.$$

Т.к. экстремум, то уравнение касательной плоскости будет: $z = z_0$. Т.е. плоскость параллельна \mathbb{R}^n .

Если \vec{x}_0 — стационарная точка, то касательная плоскость в этой точке имеет вид: $z = z_0 = f(x_0)$.

4.19 Условный экстремум

ОПР 4.19.1 (условного min и max).

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — аналитическое многообразие, предположим, что $M \subset V, V$ — открыто в \mathbb{R}^n . $f: V \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда точка $m_0 \in M$ называется **условным локальным min(max)**, если существует окрестность U точки m_0 $\forall x \in U \cap M$ имеет место: $f(x) \geq f(m_0) (f(x) \leq f(m_0))$.

ОПР 4.19.2 (условного экстремума).

Точка m_0 называется **точкой** условного экстремума функции f , если m_0 либо точка условного локального max или условного локального min.

Пример: $f(x, y) = x + y \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Теорема 4.19.3 (Метод неопр-ых множителей Эйлера-Лагранжа).

▷ Если m_0 — точка условного локального экстремума f на многообразии $M: \{\phi(x_1 - x_n) = 0, i = 1, \dots, k\}$, то $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ такие, что:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f + \lambda_1 \phi_1 + \dots + \lambda_k \phi_k) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Производная вычисляется в точке m_0 .

Другими словами, существуют такие константы $\lambda_1 \dots \lambda_k$, что точка m_0 является безусловным локальным экстремумом функции:

$$H = f + \lambda_1 \phi_1 + \dots + \lambda_k \phi_k,$$

которая называется функцией Лагранжа.

▷ **Доказательство.**

◦ Будем доказывать при $n = 2$ (2-хмерное пространство, хотя док-во справедливо для n -мерного пространства).

$\phi(x, y) = 0$ — уравнение аналитического многообразия. $\forall (x_0, y_0) \in M$:

$$\frac{\partial f^2}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f^2}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Рассмотрим $\mathbb{R}^3(x, y, z)$:

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ \phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Многообразие в \mathbb{R}^3 , одномерно.

$m_0 = (x_0, y_0)$ — точка локального экстремума f .

$$z_0 = f(x_0, y_0), (x_0, y_0, z_0) \in M'$$

о Уравнение касательной пространства в точке (x_0, y_0, z_0) к $\phi(x, y) = 0$:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(m_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(m_0)(y - y_0)$$

— уравнение касательной к $z = f(x, y)$.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(m_0)(x - x_0) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(m_0)(y - y_0) = 0$$

— уравнение касательной к $\phi(x, y) = 0$.

Пересечение этих плоскостей — прямая, параллельная \mathbb{R}^2 . Если бы это было не так, то производная была бы либо положительная, либо отрицательная и торчала бы под углом. Следовательно, $z = z_0$ и:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(m_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(m_0)(y - y_0) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(m_0)(x - x_0) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(m_0)(y - y_0) = 0$$

В матричном виде это означает:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(m_0), \frac{\partial f}{\partial y}(m_0) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(m_0), \frac{\partial \phi}{\partial y}(m_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \exists \lambda$ такое, что:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(m_0), \frac{\partial f}{\partial y}(m_0) \right) &= \lambda \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(m_0), \frac{\partial \phi}{\partial y}(m_0) \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(m_0) &= \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x}(m_0) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(f - \lambda \phi)(m_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(m_0) &= \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y}(m_0) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(f - \lambda \phi)(m_0) = 0 \end{aligned}$$

Все эти условия — условия экстремальности функции $f - \lambda \phi$ в точке m_0 .

□

Следствие 4.19.3.1 (Метод Э.-Л. поиска условного экстремума).

▷ Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi_i(x_1 \dots x_n) = 0 (i = 1, \dots, k)$.

Пусть $H = f + \sum_{i=1}^k \lambda_i \phi_i$ — функция Лагранжа.

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 & n \text{ уравнений} \\ \phi(x_1, \dots, x_n) = 0 & (i = 1, \dots, k) \quad k \text{ уравнений} \end{cases}$$

Т.о. число неизвестных равно $n + k$.

Пример 4.19.4 (Пример 1).

▷ Дано: Найти $\max S$ прямоугольника: x, y — стороны, P — периметр.

▷ Решение:

$$\begin{aligned} f &= xy \\ \phi(x, y) &= 2(x + y) - P = 0 \\ H &= xy + \lambda(2(x + y) - P) \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= y + 2\lambda = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = x + 2\lambda = 0 \quad (\text{усл.-ие на безусл. экстр.}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = -2\lambda, \quad y = -2\lambda$$

$$2(x + y) - P = 0$$

$$2(-2\lambda - 2\lambda) - P = 0 \quad \text{т.к. точка удовлетворяет линейному многообразию}$$

$$-8\lambda - P = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{P}{8} \Rightarrow x = y = \frac{P}{4} \Rightarrow \text{это квадрат.}$$

Пример 4.19.5 (Пример 2).

▷ Дано: парабола $y = x^2$ и прямая $y = \frac{x}{3} - 5$. Найти расстояние от параболы до прямой.

▷ Решение:

Пусть (u, v) — точка на параболе, (p, q) — на прямой;

$$f(u, v, p, q) = (u - p)^2 + (v - q)^2$$

Ограничения:

$$\begin{cases} v - u^2 = 0 \\ q - \frac{p}{3} + 5 = 0 \end{cases}$$

$$H(u - p)^2 + (v - q)^2 + \lambda(v - u^2) + \mu(q - \frac{p}{3} + 5)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial H}{\partial u} = 2(u - p) - 2\lambda u = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial v} = 2(v - q) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial p} = -2(u - p) - \frac{\mu}{3} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial q} = -2(v - q) + \mu = 0 \\ v - u^2 = 0 \\ q - \frac{p}{3} + 5 = 0\end{array}\right.$$

Глава 5

Интегралы, зависящие от параметра

Пусть $f: [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, обозначим: $f_{\vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha})$, где $(x, \vec{\alpha}) \in [a, b] \times U$, Тем самым задана функция $f_{\vec{\alpha}}(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, зависящая от параметра $\vec{\alpha} \in U \subseteq \mathbb{R}^n$.

ОПР 5.1 (Равномерного стремления).

Пусть $\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0$ в \mathbb{R}^n (т.е. $\|\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0\|_n \rightarrow 0$), тогда будем говорить, что функция $f(x, \vec{\alpha})$ — равномерно стремится к функции $f(x, \vec{\alpha}_0)$ на интервале $[a, b]$, если $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0 \mid \|\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0\|_n < \delta \Rightarrow \|f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0)\|_n < \varepsilon - \forall x \in [a, b]$. Обозначим $f(x, \vec{\alpha}) \Rightarrow f(x, \vec{\alpha}_0)$ на $[a, b]$.

Введём $M(\vec{\alpha}) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0)|$, тогда

$$f(x, \vec{\alpha}) \Rightarrow f(x, \vec{\alpha}_0) \text{ на } [a, b] \Leftrightarrow \lim_{\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0} M(\vec{\alpha}) = 0.$$

ОПР 5.2 (Интеграла, зависящего от параметра).

Интегралом зависящим от параметра называется выражение вида $F(\vec{\alpha}) = \int_a^b f(x, \vec{\alpha}) dx$.

Лемма 5.3 (Предельный переход).

▷ Пусть

$$f(x, \vec{\alpha}) \Rightarrow f(x, \vec{\alpha}_0) \text{ на } [a, b].$$

▷ Тогда

$$\lim_{\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0} F(\vec{\alpha}) = \lim_{\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0} \int_a^b f(x, \vec{\alpha}) dx = \int_a^b \lim_{\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0} f(x, \vec{\alpha}) dx = \int_a^b f(x, \vec{\alpha}_0) dx = F(\vec{\alpha}_0).$$

▷ Доказательство.

◦ Пусть $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon / (b - a)$, рассмотрим

$$\begin{aligned} |F(\vec{\alpha}) - F(\vec{\alpha}_0)| &= \left| \int_a^b f(x, \vec{\alpha}) dx - \int_a^b f(x, \vec{\alpha}_0) dx \right| = \\ &= (\text{свойства интеграла}) \left| \int_a^b f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0) dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0)| dx. \end{aligned}$$

◦ Выберем $\delta > 0$ такое, что $\|\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0\|_n < \delta$, тогда $|f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0)| < \varepsilon_1 - \forall x \in [a, b]$, следовательно

$$\int_a^b |f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0)| dx \leq \int_a^b \varepsilon_1 dx = \varepsilon_1 \cdot (b - a) = \varepsilon,$$

то есть

$$|F(\vec{\alpha}) - F(\vec{\alpha}_0)| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0} F(\vec{\alpha}) = F(\vec{\alpha}_0).$$

□

Следствие 5.3.1 (Случай непрерывности).

▷ Пусть

$f(x, \vec{\alpha})$ — непрерывна как функция $n + 1$ переменной на множестве $[a, b] \times U$, где U — открыто в \mathbb{R}^n .

▷ Тогда

Функция $F(\vec{\alpha}) = \int_a^b f(x, \vec{\alpha}) dx$ является непрерывной в области $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

▷ Доказательство.

◦ Пусть $\vec{\alpha}_0 \in U$, тогда найдётся $B_\varepsilon(\vec{\alpha}_0) \subseteq U \Rightarrow \exists I_n \subset B_\varepsilon(\vec{\alpha}_0)$ — замкнутое в \mathbb{R}^n , тогда обозначим $I_{n+1} = [a, b] \times I_n$ — ограниченное и замкнутое, то есть это метрическое пространство (полное) компактно, но $f(x, \vec{\alpha})$ непрерывна на компактном множестве \Rightarrow по теореме Вейерштрасса равномерно непрерывна \Rightarrow если $(x, \vec{\alpha}) \rightarrow (x, \vec{\alpha}_0)$, то $f(x, \vec{\alpha}) \Rightarrow f(x, \vec{\alpha}_0)$, а в силу леммы: $F(\vec{\alpha}) \rightarrow F(\vec{\alpha}_0)$, что и означает непрерывность, так как $\vec{\alpha}_0$ выбрана произвольно, отсюда следует непрерывность $F(\vec{\alpha})$ в U .

□

5.4 Дифференцирование интеграла, зависящего от параметра

Теорема 5.4.1 (О дифференцируемости такого интеграла).

▷ Пусть

$f: [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$, где $U \subseteq \mathbb{R}$; $\vec{\alpha}_0 \in U$ и существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha}_0)$, причём $\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha})$ непрерывна в окрестности точки $\vec{\alpha}_0$.

▷ Тогда

Если опять $F(\vec{\alpha}) = \int_a^b f(x, \vec{\alpha}) dx$, то $F(\vec{\alpha})$ — дифференцируема в точке $\vec{\alpha}_0$, причём

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{\alpha}}(\vec{\alpha}_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha}_0) dx.$$

▷ Доказательство.

◦ Рассмотрим отношение

$$\begin{aligned} \frac{F(\vec{\alpha}) - F(\vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} &= \frac{1}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot \int_a^b f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0) dx = \\ &= \int_a^b \frac{f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} dx, \end{aligned}$$

но по определению

$$\lim_{\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0} \frac{f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} = \frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha}_0),$$

а поскольку $\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha})$ непрерывна в окрестности точки $\vec{\alpha}_0$, то

$$\begin{aligned} \frac{f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha}_0) \Rightarrow (\text{в силу леммы}) \\ &\Rightarrow \exists \lim_{\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0} \frac{F(\vec{\alpha}) - F(\vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial \vec{\alpha}}(\vec{\alpha}_0). \end{aligned}$$

□

Пример 5.4.1.1 (Взятия интеграла).

▷ Интеграл $I(t) = \int_0^{\pi/2} \ln(t^2 - \sin^2 x) dx$ для $t > 1$ стандартными методами не берётся, но заметим, что $\ln(t^2 - \sin^2 x)$ непрерывна для всех x при $t > 1$, дальше $\frac{\partial}{\partial t} \ln(t^2 - \sin^2 x) = 2t/(t^2 - \sin^2 x)$ — определена и непрерывна,

откуда

$$I'(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{2t}{t^2 - \sin^2 x} dx = \frac{2t}{t\sqrt{t^2 - 1}} \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{t^2 - 1} \cdot \operatorname{tg} x}{t}\right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

(он табличный), а дальше

$$I(t) = \int I'(t) dt = \pi \cdot \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) + C$$

и константа определяется из равенства нулю на бесконечности

$$I'(\infty) = 0 \Rightarrow C = \pi \cdot \ln \frac{1}{2t}.$$

Теорема 5.4.2 (Разложение производной).

▷ Пусть

$F(\vec{\alpha}) = \int_{a(\vec{\alpha})}^{b(\vec{\alpha})} f(x, \vec{\alpha}) dx$, $a(\vec{\alpha})$ и $b(\vec{\alpha})$ — непрерывны и $a'(\vec{\alpha}_0)$ с $b'(\vec{\alpha}_0)$ — определены в точке $\vec{\alpha}_0$.

▷ Тогда

$$\frac{dF}{d\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}_0) = \int_{a(\vec{\alpha}_0)}^{b(\vec{\alpha}_0)} \frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha}_0) dx + b'(\vec{\alpha}_0) \cdot f(b(\vec{\alpha}_0), \vec{\alpha}_0) - a'(\vec{\alpha}_0) \cdot f(a(\vec{\alpha}_0), \vec{\alpha}_0).$$

▷ Доказательство.

◦ Рассмотрим отношение

$$\begin{aligned} \frac{F(\vec{\alpha}) - F(\vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} &= \frac{1}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot \left(\int_{a(\vec{\alpha})}^{b(\vec{\alpha})} f(x, \vec{\alpha}) dx - \int_{a(\vec{\alpha}_0)}^{b(\vec{\alpha}_0)} f(x, \vec{\alpha}_0) dx \right) = \\ &= \int_{a(\vec{\alpha})}^{b(\vec{\alpha})} \frac{f(x, \vec{\alpha}) - f(x, \vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} dx + \frac{1}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot \int_{b(\vec{\alpha}_0)}^{b(\vec{\alpha})} f(x, \vec{\alpha}_0) dx - \\ &\quad - \frac{1}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot \int_{a(\vec{\alpha}_0)}^{a(\vec{\alpha})} f(x, \vec{\alpha}_0) dx. \end{aligned}$$

- У первого слагаемого в силу теоремы о дифференцируемости предел при $\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0$ существует и равен

$$\frac{1}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot \int_{a(\vec{\alpha})}^{b(\vec{\alpha})} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \vec{\alpha}_0) dx.$$

Рассмотрим теперь второе, оценим разность с тем что ищем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot \int_{b(\vec{\alpha}_0)}^{b(\vec{\alpha})} f(x, \vec{\alpha}_0) dx - \frac{b(\vec{\alpha}) - b(\vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot f(b(\vec{\alpha}_0), \vec{\alpha}_0) \right| = \\ & = \left| \frac{1}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot \int_{b(\vec{\alpha}_0)}^{b(\vec{\alpha})} f(x, \vec{\alpha}_0) dx - \frac{1}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot \int_{b(\vec{\alpha}_0)}^{b(\vec{\alpha})} f(b(\vec{\alpha}_0), \vec{\alpha}_0) dx \right| \end{aligned}$$

но если $|\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0| < \delta$, то из непрерывности f и $b(\vec{\alpha})$ получаем, что $|f(x, \vec{\alpha}) - f(b(\vec{\alpha}_0), \vec{\alpha}_0)| < \varepsilon$, поэтому перепишем

$$\leq \frac{1}{|\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0|} \cdot \left| \int_{b(\vec{\alpha}_0)}^{b(\vec{\alpha})} \varepsilon dx \right| = \varepsilon \cdot \left| \frac{b(\vec{\alpha}) - b(\vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \right|,$$

но так как b — дифференцируема в $\vec{\alpha}_0$, то $\left| \frac{b(\vec{\alpha}) - b(\vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \right| < M$, значит всё выражение $\leq \varepsilon \cdot M$, то есть есть сходимость.

- Заключение, рассмотрим с чем сравнивали, оказывается

$$\lim_{\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}_0} \frac{b(\vec{\alpha}) - b(\vec{\alpha}_0)}{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0} \cdot f(b(\vec{\alpha}_0), \vec{\alpha}_0) = b'(\vec{\alpha}_0) \cdot f(b(\vec{\alpha}_0), \vec{\alpha}_0)$$

— то, что в ответе; с третьим слагаемым получаем аналогично.

□

Пример 5.4.2.1 (Типичные примеры применения теоремы).

- Предположим, что $F(x) = \int_a^b |x - y| \cdot v(y) dy$, $v(y)$ — непрерывна на $[a, b]$, чему тогда равно $\frac{d^2 F}{dx^2}$ (заметим, что $|x - y|$ в точке $x = y$ не дифференцируема)?
 - Если $x \notin [a, b]$, то видно, что $\frac{d^2 F}{dx^2} = 0$.
 - Если $a < x < b$, то разложим на две части

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x |x - y| \cdot v(y) dy + \int_x^b |x - y| \cdot v(y) dy = \\ &= \int_a^x (x - y) \cdot v(y) dy - \int_x^b (x - y) \cdot v(y) dy, \end{aligned}$$

теперь можно найти

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_a^x v(y) dy + 1 \cdot (x - y) \cdot v(y)|_{y=x} + 0 - \\ &- \int_x^b v(y) dy - 1 \cdot (x - y) \cdot v(y)|_{y=x} = \int_a^x v(y) dy - \int_x^b v(y) dy \end{aligned}$$

и, наконец,

$$F''(x) = x' \cdot v(y) + 1 \cdot v(x) = 2 \cdot v(x).$$

5.5 Интегрирование по параметру

Теорема 5.5.1 (Об интегрировании по параметру).

- Пусть

$f(x, y)$ — непрерывна на множестве $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.

- Тогда

Этой функции можно сопоставить две функции, зависящие от параметра: $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ и функцию $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$; тогда имеют место равенства $\int_c^d \Phi(y) dy = \int_a^b F(x) dx$ и

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

— называется *двойным интегралом*.

- Доказательство.

- Рассмотрим функции

$$\phi(t) = \int_c^t \int_a^b f(x, y) dx dy \text{ и } \psi(t) = \int_a^b \int_c^t f(x, y) dy dx,$$

где $t \in [c, d]$, заметим, что $\phi(c) = 0$ и $\psi(c) = 0$.

- Теперь рассмотрим их производные, для φ это

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_c^t \int_a^b f(x, y) dx dy = \frac{\partial}{\partial t} \int_c^t \Phi(y) dy,$$

но $\Phi(y)$ непрерывна по y , поэтому можно представить

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_c^t \Phi(y) dy = \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\Phi}(t) - \hat{\Phi}(c)) = \hat{\Phi}(t),$$

где $\hat{\Phi}$ — некоторая первообразная Φ .

○ Теперь рассмотрим для ψ :

$$\frac{d\psi}{dt} = \int_a^b \left(\frac{d}{dt} \int_c^t f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b f(x, t) dx = \frac{d\phi}{dt}$$

— $\forall t \in [c, d]$, следовательно $\phi(t) - \psi(t) = \text{const}$, но при $t = c$ должен быть нуль, поэтому $\text{const} = 0$, следовательно $\phi(t) = \psi(t)$.

□

Пример 5.5.1.1 (Типичный).

▷ Пусть $\beta > \alpha \geq 0$, рассмотрим

$$\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} dx.$$

▷ В данном случае $f(x, y) = x^y$ на $[0, 1] \times [\alpha, \beta]$, возьмём интеграл

$$\int_0^1 \left(\int_\alpha^\beta x^y dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^y}{\ln x} \Big|_\alpha^\beta \right) dx = \int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} dx,$$

дальше довольно сложно, а если попробовать сменить порядок

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy &= \int_\alpha^\beta \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 dy = \int_\alpha^\beta \frac{dy}{y+1} = \\ &= \ln|y+1| \Big|_\alpha^\beta = \ln \left| \frac{1+\beta}{1+\alpha} \right|, \end{aligned}$$

очень даже ничего.

5.6 Несобственный интеграл, зависящий от параметра

Рассмотрим несобственный интеграл, зависящий от параметра:

$$(\star) F(\vec{\alpha}) = \int_a^w f(x, \vec{\alpha}) dx = \lim_{p \rightarrow w} \int_a^p f(x, \vec{\alpha}) dx, \quad \vec{\alpha} \in [a, b].$$

ОПР 5.6.1 (Равномерной сходимости).

Будем говорить, что (\star) равномерно сходится на $[a, b]$, если $\forall \varepsilon > 0: \exists B \in \mathbb{R} \mid \forall p > B$ имеет место:

$$\left| \int_p^w f(x, \vec{\alpha}) dx \right| < \varepsilon - \forall \vec{\alpha} \in [a, b].$$

Теорема 5.6.2 (Условие непрерывности).

▷ Если $f(x, \vec{\alpha})$ — равномерно непрерывна на множестве $[a, w] \times [c, d]$ и (\star) равномерно сходится на $[c, d]$, то $F(\vec{\alpha})$ — непрерывна на $[c, d]$

▷ Доказательство.

○ Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольная, тогда, в силу равномерной сходимости (\star) :

$$\exists p \mid \forall \vec{\alpha} \in [c, d]: \left| \int_p^w f(x, \vec{\alpha}) dx \right| < \varepsilon.$$

Рассмотрим $G(\vec{\alpha}, p) = \int_a^p f(x, \vec{\alpha}) dx$ на $[a, p] \times [c, d]$: $f(x, \vec{\alpha})$ тут непрерывна, поскольку непрерывна на $[a, w]$, следовательно по теореме о непрерывности для обычных интегралов $G(\vec{\alpha}, p)$ непрерывна по $\vec{\alpha}$, таким образом интеграл $G(\vec{\alpha}, w) = \int_a^w f(x, \vec{\alpha}) dx$ существует.

○ Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} |G(\vec{\alpha}, w) - G(\vec{\alpha}, p)| &= \left| \int_a^w f(x, \vec{\alpha}) dx - \int_a^p f(x, \vec{\alpha}) dx \right| = \\ &= \left| \int_p^w f(x, \vec{\alpha}) dx \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

— $\forall \vec{\alpha} \in [c, d]$, то есть

$$G(\vec{\alpha}, p) \Rightarrow G(\vec{\alpha}, w)$$

при $p \rightarrow w$, так как по теореме о равномерной сходимости 5.3.1 $G(\vec{\alpha}, w)$ непрерывна.

□

Теорема 5.6.3 (О дифференцируемости).

▷ Пусть

$$F(\vec{\alpha}) = \int_a^w f(x, \vec{\alpha}) dx.$$

▷ Тогда

Если $\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}$ равномерно непрерывна на $[a, w] \times [c, d]$ и $F(\alpha)$ равномерно сходится на $[c, d]$, то

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{\alpha}} = \int_a^w \frac{\partial}{\partial \vec{\alpha}} f(x, \vec{\alpha}) dx - \forall \vec{\alpha} \in [c, d].$$

▷ Доказательство.

- Пусть $\varepsilon > 0$, p — взято из равномерной сходимости интеграла (★); рассмотрим $F(\vec{\alpha}, p) = \int_a^p f(x, \vec{\alpha}) dx$, для этой функции выполнены все условия теоремы о дифференцируемости на множестве $[a, p] \times [c, d]$, откуда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\alpha}} F(\vec{\alpha}, p) = \int_a^p \frac{\partial}{\partial \vec{\alpha}} f(x, \vec{\alpha}) dx,$$

а поскольку $\partial f / \partial \vec{\alpha}$ равномерно непрерывна, то по предыдущей теореме:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(\vec{\alpha}, p) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(\vec{\alpha}, w) = \int_a^w \frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(x, \vec{\alpha}) dx$$

□

Теорема 5.6.4 (Признак Вейерштрасса о равномерной сходимости).

▷ Пусть

- $F(\vec{\alpha}) = \int_a^w f(x, \vec{\alpha}) dx$, где $\vec{\alpha} \in [c, d]$.
- Существует функция $h(x) \in [a, w]$ $|f(x, \vec{\alpha})| < h(x) - \forall \vec{\alpha} \in [c, d]$ и $\int_a^w h(x) dx$ равномерно сходится.

▷ Тогда

$\int_a^w f(x, \vec{\alpha}) dx$ тоже равномерно сходится.

▷ Доказательство.

- Следует сразу из определения.

□

5.7 Эйлеровы интегралы (или Гамма- и Бета-функции)

ОПР 5.7.1 (Эйлеровых интегралов).

1. Гамма-функция:

$$\tilde{\gamma}(x) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt,$$

где $x > 0$;

2. Бета-функция:

$$B(x, y) \stackrel{def}{=} \int_0^1 t^{x-1} \cdot (1-t)^{y-1} dt.$$

УТВ 5.7.2 (Связь между Гамма- и Бета-функциями).

$$\triangleright B(x, y) = \frac{\tilde{\gamma}(x) \cdot \tilde{\gamma}(y)}{\tilde{\gamma}(x+y)}$$

▷ Доказательство.

- Без доказательства.

□

Теорема 5.7.3 (Свойства Гамма-функций).

▷ Имеют место следующие свойства:

1. Гамма-функция имеет смысл (определена) $\forall x > 0$;
2. $\tilde{\gamma}(x) \geq 0 - \forall x > 0$;
3. $\tilde{\gamma}(1) = 1$;
4. $\tilde{\gamma}(x+1) = x \cdot \tilde{\gamma}(x)$;
5. $\tilde{\gamma}(n) = (n-1)!$;
6. Формула дополнения: пусть $0 < x < 1$, тогда

$$\tilde{\gamma}(x) \cdot \tilde{\gamma}(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

▷ Доказательство.

1. Разложим на два слагаемых

$$\int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} \cdot t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$$

и пусть $0 < \alpha < 1$, тогда рассмотрим

$$\int_\alpha^1 e^{-t} \cdot t^{x-1} dt \leq \int_\alpha^1 t^{x-1} dt = \frac{(1-\alpha^x)}{x} < \frac{1}{x},$$

откуда видно, что существует

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_\alpha^1 e^{-t} \cdot t^{x-1} dt.$$

Дальше видно, что найдётся такое $p > 0$, что $\forall t > p: e^{-t} \cdot t^{x-1} < 1/t^2 - \forall x > 0$, откуда

$$\int_1^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt \leq \int_1^p e^{-t} \cdot t^{x-1} dt + \int_p^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt < \infty.$$

2. Это следует из того, что $e^{-t} \cdot t^{x-1} > 0$.
3. Просто из определения $\tilde{\gamma}(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$.
4. Пусть $0 < \alpha < \beta < \infty$, возьмём интеграл с такими пределами по частям

$$\int_\alpha^\beta e^{-t} \cdot t^x dt = -e^{-t} \cdot t^x \Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta e^{-t} \cdot x \cdot t^{x-1} dt$$

и перейдём к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, а потом при $\beta \rightarrow \infty$, видно, что останется

$$\tilde{\gamma}(x+1) = 0 + x \cdot \tilde{\gamma}(x).$$

5. Рассмотрим последовательно:

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(1) &= 1 = (1-1)!, \\ \tilde{\gamma}(2) &= 1 \cdot \tilde{\gamma}(1) = (2-1)!, \\ \tilde{\gamma}(3) &= 2 \cdot \tilde{\gamma}(2) = 2 \cdot 1 \cdot \tilde{\gamma}(1) = (3-1)! \\ &\vdots\end{aligned}$$

- Рассмотрим Бета-функцию и произведём подстановку $t = p/(1+p)$:

$$\begin{aligned}B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{p^{x-1}}{(1+p)^{x-1} \cdot (1+p)^{y-1}} \cdot \frac{dp}{(1+p)^2} dp = \\ &= \int_0^\infty \frac{p^{x-1}}{(1+p)^{x+y}} dp,\end{aligned}$$

теперь вспомним утверждение 5.7.2, подставляем в него $y = 1-x$ и получаем

$$\gamma(x) \cdot \gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{p^{x-1}}{1+p} dp$$

— интеграл Эйлера, подставляя его значение, приходим к формуле

$$B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin(x\pi)}.$$

□

Предметный указатель

Двойной интеграл, 132

Формула дополнения, 136

Интеграл зависящий от параметра, 127

Равномерная сходимость, 133

Равномерное стремление, 127

Литература

- [1] Лектор Кренделев Сергей Фёдорович.
- [2] Г. М. Фихтенгольц „Курс дифференциального и интегрального исчисления“.