Множества и операции над ними. Простейшие теоретико-множественные тождества.

Опр. 1 $x \in A$ принадлежность x множеству A; $A \subseteq B$ множество A содержится в множестве B, $\forall x\,(x \in A \to x \in B)$; $A = B$ два множества совпадают $\Leftrightarrow$ они имеют одни и те же элементы (принцип равнообъёмности) $\forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

Замечание 2

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $B \subseteq A$

Док-во:

$A = B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow \forall x\,((x \in A \to x \in B)$ и $(x \in B \to x \in A)) \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $B \subseteq A$;

Замечание 3: отношение включения – отношение частичного порядка.

а) $A \subseteq A$ рефлексивность

б) $A \subseteq B$ и $B \subseteq A \to A = B$ антисимметричность

в) $A \subseteq B$, $B \subseteq C \to A \subseteq C$ транзитивность

Док-во:

а) $\forall x\,(x \in A \to x \in A)$;

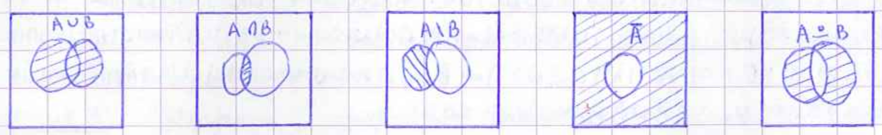
б) $A \subseteq B$ и $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in B)$ и $\forall x\,(x \in B \to x \in A) \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in B$ и $x \in B \to x \in A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow A = B$;

в) $A \subseteq B$ и $B \subseteq C \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in B)$ и $\forall x\,(x \in B \to x \in C) \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in B$ и $x \in B \to x \in C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in C) \Leftrightarrow A \subseteq C$;

Опр. 4 $\varnothing$ (пусто) – это множество, не содержащее ни одного элемента; $\mathcal{U}$ (universum) – это множество, в котором содержатся все элементы; $A \cup B \leftrightharpoons \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$; $A \cap B \leftrightharpoons \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$; $A \setminus B \leftrightharpoons \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$; $\overline{A} \leftrightharpoons \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}$; $A \dot{-} B \leftrightharpoons (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;



Замечание 5

$\varnothing$ – единственно

Док-во:

Замечание 6: теоретико-множественные тождества.

1) $A \cup B = B \cup A$ } коммутативность
2) $A \cap B = B \cap A$ }
3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ } ассоциативность
4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ }
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ } дистрибутивность
6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ }
7) $A \cup A = A$ } идемпотентность
8) $A \cap A = A$ }
9) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ } законы де Моргана
10) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ }
11) $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$
12) $A \cap \overline{A} = \varnothing$
13) $A \cup \varnothing = A$
14) $A \cap \varnothing = \varnothing$
15) $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
16) $A \cap \mathcal{U} = A$
17) $\overline{\overline{A}} = A$
18) $A \dot{-} B = B \dot{-} A$
19) $(A \dot{-} B) \dot{-} C = A \dot{-} (B \dot{-} C)$
20) $A \dot{-} A = \varnothing$
21) $A \dot{-} \varnothing = A$
22) $A \cap B = \varnothing \to A \dot{-} B = A \cup B$
23) $\overline{\varnothing} = \mathcal{U}$
24) $\overline{\mathcal{U}} = \varnothing$

Док-во:

1) $x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B \Leftrightarrow x \in B$ или $x \in A \Leftrightarrow x \in (B \cup A)$;

2) $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in B \Leftrightarrow x \in B$ и $x \in A \Leftrightarrow x \in (B \cap A)$;

3) $x \in (A \cup (B \cup C)) \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$ или $x \in C \Leftrightarrow (x \in A$ или $x \in B)$ или $x \in C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ или $x \in C \Leftrightarrow x \in ((A \cup B) \cup C)$;

4) $x \in (A \cap (B \cap C)) \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in B$ и $x \in C \Leftrightarrow (x \in A$ и $x \in B)$ и $x \in C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B)$ и $x \in C \Leftrightarrow x \in ((A \cap B) \cap C)$;

5) $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A$ или $(x \in B$ и $x \in C) \Leftrightarrow (x \in A$ или $x \in B)$ и $(x \in A$ или $x \in C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ и $x \in (A \cup C) \Leftrightarrow x \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))$;

6) $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ и $(x \in B$ или $x \in C) \Leftrightarrow (x \in A$ и $x \in B)$ или $(x \in A$ и $x \in C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in (A \cap B)$ или $x \in (A \cap C) \Leftrightarrow x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$;

7) $x \in (A \cup A) \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in A \Leftrightarrow x \in A$;

8) $x \in (A \cap A) \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in A \Leftrightarrow x \in A$;

9) $x \in (\overline{A \cup B}) \Leftrightarrow x \in U$ и $x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \in U$ и $(x \notin A$ или $x \notin B) \Leftrightarrow (x \in U$ и $x \notin A)$ или $(x \in U$ и $x \notin B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \overline{A}$

10) $x \in (\overline{A \cap B}) \Leftrightarrow$

11) $x \in (A \cup \overline{A}) \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in A$ или $(x \in U$ и $x \notin A) \Leftrightarrow (x \in A$ или $x \in U)$ и $(x \in A$ или $x \notin A) \Leftrightarrow x \in U$;

12) $x \in (A \cap \overline{A}) \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in \varnothing$;

13) $x \in (A \cup \varnothing) \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in \varnothing \Leftrightarrow x \in A$;

14) $x \in (A \cap \varnothing) \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in \varnothing \Leftrightarrow x \in \varnothing$;

15) $x \in (A \cup U) \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in U \Leftrightarrow x \in U$;

16) $x \in (A \cap U) \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in U \Leftrightarrow x \in A$;

17) $x \in \overline{\overline{A}} \Leftrightarrow x \in U$ и $x \notin \overline{A} \Leftrightarrow x \in U$ и $(x \in U$ и $x \in A) \Leftrightarrow x \in A$;

18) $x \in (A \dot- B) \Leftrightarrow x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \Leftrightarrow x \in ((B \setminus A) \cup (A \setminus B)) \Leftrightarrow x \in (B \dot- A)$;

19) $((A \dot- B) \dot- C) = (A \dot- (B \dot- C)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ((((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \setminus C) \cup (C \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)))) = (((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})) \cap \overline{C}) \cup (C \cap (\overline{A \setminus B}) \cap (\overline{B \setminus A}))) =$

$= ((A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{B} \cup A))) = ((A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap ((\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap A) \cup (B \cap A)))) =$

$= ((A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (C \cap A \cap B)) = ((A \dot- B) \dot- C)$;

$((A \setminus ((B \setminus C) \cup (C \setminus B))) \cup (((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) \setminus A)) = ((A \cap \overline{((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B}))}) \cup ((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})) \cap \overline{A})) =$

$= ((A \cap (\overline{B \cap \overline{C}}) \cap (\overline{C \cap \overline{B}})) \cup ((((B \cap \overline{C}) \cup C) \cap ((B \cap \overline{C}) \cup \overline{B})) \cap \overline{A}) = ((A \cap (\overline{B} \cup C) \cap (\overline{C} \cup B)) \cup (((B \cup C) \cap (\overline{C} \cup C) \cap (B \cup \overline{B}) \cap (\overline{C} \cup \overline{B})) \cap \overline{A})) =$

$= (A \cap ((\overline{B} \cap (\overline{C} \cup B)) \cup (C \cap (\overline{C} \cup B)))) \cup (((B \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{A})) \cap (\overline{C} \cup \overline{B})) = ((\overline{B} \cap \overline{C} \cap A) \cup (A \cap C \cap B) \cup (B \cap \overline{A} \cap (\overline{C} \cup \overline{B})) \cup (C \cap \overline{A} \cap (\overline{C} \cup \overline{B}))) =$

$= ((\overline{B} \cap \overline{C} \cap A) \cup (A \cap C \cap B) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B})) = (A \dot- (B \dot- C))$;

20) $x \in (A \dot- A) \Leftrightarrow x \in ((A \setminus A) \cup (A \setminus A)) \Leftrightarrow x \in (A \setminus A)$ или $x \in (A \setminus A) \Leftrightarrow x \in \varnothing$;

21) $x \in (A \dot- \varnothing) \Leftrightarrow x \in ((A \setminus \varnothing) \cup (\varnothing \setminus A)) \Leftrightarrow x \in (A \setminus \varnothing)$ или $x \in (\varnothing \setminus A) \Leftrightarrow (x \in A$ и $x \notin \varnothing)$ или $(x \in \varnothing$ и $x \notin A) \Leftrightarrow x \in A$;

22) $A \cap B = \varnothing \to A \dot- B = A \cup B$, $\overline{A \cap B} = U = \overline{\varnothing}$

$x \in (A \dot- B) \Leftrightarrow x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \Leftrightarrow (x \in A$ и $x \notin B)$ или $(x \in B$ и $x \notin A) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A$ или $(x \in B$ и $x \notin A))$ и $(x \notin B$ или $(x \notin A$ и $x \in B)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A$ или $x \in B)$ и $(x \in A$ или $x \notin A)$ и $(x \notin B$ или $x \in B)$ и $(x \notin B$ или $x \notin A) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in ((A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) \Leftrightarrow x \in ((A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})) \Leftrightarrow x \in U \cap (A \cup B) \Leftrightarrow x \in (A \cup B)$;

23) $\overline{\varnothing} = U$ если $\varnothing$ не содержит элементов, то $\overline{\varnothing}$ будет содержать все элементы;

24) $\overline{U} = \varnothing$ если U содержит все элементы, то $\overline{U}$ не будет содержать ни одного элемента;

Язык логики высказываний. Понятие формулы. Таблицы истинности. Эквивалентность формул. Связь теоретико-множественных тождеств и тождеств логики высказываний. Основные тождества логики высказываний и теории множеств. Нормальные форм. Приведение формул к СДНФ и СКНФ.

Опр. 1 A, B, C – пропозициональные переменные; A, B, C ∈ {истина, ложь}; логические связки двуместные: ∨ (дизъюнкция) – или, ∧(&) (конъюнкция) – и, → (импликация) – следование, если…, то…; одноместные: ¬ (отрицание) – не.

∨ (A \ B)	И	Л
И	И	И
Л	И	Л

& (A \ B)	И	Л
И	И	Л
Л	Л	Л

→ (A \ B)	И	Л
И	И	Л
Л	И	И

↔ (A \ B)	И	Л
И	И	Л
Л	Л	И

A	¬A
И	Л
Л	И

Опр. 2 Формулы логики высказываний:

1) пропозициональная переменная является формулой.
2) если φ, ψ – формулы, то $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \& \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$ – формулы.
3) других формул нет.

Опр. 3 Часть формулы, которая сама является формулой наз. подформулой данной формулы.

Опр. 4 Формула наз. тождественно истинной, если она принимает значение "истины" при всех значениях входящих в неё пропозициональных переменных;
Формула наз. тождественно ложной, если она принимает значение "ложь" при всех значениях входящих в неё пропозициональных переменных;
Формула наз. выполнимой, если она не является тождественно ложной;
Формула наз. опровержимой, если она не является тождественно истинной;

Замечание 5

а) если формула Т.И., то она выполнима.
б) если формула Т.Л., то она опровержима.

Док-во:

а) пусть φ – Т.И. $\Leftrightarrow \varphi$ не Т.Л. $\Rightarrow \varphi$ – выполнима.
б) пусть φ – Т.Л. $\Leftrightarrow \varphi$ не Т.И. $\Rightarrow \varphi$ – опровержима.

Замечание 6

а) φ – Т.И. $\Leftrightarrow \neg\varphi$ – Т.Л.
б) φ – вып. $\Leftrightarrow \neg\varphi$ – опровержима.

Док-во:

а) φ – Т.И. $\Leftrightarrow \neg(\varphi$ – Т.И.$) \Leftrightarrow \forall$ значения пропозициональных переменных $\neg\varphi$ "не истина"
$\Leftrightarrow \neg\varphi$ – Т.Л.

б) φ – выполнимо $\Leftrightarrow \exists$ значение пропозициональных переменных такие, что φ – истина, тогда $\neg\varphi$ – при этом же значении пропозициональных переменных – ложно $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \neg\varphi$ – опровержимо.

Предложение 7 Следующие формулы являются тождественно истинными:

а) $(A \to (B \to A))$
б) $((A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C)))$
в) $((A \wedge B) \to A)$
г) $((A \wedge B) \to B)$
д) $((A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \& C))))$
е) $(A \to (A \vee B))$
ж) $(B \to (A \vee B))$
з) $((A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \& B) \to C)))$
и) $((A \to \neg B) \to (B \to \neg A))$
к) $(\neg\neg A \to A)$
л) $(A \to \neg\neg A)$
м) $((A \to B) \vee (B \to A))$
н) $((A \to B) \vee (A \to \neg B))$
о) $(A \vee \neg A)$ – закон исключённого третьего
п) $(\neg(A \& \neg A))$
о, п – законы Аристотеля.

Док-во:

а)

A	B	(B→A)	(A→(B→A))
И	И	И	И
И	Л	И	И
Л	И	Л	И
Л	Л	И	И

в)

A	B	(A&B)	((A&B)→A)
И	И	И	И
И	Л	Л	И
Л	И	Л	И
Л	Л	Л	И

г)

A	B	(A&B)	((A&B)→B)
И	И	И	И
И	Л	Л	И
Л	И	Л	И
Л	Л	Л	И

б)

A	B	C	(A→B)	(B→C)	(A→C)	(A→(B→C))	((A→(B→C))→(A→C))	((A→B)→((A→(B→C))→(A→C)))
И	И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	Л	Л	Л	И	И
И	Л	И	Л	И	И	И	И	И
Л	И	И	И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	И	Л	И
Л	И	Л	И	Л	И	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И	И	И	И
Л	Л	Л	И	И	И	И	И	И

е)

A	B	$(A \lor B)$	$(A \to (A \lor B))$
И	И	И	И
И	Л	И	И
Л	И	И	И
Л	Л	Л	И

ж)

A	B	$(A \lor B)$	$(B \to (A \lor B))$
И	И	И	И
И	Л	И	И
Л	И	И	И
Л	Л	Л	И

к)

A	$\neg A$	$\neg\neg A$	$(\neg\neg A \to A)$
И	Л	И	И
Л	И	Л	И

д)

A	B	C	$(A \to B)$	$(A \to C)$	$(B \& C)$	$(A \to (B \& C))$	$((A \to C) \to (A \to (B \& C)))$	$((A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \& C))))$
И	И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	Л	Л	Л	И	И
И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	И
Л	И	И	И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	И	И
Л	И	Л	И	И	Л	И	И	И
Л	Л	И	И	И	Л	И	И	И
Л	Л	Л	И	И	Л	И	И	И

з)

A	B	C	$(A \to C)$	$(B \to C)$	$(A \& B)$	$((A \& B) \to C)$	$((B \to C) \to ((A \& B) \to C))$	$((A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \& B) \to C)))$
И	И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	Л	Л	И	Л	И	И
И	Л	И	И	И	Л	И	И	И
Л	И	И	И	И	Л	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	И	И	И
Л	И	Л	И	Л	Л	И	И	И
Л	Л	И	И	И	Л	И	И	И
Л	Л	Л	И	И	Л	И	И	И

и)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(A \to \neg B)$	$(B \to \neg A)$	$((A \to \neg B) \to (B \to \neg A))$
И	И	Л	Л	Л	Л	И
И	Л	Л	И	И	И	И
Л	И	И	Л	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И	И

л)

A	$\neg A$	$\neg\neg A$	$(A \to \neg\neg A)$
И	Л	И	И
Л	И	Л	И

м)

A	B	$(A \to B)$	$(B \to A)$	$((A \to B) \lor (B \to A))$
И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	И
Л	И	И	Л	И
Л	Л	И	И	И

н)

A	B	$\neg B$	$(A \to B)$	$(A \to \neg B)$	$((A \to B) \lor (A \to \neg B))$
И	И	Л	И	Л	И
И	Л	И	Л	И	И
Л	И	Л	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И

о)

A	$\neg A$	$(A \lor \neg A)$
И	Л	И
Л	И	И

п)

A	$\neg A$	$(A \& \neg A)$	$\neg(A \& \neg A)$
И	Л	Л	И
Л	И	Л	И

Опр.8 Двуместное отношение тильда (~) наз. отношением эквивалентности на множестве A, если $\forall a, b, c \in A$ выполняется:

а) $a \sim a$ рефлексивность

б) $(a \sim b) \to (b \sim a)$ симметричность

в) $(a \sim b,\ b \sim c) \to (a \sim c)$ транзитивность

Опр.9 Две формулы наз. эквивалентными, если они принимают одинаковые значения при одних и тех же значениях пропозициональных переменных, $\varphi \sim \varphi$.

Замечание 10: $\varphi \sim \psi$ – это отношение эквивалентности

а) $\varphi \sim \varphi$

б) $(\varphi \sim \psi,\ \psi \sim \xi) \to (\varphi \sim \xi)$

в) $(\varphi \sim \psi) \to (\psi \sim \varphi)$

Предложение 11

1) $(A \lor B) \sim (B \lor A)$
2) $(A \& B) \sim (B \& A)$ } коммутативность
3) $(A \lor (B \lor C)) \sim ((A \lor B) \lor C)$
4) $(A \& (B \& C)) \sim ((A \& B) \& C)$ } ассоциативность
5) $(A \lor (B \& C)) \sim ((A \lor B) \& (A \lor C))$
6) $(A \& (B \lor C)) \sim ((A \& B) \lor (A \& C))$ } дистрибутивность
7) $(A \lor A) \sim A$
8) $(A \& A) \sim A$ } идемпотентность
9) $\neg(A \lor B) \sim (\neg A \& \neg B)$
10) $\neg(A \& B) \sim (\neg A \lor \neg B)$ } законы де Моргана
11) $(A \to B) \sim (\neg A \lor B)$
12) $\neg\neg A \sim A$
13) $(A \to \neg B) \sim (B \to \neg A)$
14) $(A \to \neg B) \sim \neg(A \& B)$
15) $(A \lor (A \& B)) \sim A$
16) $(A \& (A \lor B)) \sim A$
17) $(A \lor (B \& \neg B \& C)) \sim A$
18) $(A \& (B \lor \neg B \lor C)) \sim A$

Док-во:

1)

A	B	$(A \lor B)$	$(B \lor A)$
И	И	И	И
И	Л	И	И
Л	И	И	И
Л	Л	Л	Л

2)

A	B	$(A \& B)$	$(B \& A)$
И	И	И	И
И	Л	Л	Л
Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	Л

7)

A	$(A \lor A)$
И	И
Л	Л

8)

A	$(A \& A)$
И	И
Л	Л

3)

A	B	C	$(B \lor C)$	$(A \lor (B \lor C))$	$(A \lor B)$	$((A \lor B) \lor C)$
И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И	И	И
И	Л	И	И	И	И	И
Л	И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	И	И
Л	И	Л	И	И	И	И
Л	Л	И	И	И	Л	И
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

4)

A	B	C	$(A \& B)$	$((A \& B) \& C)$	$(B \& C)$	$(A \& (B \& C))$
И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	Л	Л	Л
И	Л	И	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	Л	Л	И	Л
И	Л	Л	Л	Л	Л	Л
Л	И	Л	Л	Л	Л	Л
Л	Л	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

5)

A	B	C	$(B \& C)$	$(A \lor (B \& C))$	$(A \lor B)$	$(A \lor C)$	$((A \lor B) \& (A \lor C))$
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	Л	И	И	И	И
И	Л	И	Л	И	И	И	И
Л	И	И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	И	И	И
Л	И	Л	Л	Л	И	Л	Л
Л	Л	И	Л	Л	Л	И	Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

9)

A	B	$(A \lor B)$	$\neg(A \lor B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \& \neg B)$
И	И	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	И	Л	Л	И	Л
Л	И	И	Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	И	И	И	И

10)

A	B	$(A \& B)$	$\neg(A \& B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \lor \neg B)$
И	И	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	Л	И	И
Л	И	Л	И	И	Л	И
Л	Л	Л	И	И	И	И

6)

A	B	C	$(B \lor C)$	$(A \& (B \lor C))$	$(A \& B)$	$(A \& C)$	$((A \& B) \lor (A \& C))$
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И	И	Л	И
И	Л	И	И	И	Л	И	И
Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

11)

A	B	$(A \to B)$	$\neg A$	$(\neg A \lor B)$
И	И	И	Л	И
И	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	И	И
Л	Л	И	И	И

12)

A	$\neg A$	$\neg\neg A$
И	Л	И
Л	И	Л

13)

A	B	¬A	¬B	$(A \to \neg B)$	$(B \to \neg A)$
И	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	И	И
Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И	И

14)

A	B	¬B	$(A \to \neg B)$	$(A \& B)$	$\neg(A \& B)$
И	И	Л	Л	И	Л
И	Л	И	И	Л	И
Л	И	Л	И	Л	И
Л	Л	И	И	Л	И

15)

A	B	$(A \& B)$	$A \vee (A \& B)$
И	И	И	И
И	Л	Л	И
Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	Л

17)

A	B	C	¬B	$(B \& \neg B)$	$((B \& \neg B) \& C)$	$(A \vee ((B \& \neg B) \& C))$
И	И	И	Л	Л	Л	И
И	И	Л	Л	Л	Л	И
И	Л	И	И	Л	Л	И
Л	И	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	Л	Л	И
Л	И	Л	Л	Л	Л	Л
Л	Л	И	И	Л	Л	Л
Л	Л	Л	И	Л	Л	Л

16)

A	B	$(A \vee B)$	$(A \& (A \vee B))$
И	И	И	И
И	Л	И	И
Л	И	И	Л
Л	Л	Л	Л

18)

A	B	C	¬B	$(B \vee \neg B)$	$((B \vee \neg B) \vee C)$	$(A \& ((B \vee \neg B) \vee C))$
И	И	И	Л	Л	И	И
И	И	Л	Л	Л	Л	И
И	Л	И	И	Л	И	И
Л	И	И	Л	Л	И	Л
И	Л	Л	И	Л	И	И
Л	И	Л	Л	Л	Л	Л
Л	Л	И	И	Л	И	Л
Л	Л	Л	И	Л	И	Л

Опр. 12 теоретико-множественные термы:

A, B, C – множества, тогда:

а) A, B, C – термы

б) если t_1, t_2 – термы, то $(t_1 \cup t_2)$, $(t_1 \cap t_2)$, $\bar{t}$ – термы.

в) других термов нет.

Опр. 13 $T \leftrightharpoons \{t \mid t$ – теоретико-множественный терм$\}$, $F \leftrightharpoons \{\varphi \mid \varphi$ – формула логики высказываний$\}$, $\rho: T \to F$ и выполнено:

$$\begin{cases} \rho(A) \leftrightharpoons A \\ \rho(t_1 \cup t_2) \leftrightharpoons (\rho(t_1) \vee \rho(t_2)) \\ \rho(t_1 \cap t_2) \leftrightharpoons (\rho(t_1) \& \rho(t_2)) \\ \rho(\bar{t_1}) \leftrightharpoons \neg \rho(t_1) \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 14

$t_1(A_1, \ldots, A_n), t_2(A_1, \ldots, A_n) \in T$, тогда $\forall A_1, \ldots, A_n \quad t_1 = t_2 \Leftrightarrow \rho(t_1) \sim \rho(t_2)$

Док-во:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15

пусть $t(A_1, \ldots, A_n) \in T$, тогда $x \in t \Leftrightarrow [\rho(t)]^{A_1, \ldots, A_n}_{x \in A_1, \ldots, x \in A_n}$ – операция замены

Док-во: ведётся по индукции.

1) $t = A$, $x \in t \Leftrightarrow x \in A$, $\rho(t) = \rho(A) = A$

$[\rho(t)]^{A}_{x \in A} = x \in A$; $x \in A \Leftrightarrow x \in A$

2) $t = (t_1 \cup t_2)$

$x \in t \Leftrightarrow x \in (t_1 \cup t_2) \Leftrightarrow x \in t_1$ или $x \in t_2 \Leftrightarrow [\rho(t_1)]^{A_1, \ldots, A_n}_{x \in A_1, \ldots, x \in A_n}$ или $[\rho(t_2)]^{A_1, \ldots, A_n}_{x \in A_1, \ldots, x \in A_n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\rho(t_1)]^{A_1, \ldots, A_n}_{x \in A_1, \ldots, x \in A_n} \vee [\rho(t_2)]^{A_1, \ldots, A_n}_{x \in A_1, \ldots, x \in A_n} \Leftrightarrow [(\rho(t_1) \vee \rho(t_2))]^{A_1, \ldots, A_n}_{x \in A_1, \ldots, x \in A_n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\rho(t_1 \cup t_2)]^{A_1, \ldots, A_n}_{x \in A_1, \ldots, x \in A_n} \Leftrightarrow [\rho(t)]^{A_1, \ldots, A_n}_{x \in A_1, \ldots, x \in A_n}$

3) $t = (t_1 \cap t_2)$

$x \in t \Leftrightarrow x \in (t_1 \cap t_2) \Leftrightarrow x \in t_1$ и $x \in t_2 \Leftrightarrow [\rho(t_1)]^{A_1, \ldots, A_n}_{x \in A_1, \ldots, x \in A_n}$ и $[\rho(t_2)]^{A_1, \ldots, A_n}_{x \in A_1, \ldots, x \in A_n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\rho(t_1)]^{A_1, \ldots, A_n}_{x \in A_1, \ldots, x \in A_n} \& [\rho(t_2)]^{A_1, \ldots, A_n}_{x \in A_1, \ldots, x \in A_n} \Leftrightarrow [\rho(t_1 \cap t_2)]^{A_1, \ldots, A_n}_{x \in A_1, \ldots, x \in A_n} \Leftrightarrow [\rho(t)]^{A_1, \ldots, A_n}_{x \in A_1, \ldots, x \in A_n}$

4) $t = \bar{t_1}$

$x \in t \Leftrightarrow x \in (\bar{t_1}) \Leftrightarrow x \notin t_1 \Leftrightarrow [\rho(t_1)]^{A_1, \ldots, A_n}_{x \notin A_1, \ldots, x \notin A_n} \Leftrightarrow \neg [\rho(t_1)]^{A_1, \ldots, A_n}_{x \in A_1, \ldots, x \in A_n} \Leftrightarrow [\neg \rho(t_1)]^{A_1, \ldots, A_n}_{x \in A_1, \ldots, x \in A_n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\rho(\bar{t_1})]^{A_1, \ldots, A_n}_{x \in A_1, \ldots, x \in A_n} \Leftrightarrow [\rho(t)]^{A_1, \ldots, A_n}_{x \in A_1, \ldots, x \in A_n}$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16

$\rho(t_1) \sim \rho(t_2)$, то $\forall A_1, \ldots, A_n \quad t_1 = t_2$

Док-во:

предположим, что это не верно, т.е. будем доказывать от противного.

$\exists A_1', \ldots, A_n' \quad t_1 \neq t_2 \Rightarrow \exists a \in t_1$ и $a \notin t_2 \Rightarrow [\rho(t_1)]^{A_1, \ldots, A_n}_{a \in A_1', \ldots, a \in A_n'}$ – верно и $[\rho(t_2)]^{A_1, \ldots, A_n}_{a \in A_1', \ldots, a \in A_n'}$ – не верно

$i \leq n$

$$A_i = \begin{cases} И, \text{ если } a \in A_i' \\ Л, \text{ если } a \notin A_i' \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \rho(t_1) - И \\ \rho(t_2) - Л \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \rho(t_1) \nsim \rho(t_2) \text{ – противоречие}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17

$\forall A_1, \ldots, A_n \quad t_1 = t_2$, то $\rho(t_1) \sim \rho(t_2)$

Док-во:

доказывается от противного.

$\rho(t_1) \nsim \rho(t_2)$, т.е. $\exists A_1', \ldots, A_n'$ $\begin{cases} \rho(t_1) - И \\ \rho(t_2) - Л \end{cases}$

$i \leq n$

$$A_i' = \begin{cases} \{1\}, \text{ если } A_i - И \\ \varnothing, \text{ если } A_i - Л \end{cases} \qquad \begin{matrix} A_i - И \Leftrightarrow 1 \in A_i' \\ A_i - Л \Leftrightarrow 1 \notin A_i' \end{matrix}$$

$[\rho(t_1)]^{A_1, \ldots, A_n}_{1 \in A_1', \ldots, 1 \in A_n'}$ – верно, $[\rho(t_2)]^{A_1, \ldots, A_n}_{1 \in A_1', \ldots, 1 \in A_n'}$ – не верно $\Rightarrow 1 \in t_1$ и $1 \notin t_2 \Rightarrow t_1 \neq t_2$

возникло противоречие.

ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА.

Опр. 18 Ψ – формула, через $[\Psi]^{\varphi}_{\xi}$ обозначаем формулу в которой в формуле Ψ все φ заменены на ξ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19

если $\varphi \sim \xi$, то $\Psi \sim [\Psi]^{\varphi}_{\xi}$

Док-во:

1) $\Psi = \varphi \Rightarrow [\Psi]^{\varphi}_{\xi} = \xi \Rightarrow \Psi \sim [\Psi]^{\varphi}_{\xi}$

Ψ не содержит $\varphi \Rightarrow [\Psi]^{\varphi}_{\xi} = \Psi \Rightarrow \Psi \sim [\Psi]^{\varphi}_{\xi}$

2) Для любой Ψ' у которой $m \leq k$ – количество связок – утверждение верно, делаем индукционный шаг:

$\Psi = (\Psi_1 \& \Psi_2)$, $\Psi = (\Psi_1 \vee \Psi_2)$, $\Psi = (\Psi_1 \to \Psi_2)$, $\Psi = \neg\Psi_1$

$[\Psi]^{\varphi}_{\xi} = [\Psi_1]^{\varphi}_{\xi} \& [\Psi_2]^{\varphi}_{\xi}$ – утверждение теоремы верно, т.к. количество связок в Ψ_1 и Ψ_2 меньше, чем в Ψ, то индукционное положение верно.

$[\Psi]^{\varphi}_{\xi} = [\Psi_1]^{\varphi}_{\xi} \vee [\Psi_2]^{\varphi}_{\xi}$, $(\Psi)^{\varphi}_{\xi} = [\Psi_1]^{\varphi}_{\xi} \to [\Psi_2]^{\varphi}_{\xi}$, $[\Psi]^{\varphi}_{\xi} = \neg[\Psi_1]^{\varphi}_{\xi}$

$$\begin{rcases} \Psi_1 \sim [\Psi_1]^{\varphi}_{\xi} \\ \Psi_2 \sim [\Psi_2]^{\varphi}_{\xi} \end{rcases} \Rightarrow \Psi_1 \& \Psi_2 \sim [\Psi_1]^{\varphi}_{\xi} \& [\Psi_2]^{\varphi}_{\xi}$$

если $\Psi_1 \sim \Psi_1'$, $\Psi_2 \sim \Psi_2'$, то $\Psi_1 \vee \Psi_2 \sim \Psi_1' \vee \Psi_2'$, $\Psi_1 \& \Psi_2 \sim \Psi_1' \& \Psi_2'$, $\Psi_1 \to \Psi_2 \sim \Psi_1' \to \Psi_2'$, $\neg\Psi_1 \sim \neg\Psi_1'$

$\Psi_1 \sim [\Psi_1]^{\Psi_1}_{\Psi_1'} = \Psi_1'$, $\Psi_2 \sim (\Psi_2)^{\Psi_2}_{\Psi_2'} = \Psi_2'$ – в силу предложения 19, тогда:

$\Psi_1 \vee \Psi_2 \sim [\Psi_1]^{\Psi_1}_{\Psi_1'} \vee [\Psi_2]^{\Psi_1}_{\Psi_1'} \sim \Psi_1' \vee \Psi_2 \sim [\Psi_1']^{\Psi_2}_{\Psi_2'} \vee (\Psi_2)^{\Psi_2}_{\Psi_2'} \sim \Psi_1' \vee \Psi_2'$

$\Psi_1 \& \Psi_2 \sim [\Psi_1]^{\Psi_1}_{\Psi_1'} \& [\Psi_2]^{\Psi_1}_{\Psi_1'} \sim \Psi_1' \& \Psi_2 \sim [\Psi_1']^{\Psi_2}_{\Psi_2'} \& [\Psi_2]^{\Psi_2}_{\Psi_2'} \sim \Psi_1' \& \Psi_2'$

$\Psi_1 \to \Psi_2 \sim [\Psi_1]^{\Psi_1}_{\Psi_1'} \to [\Psi_2]^{\Psi_1}_{\Psi_1'} \sim \Psi_1' \to \Psi_2 \sim [\Psi_1']^{\Psi_2}_{\Psi_2'} \to [\Psi_2]^{\Psi_2}_{\Psi_2'} \sim \Psi_1' \to \Psi_2'$

$\neg\Psi_1 \sim \neg[\Psi_1]^{\Psi_1}_{\Psi_1'} \sim \neg\Psi_1'$

следствие 20

Для всякой формулы φ можно построить равносильную φ формулу φ' такую, что φ' не содержит импликации, т.е. $\forall \varphi \exists \varphi' : \varphi \sim \varphi'$, φ' - не содержит '$\Rightarrow$'.

Док-во:

$(A \to B) \sim (\neg A \vee B)$

$[\varphi]^{A \to B}_{\neg A \vee B}$ - при замене будут равносильные формулы.

опр. 21 φ наз. формулой с тесным отрицанием, если она не содержит знака импликации и знак отрицания стоит перед пропозициональными переменными.

опр. 22 Элементарной конъюнкцией наз. конъюнкция пропозициональных переменных или их отрицаний.

опр. 23 Элементарной дизъюнкцией наз. дизъюнкция пропозициональных переменных или их отрицаний.

опр. 24 Дизъюнктивной нормальной формой наз. дизъюнкция элементарных конъюнкций.

опр. 25 Конъюнктивной нормальной формой наз. конъюнкция элементарных дизъюнкций.

теорема 26 Для любой формулы Φ существует φ_1 - ДНФ, φ_2 - КНФ так, что $\Phi \sim \varphi_1$ и $\Phi \sim \varphi_2$.

Док-во:

1) $(A \to B) \sim (\neg A \vee B)$ - избавляемся от импликации
2) $\left.\begin{array}{l}\neg(A \vee B) \sim (\neg A \& \neg B) \\ \neg(A \& B) \sim (\neg A \vee \neg B)\end{array}\right\}$ - используем законы Де'Моргана
3) используем законы дистрибутивности:
$(A \& (B \vee C)) \sim ((A \& B) \vee (A \& C))$, $(A \vee (B \& C)) \sim ((A \vee B) \& (A \vee C))$

Для каждой формулы существует бесконечное количество КНФ или ДНФ.

опр. 27 ДНФ наз. совершённой ДНФ, если любая переменная, содержащаяся в этой формуле, входит в каждую её элементарную конъюнкцию ровно один раз либо с отрицанием, либо без него.

опр. 28 КНФ наз. совершённой КНФ, если любая переменная, содержащаяся в этой формуле, входит в каждую её элементарную дизъюнкцию ровно один раз либо с отрицанием, либо без него.

теорема 29 для всякой выполнимой формулы $\exists!$ равносильная ей СДНФ.

Док-во:

φ - формула, $\varphi(A_1, \dots, A_n)$. Строим таблицу истинности для формулы φ.

A_1	A_2	...	A_n	$\varphi(A_1, \dots, A_n)$
И	И	...	И	И
...	...	...	...	...
И	Л	...	И	И
...	...	...	...	...
Л	Л	...	Л	Л

Выписываем строки, где значение φ - истина.
$(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n) \vee (A_1 \& \neg A_2 \& \dots \& A_n) \vee \dots$
Данная формула равносильная исходной, т.к. имеет такую же таблицу истинности.
Очевидно, что у т.л. формулы нет СДНФ.

теорема 30 каждая опровержимая формула имеет единственную равносильную ей СКНФ.

Док-во:

аналогично; строим таблицу истинности; теперь же выписываем те строки, в которых φ - ложна. $(A_1 \vee \dots \vee A_n) \& (A_1 \vee \neg A_2 \vee \dots \vee A_n) \& \dots$

У т.и. формулы нет СКНФ.

предложение 31: о марсианской логике

Для любой логической функции $f: \{И, Л\}^n \to \{И, Л\}$ $\exists$ формула $\varphi \mid \varphi$ и f имеют одну и ту же таблицу истинности, т.е. $\forall$ логической функции $\exists$ формула логики высказываний, которая представляет эту функцию.

Док-во:

$f = f(A_1, \dots, A_n)$, тогда: а) если не верно $f \equiv Л$, то возьмём φ - СДНФ, соответствующую этой таблице истинности; б) если $f \equiv Л$, то возьмём СКНФ.

Это свойство означает, что набор логических связок $\&, \vee, \neg$ является полным.

Понятие алгебраической системы, алгебры, модели. Примеры. Логика предикатов. Термы и формулы логики предикатов. Истинность формулы на модели. Тождественно истинные и выполнимые формулы. Семантическая эквивалентность формул. Основные свойства логики предикатов.

опр.1 Алгебраическая система состоит из основного множества и $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ - предикатных символов, $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ - функциональных символов, $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ - константных символов, где (P_n, f_n, c_n) - сигнатура алгебраической системы. $\mathfrak{N} = \langle N; \underbrace{\leq}_{P_1}, \underbrace{+}_{f_1}, \underbrace{*}_{f_1}, \underbrace{0}_{c_1} \rangle$

опр.2 Прямым произведением множеств A и B наз. все пары из элементов множеств A и B.
$A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A$ и $b \in B\}$
$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{\langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid a_i \in A_i\}$

опр.3 Подмножество декартового произведения $P \subseteq A^n$ наз. n-местным отношением.

опр.4 Функциональные символы $f: A^n \to A$ - n-местная функция или операция.
$f(a_1, \dots, a_n) = b \Leftrightarrow P(a_1, a_2, \dots, a_n, b)$ - истина.

буквы $\mathfrak{A} \leftrightarrow A$, $\mathfrak{B} \leftrightarrow B$, $\mathfrak{C} \leftrightarrow C$, $\mathfrak{L} \leftrightarrow L$, $\mathfrak{M} \leftrightarrow M$, $\mathfrak{N} \leftrightarrow N$.
$\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle = \langle A; P_1^{r_1}, \dots, P_n^{r_n}, f_1^{s_1}, \dots, f_e^{s_e}, c_1, \dots, c_k \rangle$, σ - сигнатура
если $\sigma = \langle f_1^{s_1}, \dots, f_e^{s_e}, c_1, \dots, c_k \rangle$, то $\langle A; \sigma \rangle$ - алгебраическая система,
если $\sigma = \langle P_1^{r_1}, \dots, P_n^{r_n} \rangle$, то $\langle A; \sigma \rangle$ - модель.

опр.5 График функции $f: A^n \to A$ $\Gamma_f \subseteq \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid f(x_1, \dots, x_n) = x_{n+1}\}$, $\Gamma_f \subseteq A^{n+1}$, $\Gamma_c \subseteq \{c\}$.

опр.6 Термы сигнатуры σ:
1) если x - переменная, то x - терм.
2) $c \in \sigma \Rightarrow c$ - терм; $f^n \in \sigma$, $t_1, \dots, t_n$ - термы $\Rightarrow f^n(t_1, \dots, t_n)$ - терм.
3) других термов нет.

Терм - это осмысленное выражение, состоящее из символов - переменных, символов - функций, констант сигнатуры σ и скобок. Значением терма является элемент модели.

опр.7 Формулы сигнатуры σ:
1) если $t_1, \dots, t_n$ - термы, то $(t_1 = t_2)$ - формула, $p^n \in \sigma$, то $p^n(t_1, \dots, t_n)$ - формула.
2) если φ, ψ - формулы, то $(\varphi \vee \psi)$, $(\psi \& \varphi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$, $\forall x \varphi$, $\exists x \varphi$ - формулы.
3) других формул нет.

опр.8 Часть формулы, которая сама является формулой, наз. подформулой данной формулы.

опр.9 Если $\forall x \Psi$, $\exists x \Psi$ является подформулой формулы φ, то говорят, что формула Ψ является областью действия квантора, соответственно $\forall x \Psi$, $\exists x \Psi$.

Вхождением переменной в формулу наз. вхождение этой переменной в какой-либо из термов.

Вхождение переменной в формулу наз. связанным, если она находится в области действия квантора по этой переменной.

Вхождение переменной в формулу наз. свободным, если оно не является связанным.

Переменная, которая имеет хотя бы одно свободное вхождение в формулу, наз. свободной переменной данной формулы.

Переменная, входящая в формулу, которая не является свободной, является связанной.

Множество свободных переменных формулы φ обозначается $FV(\varphi) = \{x \mid x$ - свободная переменная $\varphi\}$. $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, то либо $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, либо $FV(\varphi) = \varnothing$.

Если формула не имеет свободных переменных, то она наз. предложением.

$T(\sigma)$ - множество термов сигнатуры σ, $F(\sigma)$ - множество формул сигнатуры σ, $S(\sigma)$ - множество предложений сигнатуры σ, $K_\sigma \subseteq K(\sigma)$ - класс алгебраических систем сигнатуры σ. Формула, имеющая свободные переменные, говорит о значениях этих переменных.

Предложение - это утверждение об алгебраической системе в целом.

Замечание 10.

если $\sigma_1 \leq \sigma_2$, то:

а) $T(\sigma_1) \subseteq T(\sigma_2)$

б) $F(\sigma_1) \subseteq F(\sigma_2)$

в) $S(\sigma_1) \subseteq S(\sigma_2)$

г) $\sigma_1 \neq \sigma_2 \Rightarrow K(\sigma_1) \cap K(\sigma_2) = \emptyset$.

Док-во:

а) $\forall c \in \sigma_1 \Rightarrow c \in \sigma_2$, c – терм; пусть $t_1, \ldots, t_n$ – термы $\forall f^n(t_1, \ldots, t_n) \in \sigma_1 \Rightarrow f^n(t_1, \ldots, t_n) \in \sigma_2$, f^n – терм. В силу определения терма сигнатуры σ имеем, что $T(\sigma_1) \subseteq T(\sigma_2)$.

б) Так как $T(\sigma_1) \subseteq T(\sigma_2)$, то $\forall \varphi = (t_1 = t_2) \in F(\sigma_1) \Rightarrow \varphi \in F(\sigma_2)$, $\forall t_1, \ldots, t_n \in \sigma_1$ $\forall p^n(t_1, \ldots, t_n) \in F(\sigma_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow p^n(t_1, \ldots, t_n) \in F(\sigma_2)$ и, соответственно, выполнено $\varphi, \psi \in F(\sigma_1) \Rightarrow \varphi \vee \psi, \varphi \& \psi, \varphi \to \psi, \neg\varphi, \forall x \varphi$, $\exists x \varphi \in F(\sigma_1) \Rightarrow \varphi \vee \psi, \varphi \& \psi, \varphi \to \psi, \neg\varphi, \forall x \varphi, \exists x \varphi \in F(\sigma_2)$. То есть, в силу определения формулы σ $F(\sigma_1) \subseteq F(\sigma_2)$.

в) т.к. $S(\sigma_1) \subseteq F(\sigma_1)$ и $S(\sigma_2) \subseteq F(\sigma_2)$, то и $S(\sigma_1) \subseteq F(\sigma_2)$, но $S(\sigma_1) \not\supseteq S(\sigma_2) \Rightarrow S(\sigma_1) \subseteq S(\sigma_2)$.

г) пусть $K(\sigma_1) \cap K(\sigma_2) \neq \emptyset \Rightarrow \exists \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \in K(\sigma_1)$ и $\mathfrak{A} \in K(\sigma_2)$, но $\mathfrak{A}$ состоит из носителя и сигнатуры. Очевидно, что модель имеет единственную сигнатуру, тогда $\sigma_1 = \sigma_2$, что противоречит условию. Это доказывает, что из $\sigma_1 \neq \sigma_2 \Rightarrow K(\sigma_1) \cap K(\sigma_2) = \emptyset$.

Опр. 11 значение терма на модели:

σ, $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, X – множество переменных, отображение $\gamma: X \to |\mathfrak{A}|$ наз. означиванием переменных из X, $|\mathfrak{A}|$ – носитель, пусть $t \in T(\sigma)$, $FV(t) \subseteq X$, $t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$ – значение терма t на модели $\mathfrak{A}$ при означивании γ.

1) $(t = x) \Rightarrow (t^{\mathfrak{A}}[\gamma] = \gamma(x))$; $(t = c \in \sigma) \Rightarrow (t^{\mathfrak{A}}[\gamma] = c^{\mathfrak{A}})$.

2) $(t = f(t_1, \ldots, t_n)) \Rightarrow (t^{\mathfrak{A}}[\gamma] = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\gamma]))$.

Опр. 12 истинность формулы на моделях:

σ, $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, X – множество переменных, $\gamma: X \to |\mathfrak{A}|$, $\varphi \in F(\sigma)$, $FV(\varphi) \subseteq X$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$ – на модели $\mathfrak{A}$ истинна формула $\varphi[\gamma]$.

1) $\varphi = (t_1 = t_2) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$: $(t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma] = t_2^{\mathfrak{A}}[\gamma])$;

2) $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$: $\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\gamma])$;

3) а) $\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)[\gamma] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\gamma]$ или $\mathfrak{A} \models \varphi_2[\gamma]$;

б) $\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \& \varphi_2)[\gamma] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\gamma]$ и $\mathfrak{A} \models \varphi_2[\gamma]$;

в) $\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \to \varphi_2)[\gamma] \Leftrightarrow$ если $\mathfrak{A} \models \varphi_1[\gamma]$, то $\mathfrak{A} \models \varphi_2[\gamma]$;

г) $\mathfrak{A} \models \neg\varphi_1[\gamma] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi_1[\gamma] \Leftrightarrow$ не верно $\mathfrak{A} \models \varphi_1[\gamma]$;

д) $\mathfrak{A} \models \forall x \varphi_1[\gamma] \Leftrightarrow \forall a \in \mathfrak{A}$ $\mathfrak{A} \models \varphi_1[\gamma_1]$, $dom(\gamma_1) = dom(\gamma) \cup \{x\}$ $\begin{cases} \forall y \in dom(\gamma)\ \gamma_1(y) = \gamma(y); \\ \gamma_1(x) = a; \end{cases}$

е) $\mathfrak{A} \models \exists x \varphi_1[\gamma] \Leftrightarrow \exists a \in \mathfrak{A}$ $\mathfrak{A} \models \varphi_1[\gamma_1]$, $dom(\gamma_1) = dom(\gamma) \cup \{x\}$ $\begin{cases} \forall y \in dom(\gamma)\ \gamma_1(y) = \gamma(y); \\ \gamma_1(x) = a; \end{cases}$

Опр. 13 Формула наз. тождественно истинной, если она истинна на любой модели при любом означивании свободных переменных.

Формула наз. тождественно ложной, если она ложна на любой модели при любом означивании свободных переменных.

Формула наз. выполнимой, если она не является т.л.

Формула наз. опровержимой, если она не является т.и.

Замечание 14

а) φ – т.и. $\Leftrightarrow \neg\varphi$ – т.л.

б) φ – выполнима $\Leftrightarrow \neg\varphi$ – опровержима

Опр. 15 $\varphi \sim \psi$ наз. семантически эквивалентными, если для $\forall \mathfrak{A} \in K(\sigma(\varphi) \vee \sigma(\psi))$ $\forall \gamma: (FV(\varphi) \vee FV(\psi)) \to |\mathfrak{A}|$ $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\gamma]$.

Замечание 16 отношение эквивалентности – т.и.

Предложение 17 имеют место следующие эквивалентности:

а) $\neg \forall x \varphi \sim \exists x \neg\varphi$

б) $\neg \exists x \varphi \sim \forall x \neg\varphi$

в) $\forall x (\varphi \& \psi) \sim ((\forall x \varphi) \& (\forall x \psi))$

е) $\exists x (\varphi \& \xi) \sim ((\exists x \varphi) \& \xi)$, если $x \notin FV(\xi)$

ж) $\forall x (\varphi \vee \xi) \sim ((\forall x \varphi) \vee \xi)$, если $x \notin FV(\xi)$

з) $\exists x (\varphi \vee \xi) \sim ((\exists x \varphi) \vee \xi)$, если $x \notin FV(\xi)$

г) $\exists x (\varphi \vee \psi) \sim ((\exists x \varphi) \vee (\exists x \psi))$

д) $\forall x (\varphi \& \xi) \sim ((\forall x \varphi) \& \xi)$, если $x \notin FV(\xi)$

и) $\forall x\, \varphi(x) \sim \forall y\, \varphi(y)$

к) $\exists x\, \varphi(x) \sim \exists y\, \varphi(y)$

$\}\ x, y \notin FV(\varphi(z))$

Док-во:

а)

~

б)

~

в) $\sigma \leftrightharpoons \sigma(\varphi) \vee \sigma(\psi)$, $Y \leftrightharpoons FV(\varphi) \vee FV(\psi)$, $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $\gamma: Y \to |\mathfrak{A}|$, тогда:

($\Rightarrow$) $\mathfrak{A} \models \forall x (\varphi \& \psi)[\gamma]$, пусть $a \in \mathfrak{A}$, $\gamma^* \leftrightharpoons \gamma \cup [{}^x_a] \Rightarrow \mathfrak{A} \models (\varphi \& \psi)[\gamma^*] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma^*]$ из тех же соображений имеем $\mathfrak{A} \models (\varphi \& \psi)[\gamma^*] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\gamma^*]$, откуда $\mathfrak{A} \models \forall x\, \varphi[\gamma]$ и $\mathfrak{A} \models \forall x\, \psi[\gamma]$, тогда $\mathfrak{A} \models \forall x (\varphi \& \psi)[\gamma] \Rightarrow \mathfrak{A} \models ((\forall x \varphi)[\gamma] \& (\forall x \psi)[\gamma]) = ((\forall x \varphi) \& (\forall x \psi))[\gamma]$.

($\Leftarrow$) $\mathfrak{A} \models ((\forall x \varphi) \& (\forall x \psi))[\gamma] \Rightarrow \mathfrak{A} \models (\forall x \varphi)[\gamma]$ и $\mathfrak{A} \models (\forall x \psi)[\gamma]$, покажем, что $\mathfrak{A} \models \forall x (\varphi \& \psi)[\gamma]$, пусть $a \in \mathfrak{A}$ $\gamma^* \leftrightharpoons \gamma \vee [{}^x_a] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma^*]$, $\mathfrak{A} \models \psi[\gamma^*] \Rightarrow \mathfrak{A} \models (\varphi \& \psi)[\gamma^*] \Rightarrow \mathfrak{A} \models (\forall x (\varphi \& \psi))[\gamma]$.

г)

~

Замечание: если $x \notin FV(\xi)$, $FV(\xi) \subseteq Y$, $x \notin Y$, $\sigma(\xi) \subseteq \sigma$. $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $\gamma: Y \to |\mathfrak{A}|$, $a \in \mathfrak{A}$, $\gamma^* \leftrightharpoons \gamma \vee [{}^x_a]$ тогда $\mathfrak{A} \models \xi[\gamma] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \xi[\gamma^*]$

если x не свободная переменная, то значение формулы не зависит от x.

д) ~

е) ~

ж) ~

з) ~

и)

~

к)

~

Замечание 18 $\exists \varphi, \psi$:

а) $\forall x (\varphi \vee \psi) \nsim ((\forall x \varphi) \vee (\forall x \psi))$

б) $\exists x (\varphi \& \psi) \nsim ((\exists x \varphi) \& (\exists x \psi))$

Док-во: построим контрпример. $\mathfrak{A} \leftrightharpoons \langle \mathbb{N}; \leq \rangle$, $\varphi \leftrightharpoons (x > 3) \Leftrightarrow \neg(x \leq 3)$, $\psi \leftrightharpoons (x \leq 3)$

а) $\mathfrak{A} \models \forall x (\varphi \vee \psi)$, т.е. $\mathfrak{A} \models \forall x ((\neg(x \leq 3)) \vee (x \leq 3))$

$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} \not\models \forall x\, \neg(x \leq 3) \\ \mathfrak{A} \not\models \forall x\, (x \leq 3) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathfrak{A} \not\models ((\forall x \varphi) \vee (\forall x \psi)) \Rightarrow \forall x (\varphi \vee \psi) \nsim ((\forall x \varphi) \vee (\forall x \psi))$

б) $\mathfrak{A} \not\models \exists x ((\neg(x \leq 3)) \& (x \leq 3))$

$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} \models \exists x\, (\neg(x \leq 3)) \\ \mathfrak{A} \models \exists x\, (x \leq 3) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathfrak{A} \models ((\exists x\, \neg(x \leq 3)) \& (\exists x (x \leq 3))) \Rightarrow \exists x (\varphi \& \psi) \nsim ((\exists x \varphi) \& (\exists x \psi))$

ЗАМЕЧАНИЕ 19 $\exists \varphi(x,y) \quad \forall x \exists y \varphi(x,y) \not\vdash \exists y \forall x \varphi(x,y)$

Док-во: $\mathfrak{A} \rightleftharpoons \langle \mathbb{N}; \leq \rangle$, $\varphi(x,y) \rightleftharpoons (x \leq y)$, построим контрпример

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} \vDash \forall x \exists y\, (x \leq y) \\ \mathfrak{A} \nvDash \exists y \forall y\, (x \leq y) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \exists y \varphi(x,y) \not\vdash \exists y \forall x \varphi(x,y)$$

опр. 20 Говорят, что формула φ находится в предварённой (пренексной) нормальной форме, если $\varphi = \underbrace{Q_1 x_1 \dots Q_n x_n}_{\text{пренекс}}\ \Psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$, где Ψ – бескванторная формула, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$.

ТЕОРЕМА 21 Для любой формулы φ существует $\psi \sim \varphi$ такая, что ψ находится в предварённой нормальной форме.

Док-во: представляет из себя алгоритм приведения формулы в ПНФ.

1) избавляемся от импликаций.
2) с помощью тождеств (а) и (б) из предложения 17 вносим отрицание под кванторы.
3) с помощью тождеств (и) и (к) из предложения 17 переобозначаем переменные по которым действуют кванторы так, чтобы:
   - во-первых, разные кванторы действовали по разным переменным, и
   - во-вторых, каждая переменная имела либо только свободные, либо только связанные вхождения.
4) с помощью тождеств (д)–(з) из предложения 17 и тождеств логики высказываний выносим кванторы наружу.
5) В результате получим ПНФ.

Данная формула эквивалентна исходной в силу предложения 17 и замечания 16.

Отношения и функции. Предпорядок, отношение эквивалентности и частичного порядка. Эквивалентность и разбиение, фактор-множество. Максимальные и минимальные, наибольшие и наименьшие элементы, точная верхняя и нижняя грани. Понятие решётки.

опр. 1 $A \times B \rightleftharpoons \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$, $A_1 \times \dots \times A_n \rightleftharpoons \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$, $A^n \rightleftharpoons \underbrace{A \times \dots \times A}_{n\text{-раз}}$

$B \subseteq A^n$, тогда B наз. n-местным отношением или n-арным предикатом на множестве A.

$C \subseteq A \times B$, тогда C наз. соответствием между множествами A и B.

$$\left.\begin{array}{l} G \subseteq A \times B \\ H \subseteq B \times C \end{array}\right\} \Rightarrow G \circ H \rightleftharpoons \{(a,c) \mid \exists b \in B \ (a,b) \in G \text{ и } (b,c) \in H\}, \quad G \circ H \subseteq A \times C.$$

$G \subseteq A \times B$, $G^{-1} \rightleftharpoons \{(b,a) \mid (a,b) \in G\}$, $G^{-1} \subseteq B \times A$.

$id_A \rightleftharpoons \{(a,a) \mid a \in A\}$, $id_A \subseteq A^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

а) $(id_A)^{-1} = id_A$ в) $\varnothing^{-1} = \varnothing$ д) $A^2 \circ (A^2)^{-1} = A^2$

б) $(A^2)^{-1} = A^2$ г) $id_A \circ (id_A)^{-1} = id_A$ е) $\varnothing \circ (\varnothing)^{-1} = \varnothing$

Док-во:

а) $(id_A)^{-1} \rightleftharpoons \{(a,a) \mid (a,a) \in id_A\} = id_A$;

б) $(A^2)^{-1} \rightleftharpoons \{(b,a) \mid (a,b) \in A^2\} = A^2$;

в)

г) $id_A \circ (id_A)^{-1} \rightleftharpoons \{(a,a) \mid \exists a \in A \ (a,a) \in id_A \text{ и } (a,a) \in (id_A)^{-1}\} = id_A$;

д)

е)

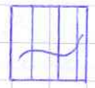
опр. 3 Пусть $F \subseteq A \times B$, F наз. функцией (графиком функции), если $\forall a \in A \ \exists!\, b \in B \ (a,b) \in F$:

а) $\forall a \in A \ \exists b \in B \ (a,b) \in F$;

б) $\forall a \in A \ b_1, b_2 \in B \ (a,b_1), (a,b_2) \in F \to (b_1 = b_2)$;

$(a,b) \in F \Leftrightarrow f(a) = b$; $A = C^n$, $F \subseteq A \times B$ – функция, $f: C^n \to B$, то говорят, что $f(x_1, \dots, x_n)$ – n-местная функция.

опр. 4 $C \subseteq A \times B$, $pr_A C \rightleftharpoons \{a \mid \exists b \ (a,b) \in C\}$, $pr_B C \rightleftharpoons \{b \mid \exists a \ (a,b) \in C\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5 F – функция $\Leftrightarrow$ а) $pr_A F = A$; б) каждая вертикальная прямая пересекает не более одного раза функцию. 

Док-во:

а) $F \subseteq A \times B$, тогда по определению: $\forall a \in A \ \exists!\, b \in B \mid (a,b) \in F$, так же по определению: $pr_A F = \{a \mid \exists b\, (a,b) \in F\} = A$.

б) это условие говорит о единственности b из пары (a,b), что верно согласно определению.

опр. 6 Функция F наз. обратимой, если F^{-1} является функцией.

ЗАМЕЧАНИЕ 7 Условие обратимости функции:

$F \subseteq A \times B$ – функция, F – обратима $\Leftrightarrow \forall b \in B \ \exists!\, a \in A \ (a,b) \in F$, т.е.:

а) $\forall b \in B \ \exists a \in A \mid (a,b) \in F$;

б) $\forall b \in B \ \forall a_1, a_2 \in A \ (a_1, b), (a_2, b) \in F \to (a_1 = a_2)$.

Док-во:

а), б) согласно определению обратимой функции, F^{-1} – функция, а здесь мы и написали определение функции $F^{-1}: B \to A$, что и заканчивает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 8 Если $F \subseteq A \times B$, F – обратимая функция, то:

а) $F \circ F^{-1} = id_A$

б) $F^{-1} \circ F = id_B$

Док-во:

а) $F \circ F^{-1} \rightleftharpoons \{(a,a) \mid \exists b \in B \ (a,b) \in F \text{ и } (b,a) \in F^{-1}\} = id_A$

б) $F^{-1} \circ F \rightleftharpoons \{(b,b) \mid \exists a \in A \ (b,a) \in F^{-1} \text{ и } (a,b) \in F\} = id_B$

опр. 9 Пусть $G \subseteq A \times B$. Соответствие G наз. взаимно однозначным, если G – обратимая функция.

опр. 10 Двуместное отношение $R \subseteq A^2$ наз. отношением предпорядка, если выполнены два условия:

1) $\forall a \in A \ (a,a) \in R$ – рефлексивность

3) $\forall a,b,c \in A \ (a,b), (b,c) \in R \to (a,c) \in R$ – транзитивность

Отношение R наз. эквивалентностью, если выполнены (1), (3) и

2') $\forall a,b \in A \ (a,b) \in R \to (b,a) \in R$ – симметричность

Отношение R наз. отношением частичного порядка, если выполнено (1), (3) и

2'') $\forall a,b \in A \ (a,b), (b,a) \in R \to (a = b)$ – антисимметричность

Отношение R наз. отношением линейного порядка, если выполнено (1), (2''), (3) и

4) $\forall a,b \in A$ либо $(a,b) \in R$, либо $(b,a) \in R$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11

а) $(1) \Leftrightarrow id_A \subseteq R$ в) $(2') \Leftrightarrow R = R^{-1}$ е) $(4) \Leftrightarrow R \cup R^{-1} = A^2$

б) $(3) \Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$ г) $(2'') \Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq id_A$

Док-во:

а)

б)

в)

г)

е)

ЗАМЕЧАНИЕ 12

а) A^2 – отношение эквивалентности.

б) id_A – отношение эквивалентности и частичного порядка.

в) id_A – отношение линейного порядка $\Leftrightarrow$ либо $A = \varnothing$, либо $A = \{a\}$.

г) $\varnothing$ – симметричность и антисимметричность.

Док-во:

а)

б)

в)

г)

опр. 13 отношение эквивалентности на множестве A:

$(a,b) \in \sim \Leftrightarrow a \sim b$, если $a \in A$, то $[a] \leftrightharpoons [a]_\sim \leftrightharpoons a/_\sim \leftrightharpoons \{b \in A \mid a \sim b\}$ – класс эквивалентности, смежный класс, фактор-класс с представителем a.

$A/_\sim \leftrightharpoons \{a/_\sim \mid a \in A\}$ фактор-множество — множество всех фактор-классов.

Понятие факторизации – это основной метод представления объектов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14 $\sim$ – отношение эквивалентности на A.

а) $\bigcup\limits_{a\in A}[a] = A$;

б) $a \sim b$, то $[a]=[b]$;

в) $a \not\sim b$, то $[a] \cap [b] = \varnothing$.

Док-во:

а) $(\subseteq)$ $a \in A \Rightarrow [a] \subseteq A \Rightarrow \bigcup\limits_{a\in A}[a] \subseteq A$;
$(\supseteq)$ $a \in A \Rightarrow a \sim a \Rightarrow a \in [a] \Rightarrow a \in \bigcup\limits_{a\in A}[a] \Rightarrow A \subseteq \bigcup\limits_{a\in A}[a]$ $\Big\} \Rightarrow A = \bigcup\limits_{a\in A}[a]$

б) $a, b \in A$, $a \sim b$, тогда $c \in [a] \Rightarrow c \sim a,\ a \sim b \Rightarrow c \sim b \Rightarrow c \in [b] \Rightarrow [a] \subseteq [b]$
$c \in [b] \Rightarrow c \sim b,\ a \sim b \Rightarrow c \sim a \Rightarrow c \in [a] \Rightarrow [b] \subseteq [a]$ $\Big\} \Rightarrow [a]=[b]$

в) $a \not\sim b$, пусть $[a] \cap [b] \neq \varnothing$, пусть $c \in ([a] \cap [b]) \Rightarrow a \sim c,\ b \sim c \Rightarrow a \sim b$ – противоречие $\Rightarrow$
$\Rightarrow [a] \cap [b] = \varnothing$.

опр. 15 I – множество индексов, $\{B_i\}_{i \in I}$, $\forall i \in I$ $B_i \neq \varnothing$, $B_i \subseteq A$, тогда $\{B_i\}_{i\in I}$ наз. разбиением множества A, если выполнено: а) $\bigcup\limits_{i\in I} B_i = A$; б) $i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \varnothing$.

СЛЕДСТВИЕ 16 $\sim$ – эквивалентность на A

а) для каждого $[a]$ один представитель $b \in [a]$, $B \subseteq A$, B – множество представителей, т.е. $\forall b_1, b_2 \in B$ $b_1 \not\sim b_2$, $\forall a \in A$ $\exists b \in B$ $a \sim b$, тогда $\{[b] \mid b \in B\}$ – разбиение A.

б) $I = \{[a] \mid a \in A\}$ $i \in I$, $B_i \leqslant i$, тогда $\left\{[a]_{[a]}\right\}_{[a] \in \{[a] \mid a \in A\}}$ – разбиение A.

нер

Док-во:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17 Пусть множество $\{B_i\}_{i\in I}$ – разбиение A, $R \leftrightharpoons \{(a,b) \mid \exists i \in I\ a, b \in B_i\}$, тогда:

а) R – отношение эквивалентности

б) $\{B_i \mid i \in I\} = \{[a]_R \mid a \in A\}$

Док-во:

а) (1) $a \in A \Rightarrow a \in \bigcup\limits_{i\in I} B_i \Rightarrow \exists i \in I,\ a \in B_i \Rightarrow aRa$ – рефлексивность.

(2) $aRb \Rightarrow \exists i \in I$ $a, b \in B_i \Rightarrow bRa$ – симметричность.

(3) $aRb,\ bRc \Rightarrow \exists i, j \in I, (a,b) \in B_i, (b,c) \in B_i \Rightarrow b \in B_i \cap B_j \Rightarrow B_i \cap B_j \neq \varnothing,\ i=j \Rightarrow a, b, c \in B_i \Rightarrow (a,c) \in R$.

б) $i \in I$, $B_i \neq \varnothing \Rightarrow \exists b \in B_i$, тогда покажем, что $B_i = [b]$:

$(\subseteq)$ $c \in B_i \Rightarrow b, c \in B_i \Rightarrow (b,c) \in R \Rightarrow c \in [b] \Rightarrow B_i \subseteq [b]$ $(\supseteq)$ $c \in [b] \Rightarrow \exists j$ $b, c \in B_j \Rightarrow b \in B_i \cap B_j \Rightarrow B_i \cap B_j \neq \varnothing \Rightarrow$
$\Rightarrow i = j \Rightarrow c \in B_i \Rightarrow [b] \subseteq B_i \Rightarrow [b] = B_i \Rightarrow B_i \in \{[a]_R \mid a \in A\}$

$b \in A \Rightarrow \exists i \in I$ $b \in B_i \Rightarrow B_i = [b] \Rightarrow [b] \in \{B_i \mid i \in I\} \Rightarrow \{R_i \mid i \in I\} = \{[a]_R \mid a \in A\}$.

Каждая эквивалентность определяет множество фактор-классов и множество фактор-классов определяет эквивалентность.

опр. 18 $\langle A; \leqslant \rangle$ – частично-упорядоченное множество, тогда:

$a \in A$ $\forall b \in A$ $b \leqslant a$ – a наз. наибольшим;

a наз. наименьшим, если $a \in A$ $\forall b \in A$ $a \leqslant b$;

a наз. максимальным, если $\forall b \in A$ $(a \leqslant b) \Rightarrow (a = b)$

a наз. минимальным, если $\forall b \in A$ $(b \leqslant a) \Rightarrow (a = b)$

ЗАМЕЧАНИЕ 19 $\langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle$ – ЛУМ

Док-во:

ЗАМЕЧАНИЕ 20 наибольший элемент всегда является максимальным, наименьший элемент всегда является минимальным.

Док-во: $\langle A, \leqslant \rangle$ – ЧУМ.

а) $a \in A$ – наибольший. $b \in A$, $a \leqslant b$ – выбран в том, что это верное условие $\Rightarrow b \leqslant a \Rightarrow$
$\Rightarrow b = a \Rightarrow a$ – max.

б) $a \in A$ – наименьший. $b \in A$, $a \geqslant b \Rightarrow a \leqslant b \Rightarrow b = a \Rightarrow a$ – min.

опр. 21 $\langle A; < \rangle$ наз. строго частично упорядоченным множеством, если

1') $a < b \Rightarrow a \neq b$ – иррефлексивность.

2'') антисимметричность.

3) транзитивно.

Опр. т.е. $\langle A; \leqslant \rangle$ – ЧУМ: $(a < b) \Leftrightarrow (a \leqslant b$ и $a \neq b)$

ЗАМЕЧАНИЕ 22 $\langle A; \leqslant \rangle$ – ЧУМ, тогда $\langle A; < \rangle$ – строго ЧУМ.

Док-во:

1') $a < b \Rightarrow b \geqslant a$ и $a \neq b$

2'') $a < b$ и $b < a$
$a \leqslant b$ и $b \leqslant a \Rightarrow a = b$

3) $a < b,\ b < c \Rightarrow a \leqslant b,\ b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$, пусть $a = c \Rightarrow a \leqslant b,\ b \leqslant a = c \Rightarrow a = b$, но $a < b \Rightarrow a \neq b \Rightarrow$
противоречие $\Rightarrow a \neq c \Rightarrow a < c$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 23 $\langle A; < \rangle$ – ЧУМ, $a \leqslant b$: $a < b$ либо $a = b$, тогда $\langle A; \leqslant \rangle$ – ЧУМ.

Док-во:

1) $a \leqslant a$, т.к. $a = a$ – рефлексивность.

2'') $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$ – антисимметричность.
$a \neq b$ (от противного) $\Rightarrow a < b$ и $b < a \Rightarrow a = b$ – противоречие $\Rightarrow a = b$

3) $a \leqslant b$, $b \leqslant c$

а) $a = b \Rightarrow a \leqslant c$

б) $b = c \Rightarrow a \leqslant c$

в) $a \neq b, b \neq c \Rightarrow a < b, b < c \Rightarrow a < c \Rightarrow a \leq c$.

Предложение 24 $\langle A; \leq \rangle$ – ЧУМ, пусть A – конечно, тогда $\forall a \in A \ \exists b, c \in A \quad b \leq a \leq c$, b – min, c – max.

Док-во:

1) $a \in A$, если a – max, то положим $c = a$, пусть a – не max $\Rightarrow \exists a_1 \neq a$ такой, что $a \leq a_1$, т.е. $a < a_1$, если a_1 – max, положим $c = a_1$, если a_1 – не max, то $\exists a_2$: $a_1 < a_2$. A – конечно, пусть n – количество элементов A. $\exists l \leq n$: a_l – max. Т.к. $\forall i, j \ a_i \neq a_j$: $a_i < a_{i+1} < a_{i+2} \Rightarrow$ $\Rightarrow a_i < a_{i+2} < a_{i+3} \Rightarrow a_i < a_j \Rightarrow a_i \neq a_j \Rightarrow$ процесс прервётся $\Rightarrow$ найдётся l при которых a_l – max. $a < a_l \Rightarrow a \leq a_l$.

2) $a \in A$, если a – min, то положим $b = a$, пусть a – не min $\Rightarrow \exists a_1 \neq a$ такой, что $a_1 \leq a$, т.е. $a_1 < a$, если a_1 – min, положим $b = a_1$, если a_1 – не min, то $\exists a_2$: $a_2 < a_1$. A – конечно, пусть n – количество элементов A. $\exists l \leq n$: a_l – min. Т.к. $\forall i, j \ a_i \neq a_j$: $a_{i+2} < a_{i+1} < a_i \Rightarrow$ $\Rightarrow a_{i+3} < a_{i+2} < a_i \Rightarrow a_j < a_i \Rightarrow a_i \neq a_j \Rightarrow$ процесс прервётся $\Rightarrow$ найдётся l при которых a_l – min. $a_l < a \Rightarrow a_l \leq a$.

Предложение 25 $\langle A; \leq \rangle$ – ЧУМ, $a \in A$, a – наибольший (наименьший), тогда a – единственный max (min) элемент.

Док-во:

1) a – наибольший, $b \in A$, b – max $\Rightarrow b \leq a \Rightarrow b = a$.
2) a – наименьший, $b \in A$, b – min $\Rightarrow a \leq b \Rightarrow b = a$.

√ **Предложение 26** $\langle A; \leq \rangle$ – ЧУМ (конечное), $a \in A$, a – единственный max (min) элемент, тогда a – наибольший (наименьший).

Док-во:

1) a – единственный max, $b \in A$, тогда $\exists c$: $b \leq c$, c – max $\Rightarrow a = c \Rightarrow b \leq a \Rightarrow a$ – наибольший.
2) a – единственный min, $b \in A$, тогда $\exists c$: $c \leq b$, c – min $\Rightarrow a = c \Rightarrow a \leq b \Rightarrow a$ – наименьший.

Следствие 27

В конечном ЧУМ наибольший (наименьший) элемент $\exists \Leftrightarrow$ max (min) элемент единственный.

зам. Р - ЛУМ

Предложение 28 $\langle L; \leq \rangle$ – ЛУМ, $a \in L$.

а) a – max $\Leftrightarrow a$ – наибольший.
б) a – min $\Leftrightarrow a$ – наименьший.

Док-во:

а) ($\Leftarrow$) a – наибольший $\Rightarrow a$ – max.

($\Rightarrow$) a – max, $b \in L$ $\left.\begin{array}{l} a \leq b \Rightarrow a = b \Rightarrow b \leq a \\ b \leq a \end{array}\right\} \Rightarrow b \leq a$.

б) ($\Leftarrow$) a – наименьший $\Rightarrow a$ – min.

($\Rightarrow$) a – min, $b \in L$ $\left.\begin{array}{l} a \geq b \Rightarrow a = b \Rightarrow b \geq a \\ b \geq a \end{array}\right\} \Rightarrow b \geq a$.

Следствие 29 $\langle L; \leq \rangle$ – конечное ЛУМ, тогда $\exists$ наибольший и наименьший элементы.

Опр. 30 пусть $\langle A; \leq \rangle$ – ЧУМ, $M \subseteq A$, $a \in A$.

a наз. верхней гранью множества M ($a \geq M$), если $\forall b \in M \quad b \leq a$;
a наз. нижней гранью множества M ($a \leq M$), если $\forall b \in M \quad a \leq b$;
элемент a наз. точной верхней гранью множества M, если a – наименьшая из верхних граней, $a = \sup_A M \rightleftharpoons \sup M$: 1) $a \geq M$; 2) $\forall c \in A \ (c \geq M \rightarrow a \leq c)$.
a наз. точной нижней гранью множества M, если a – наибольшая из нижних граней, $a = \inf_A M \rightleftharpoons \inf M$: 1) $a \leq M$; 2) $\forall c \ (c \leq M \rightarrow c \leq a)$.

Опр. 31 РУМ, # (решётка, решёточно-упорядоченное множество)

пусть $\langle A; \leq \rangle$ – ЧУМ. A наз. РУМ, если $\forall a, b \in A \quad \exists \sup_A \{a, b\}$, $\exists \inf_A \{a, b\}$.
$a \cup b \rightleftharpoons \sup \{a, b\}$, $a \cap b \rightleftharpoons \inf \{a, b\}$.
$\langle A; \cup, \cap \rangle$ – решётка, $\langle A; \cup \rangle$ – верхняя полурешётка, $\langle A; \cap \rangle$ – нижняя полурешётка.

Предложение 32

а) $a \geq M$, $a \in M$, то a – наибольший в M и $a = \sup M$.
б) $a \leq M$, $a \in M$, то a – наименьший в M и $a = \inf M$.
в) $a \in M$, $a \geq M \Leftrightarrow a = \sup M \Leftrightarrow a$ – наибольший в M.
г) $a \in M$, $a \leq M \Leftrightarrow a = \inf M \Leftrightarrow a$ – наименьший в M.

Док-во:

а)
~
б)
~
в)

~
г)

~

Опр. 33 Множество-степень:

X – множество, $\mathcal{P}(X) \rightleftharpoons \{Y \mid Y \subseteq X\}$ – множество всех подмножеств множества X.

Предложение 34

$\langle \mathcal{P}(X); \subseteq \rangle$ – РУМ, причём $\forall A, B \subseteq X$, $\sup\{A, B\} = A \cup B$, $\inf\{A, B\} = A \cap B$.

Предложение 35

$\langle L; \leq \rangle$ – ЛУМ, тогда L – РУМ.

Док-во:

$a, b \in L \Rightarrow a \leq b$ или $b \leq a$, пусть $a \leq b$, тогда $\sup\{a, b\} = b$, $\inf\{a, b\} = a$.
пусть $b \leq a$, тогда $\sup\{a, b\} = a$, $\inf\{a, b\} = b$.

Множество-степень, понятие и основные свойства булевой алгебры. Примеры. Атомные и безатомные элементы булевых алгебр.

Опр. 1 Булева алгебра

$\mathfrak{A} = \langle A; \cup, \cap, ^{-}, 0, 1 \rangle$ эта система наз. булевой алгеброй, если выполнены следующие аксиомы $\forall a, b, c \in A$:

1) $a \cup b = b \cup a$ } коммутативность
2) $a \cap b = b \cap a$ }
3) $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$ } ассоциативность
4) $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$ }
5) $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$ } дистрибутивность
6) $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$ }
7) $\overline{a \cup b} = \bar{a} \cap \bar{b}$ } законы де Моргана
8) $\overline{a \cap b} = \bar{a} \cup \bar{b}$ }
9) $a \cup a = a$ } идемпотентность
10) $a \cap a = a$ }
11) $a \cup \bar{a} = 1$
12) $a \cap \bar{a} = 0$
13) $\bar{\bar{a}} = a$
14) $a \cup 0 = a$
15) $a \cap 0 = 0$
16) $a \cup 1 = 1$
17) $a \cap 1 = a$

Предложение 2

$\langle \mathcal{P}(X); \cup, \cap, ^{-}, 0, 1 \rangle$ – булева алгебра

Опр. 3 $F_n \rightleftharpoons F(A_1, \dots, A_n) \rightleftharpoons \{\varphi \mid \varphi$ – формула логики высказываний с переменными $A_1, \dots, A_n\}$

$F \rightleftharpoons \bigcup_n F_n \rightleftharpoons \{\varphi \mid \varphi$ – формула логики высказываний от переменных $A_1, \dots\}$

$\varphi \sim \psi$, $[\varphi]^n \rightleftharpoons \{\psi \in F_n \mid \varphi \sim \psi\}$, $\varphi \in F_n$.

$[\varphi] \rightleftharpoons \{\psi \in F \mid \varphi \sim \psi\}$, $F_n/_\sim \rightleftharpoons \{[\varphi]^n \mid \varphi \in F_n\}$, $F/_\sim \rightleftharpoons \{[\varphi] \mid \varphi \in F\}$

Замечание 4

$\forall n < m$

$F_n \subseteq F_m \subseteq F$

опр. 5 $\varphi, \psi \in F_n$ $(\varphi, \psi \in F)$

$[\varphi] \& [\psi] \leftrightharpoons [\varphi \& \psi]$, $[\varphi] \vee [\psi] \leftrightharpoons [\varphi \vee \psi]$, $[\varphi] \to [\psi] \leftrightharpoons [\varphi \to \psi]$, $\neg[\varphi] \leftrightharpoons [\neg\varphi]$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6 определение 5 корректно, т.е. не зависит от выбора представителя.

$[\varphi]=[\varphi_1], [\psi]=[\psi_1], [\varphi \& \psi]=[\varphi_1 \& \psi_1], [\varphi \vee \psi]=[\varphi_1 \vee \psi_1], [\varphi \to \psi]=[\varphi_1 \to \psi_1], [\neg\varphi]=[\neg\varphi_1]$.

Док-во:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7

а) $\langle F_n/_\sim ; \vee, \&, \neg, И, Л \rangle$ – булева алгебра.

б) $\langle F/_\sim ; \vee, \&, \neg, И, Л \rangle$ – булева алгебра.

Док-во:

опр. 8 $\mathfrak{A}$ – булева алгебра. $a \leq b$: $a \cap b = a$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9 $\mathfrak{A}$ – булева алгебра, $\langle A; \leq \rangle$ – ЧУМ

Док-во:

1) $\forall a \in A$ $a \leq a \Rightarrow a \cap a = a \Rightarrow a \leq a$.

2) $\forall a, b \in A$, $a \leq b$, $b \leq a \Rightarrow a = a \cap b$, $b = a \cap b$, $a = a \cap b = b \Rightarrow a = b$.

3) $\forall a, b, c \in A$ $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a = a \cap b$, $b = b \cap c$, $a \cap c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b = a$, $a = a \cap c \Rightarrow a \leq c$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10 пусть $\mathfrak{A}$ – булева алгебра, $0 \leq a \leq 1$

Док-во:

$0 \cap a = 0 \Rightarrow 0 \leq a$, $a \cap 1 = a \Rightarrow a \leq 1$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11 $\mathfrak{A}$ – булева алгебра, определим операции: $-, \cup^*, \cap^*, 0^*, 1^*$ так, что:

$a \cup^* b \leftrightharpoons a \cap b$, $a \cap^* b \leftrightharpoons a \cup b$, $0^* \leftrightharpoons 1$, $1^* \leftrightharpoons 0$.

$\mathfrak{A}^* \leftrightharpoons \langle A; \cup^*, \cap^*, -, 0^*, 1^* \rangle$ – булева алгебра.

Док-во:

1) $a \cup^* b = a \cap b = b \cap a = b \cup^* a$

2) $a \cap^* b = a \cup b = b \cup a = b \cap^* a$

3) $a \cup^* (b \cup^* c) = a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c = (a \cup^* b) \cup^* c$

4) $a \cap^* (b \cap^* c) = a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c = (a \cap^* b) \cap^* c$

5) $a \cup^* (b \cap^* c) = a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c) = (a \cup^* b) \cap^* (a \cup^* b)$

6) $a \cap^* (b \cup^* c) = a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) = (a \cap^* b) \cup^* (a \cap^* c)$

7) $\overline{a \cup^* b} = \overline{a \cap b} = \bar{a} \cup \bar{b} = \bar{a} \cap^* \bar{b}$

8) $\overline{a \cap^* b} = \overline{a \cup b} = \bar{a} \cap \bar{b} = \bar{a} \cup^* \bar{b}$

9) $a \cup^* a = a \cap a = a$

10) $a \cap^* a = a \cup a = a$

11) $a \cup^* \bar{a} = a \cap \bar{a} = 0 = 1^*$

12) $a \cap^* \bar{a} = a \cup \bar{a} = 1 = 0^*$

13) $\bar{\bar{a}} = a$

14) $a \cup^* 0 = a \cap 0 = 0 = 1^*$

15) $a \cap^* 0 = a \cup 0 = a$

16) $a \cup^* 1 = a \cap 1 = a$

17) $a \cap^* 1 = a \cup 1 = 1 = 0^*$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12 $\mathfrak{A}$ – булева алгебра, $a, b \in \mathfrak{A}$, тогда $a \leq b \Leftrightarrow a \cup b = b$.

Док-во:

$(\Rightarrow)$ $a \leq b \Rightarrow a \cap b = a$, $b = b \cup 0 = b \cup (a \cap \bar{a}) = (b \cup a) \cap (b \cup \bar{a}) = (a \cup b) \cap (b \cup (\bar{b} \cup \bar{a})) = (a \cup b) \cap (1 \cup \bar{a}) =$
$= (a \cup b) \cap 1 = a \cup b \Rightarrow a \cup b = b$; $\bar{a} = \overline{a \cap b} = \bar{a} \cup \bar{b}$.

$(\Leftarrow)$ $\bar{b} = \overline{a \cup b} = \bar{a} \cap \bar{b}$, $a = a \cap 1 = a \cap (b \cup \bar{b}) = (a \cap b) \cup (a \cap \bar{b}) = (a \cap b) \cup (a \cap (\bar{a} \cap \bar{b})) = (a \cap b) \cup ((a \cap \bar{a}) \cap \bar{b}) =$
$= (a \cap b) \cup (0 \cap \bar{b}) = (a \cap b) \cup 0 = a \cap b \Rightarrow a = a \cap b \Rightarrow a \leq b$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13 $\mathfrak{A}$ – булева алгебра, $\langle A; \leq \rangle$ – РУМ.

Док-во:

$\langle A; \leq \rangle$ – ЧУМ; $a, b \in A$, покажем что: $\sup\{a, b\} = a \cup b$; $\inf\{a, b\} = a \cap b$.

1) $\left.\begin{array}{l} a \cup (a \cup b) = (a \cup a) \cup b = a \cup b \Rightarrow a \leq a \cup b \\ b \cup (a \cup b) = (b \cup b) \cup a = b \cup a \Rightarrow b \leq a \cup b \end{array}\right\} \Rightarrow \{a, b\} \leq a \cup b$

пусть $\{a, b\} \leq c$, тогда $a \leq c$, $b \leq c \Rightarrow a = a \cap c$, $b = b \cap c$

$a \cup b = (a \cap c) \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c \Rightarrow a \cup b \leq c \models a \cup b = \sup\{a, b\}$

2) $\left.\begin{array}{l} a \cap (a \cap b) = (a \cap a) \cap b = a \cap b \Rightarrow a \geq a \cap b \\ b \cap (a \cap b) = a \cap (b \cap b) = a \cap b \Rightarrow b \geq a \cap b \end{array}\right\} \Rightarrow \{a, b\} \geq a \cap b$

пусть $\{a, b\} \geq c$, тогда $a \geq c$, $b \geq c \Rightarrow a = a \cup c$, $b = b \cup c$

$a \cap b = (a \cup c) \cap (b \cup c) = c \cup (a \cap b) \Rightarrow c \leq (a \cap b) \models a \cap b = \inf\{a, b\}$

опр. 14 пусть $\mathfrak{A}$ – булева алгебра, $a \in \mathfrak{A}$, тогда говорят, что a называется атомом, если под ненулевым элементом a лежит только нулевой элемент, т.е. $a \neq 0$ $\forall b \in \mathfrak{A}$ $b \leq a \to b = 0$.
элемент $b \in \mathfrak{A}$ наз. безатомным, если под ним нет атомов, т.е. $c \in \mathfrak{A}$ $\forall c \leq b$, c – не атом.
$\forall c$: $c \leq b \Rightarrow c$ – не атом
c наз. атомным, если под ним нет ненулевых безатомных элементов, т.е.

$\forall b \in \mathfrak{A}$ $\left[\begin{array}{l} 0 < b \leq c \to b \text{ – не безатомный} \\ 0 < b \leq c \to \exists a \text{ – атом и } a \leq b. \end{array}\right.$

опр. 15 $At(\mathfrak{A}) \leftrightharpoons \{a \in \mathfrak{A} \mid a \text{ – атом}\}$, $c \in \mathfrak{A}$ $At(c) \leftrightharpoons \{a \in \mathfrak{A} \mid a \text{ – атом и } a \leq c\} = \{a \in At(\mathfrak{A}) \mid a \leq c\}$

ЗАМЕЧАНИЕ 16 $At(\mathfrak{A}) = At(1^{\mathfrak{A}})$

1) $At(\mathfrak{A}) \supseteq At(1^{\mathfrak{A}})$, т.к. пусть $a_0 \in At(\mathfrak{A})$, $a_0 \in \mathfrak{A} \Rightarrow a_0 \leq 1^{\mathfrak{A}} \Rightarrow a_0 \in At(1^{\mathfrak{A}}) \Leftrightarrow \{a_0 \in At(\mathfrak{A}) \mid a_0 \leq 1^{\mathfrak{A}}\}$.

2) $At(\mathfrak{A}) \subseteq At(1^{\mathfrak{A}})$, пусть $a_0 \in At(1^{\mathfrak{A}}) \Leftrightarrow \{a_0 \in At(\mathfrak{A}) \mid a_0 \leq 1^{\mathfrak{A}}\} \Rightarrow a_0 \in At(\mathfrak{A})$.

опр. 17 Булева алгебра наз. атомной, если в ней нет ненулевых безатомных элементов, т.е. под любым её ненулевым элементом лежит атом.

Булева алгебра наз. безатомной, если в ней нет атомов.

ЗАМЕЧАНИЕ 18

а) 0 – одновременно и атомный, и безатомный элемент.

б) $\mathfrak{A}$ – атомная $\Leftrightarrow 1^{\mathfrak{A}}$ – атомная.

в) $\mathfrak{A}$ – безатомная $\Leftrightarrow 1^{\mathfrak{A}}$ – безатомная.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19 БЗ $= \langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^-, 0, 1 \rangle$

а) $At($БЗ$) = \{A \subseteq X \mid A$ – одноэлементные$\} = \{\{a\} \mid a \in X\}$

б) $\langle \mathcal{P}(X); \cup, \cap, -, 0, 1 \rangle$ – атомная булева алгебра.

Док-во:

а) $(\Rightarrow)$ $A \in At(\mathcal{P}(X)) \Rightarrow A \neq \varnothing \Rightarrow \exists a \in A \Rightarrow \{a\} \neq \varnothing, \{a\} \subseteq A \Rightarrow A = \{a\}$, т.е. A одноэлементно.

$(\Leftarrow)$ $a \in X \Rightarrow \{a\} \neq \varnothing$, пусть $B \subseteq \{a\}$, $B \neq \varnothing \Rightarrow \exists b \in B \Rightarrow b = a \Rightarrow \{a\} \subseteq B$, $B \subseteq \{a\} \Rightarrow B = \{a\} \Rightarrow a$ – атом.

$\models \{A \subseteq X \mid A$ – одноэлементно$\} = At(\mathcal{P}(X)) = \{\{a\} \mid a \in X\}$.

б) $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$ покажем, что A – не безатомное $\Rightarrow \exists a \in A \Rightarrow \{a\}$ – атом.

$\{a\} \subseteq A \Rightarrow A$ – не безатомная $\Rightarrow \mathcal{P}(X)$ – атомная булева алгебра.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20 $\mathfrak{A}$ – конечная булева алгебра, тогда $\mathfrak{A}$ – атомная.

Док-во:

пусть $\mathfrak{A}$ – булева алгебра, $\mathfrak{A}$ – конечно, $c \in \mathfrak{A}$, $c \neq 0$; рассмотрим множество $A = |\mathfrak{A}|$,
$B \leftrightharpoons A \setminus \{0\} \Rightarrow c \in B \Rightarrow B \neq \varnothing$, B – конечно.

ЗАМЕЧАНИЕ 21 $\langle A; \leq \rangle$ – ЧУМ, $B \subseteq A$ – тогда $\langle B; \leq \rangle$ – ЧУМ.

Док-во:

пусть $b_1, b_2, b_3 \in B \Rightarrow b_1, b_2, b_3 \in A$, т.к. $B \subseteq A$, из того, что $b_1, b_2, b_3 \in A$:

1) $b_1 \leq b_1$ – рефлексивно.

2) $b_1 \leq b_2,\ b_2 \leq b_3 \Rightarrow b_1 \leq b_3$ – транзитивно.

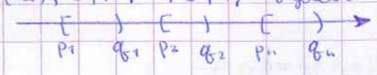
3) $b_1 \leq b_2,\ b_2 \leq b_1 \Rightarrow b_1 = b_2$ – антисимметрично.

$\langle A; \leq\rangle$ – ЧУМ $\Rightarrow \langle B; \leq\rangle$ – конечное ЧУМ $\Rightarrow \exists a \in B$ такое, что $a \leq c$, a – минимальное $\Rightarrow a \neq 0$,

a – минимальный среди ненулевых $\Rightarrow a$ – атом, $a \leq c \Rightarrow \mathfrak{A}$ – атомная.

ПРИМЕР 22 безатомная булева алгебра:

$\langle \mathcal{P}(\mathbb{Q}); \cup, \cap, ^-, 0, 1\rangle$ – булева алгебра, рассмотрим такие элементы:



$I \leftrightharpoons \{[p;q), (-\infty;p), [q;+\infty) \mid p, q \in \mathbb{Q}$, интервалы равномощны$\}$

$B \leftrightharpoons \{V_1 \vee V_2 \vee \ldots \vee V_k \mid V_i \in I\}$

B замкнуто относительно $\cup, \cap, ^-$:

пусть $V_1 = [p_1;q_1), V_2 = [p_2;q_2)$, тогда $V_1 \cup V_2 = [p_1;q_1) \vee [p_1;q_2) \vee [p_2;q_2) \vee [p_2;q_1) \ni B$,

$V_1 \cap V_2 = \varnothing \vee [p_1;q_1) \vee [p_1;q_2) \vee [p_2;q_2) \vee [p_2;q_1) \ni B$, $\overline{V_2} = (-\infty;p_2) \vee [q_2;+\infty) \ni B$,

$\varnothing \in B$ и $\mathbb{Q} \in B$. $b, c \in B$ $b \cup c, b \cap c, \bar{b} \in B \Rightarrow \langle B; \cup, \cap, ^-, \varnothing, \mathbb{Q}\rangle$ – булева алгебра.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 23 $\mathfrak{A} = \langle B; \cup, \cap, ^-, \varnothing, \mathbb{Q}\rangle$ – булева алгебра, очевидно, если принять во внимание, что $\varnothing = 0^{\mathfrak{A}}, 1^{\mathfrak{A}} = \mathbb{Q}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 24 $\mathfrak{A} = \langle A; \cup, \cap, ^-, \varnothing, \mathbb{Q}\rangle$ – безатомная булева алгебра, счётная.

Док-во:

1) $\mathfrak{A}$ – безатомная булева алгебра, пусть $c \in \mathfrak{A}, c \neq 0$, т.е. $c \in \mathfrak{A}, c \neq \varnothing \Rightarrow \exists V \leq c$:
$(V = [q;p)) \vee (V = (-\infty;q)) \vee (V = [p;+\infty)) \Rightarrow \exists t, r \in \mathbb{Q} : t < r$ $[t,r) < c$, т.к. достаточно выбрать одну из частей $\bar{c}$: $c = [p_1;q_1) \Rightarrow V = (-\infty;p_1)$; $c = (-\infty;p_1) \Rightarrow V = [p_1;+\infty)$;
$c = [q_1;+\infty) \Rightarrow V = (-\infty;q_1)$, т.е. $\exists t, r \in \mathbb{Q} : t < r$ $[t,r] < c$, т.к. $c = \bigcup_i [p_i;q_i)$ – из построения B. $\Rightarrow [t;\frac{t+r}{2}), [\frac{t+r}{2}, r) \neq \varnothing < c$ и не пересекаются $\Rightarrow c$ – не атом $\Rightarrow$
$\mathfrak{A}$ – безатомная.

2) $\mathfrak{A}$ – счётно. $\mathbb{Q}^* \leftrightharpoons \{(p_1, \ldots, p_n) \mid n \in \mathbb{N}, p_i \in \mathbb{Q}\}$ – счётно $\Rightarrow A$ – счётно, т.к. $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (p_i;q_i)$, то количество p_i – счётно, т.к. $p_i \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ количество отрезков тоже счётно, т.к. они построены на p_i.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 25 $\mathfrak{A}$ – булева алгебра, $a, b \in \mathfrak{A}$ $a \cap b = 0 \Leftrightarrow a \leq \bar{b}$

Док-во:

$(\Rightarrow)$ $a \cap b = 0 \Rightarrow a = a \cap 1 = a \cap (b \cup \bar{b}) = (a \cap b) \cup (a \cap \bar{b}) = 0 \cup (a \cap \bar{b}) = a \cap \bar{b} \Rightarrow a \leq \bar{b}$

$(\Leftarrow)$ $a \leq \bar{b} \Rightarrow a = a \cap \bar{b} \Rightarrow a \cap b = (a \cap \bar{b}) \cap b = a \cap (\bar{b} \cap b) = a \cap 0 = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 26 $\mathfrak{A}$ – булева алгебра, $a, b \in \mathfrak{A}$ a – атом $a \leq b \Leftrightarrow a \nleq \bar{b}$.

Док-во:

$a = a \cap 1 = a \cap (b \cup \bar{b}) = (a \cap b) \cup (a \cap \bar{b}) \Rightarrow \begin{cases} a \cap b \leq a \Rightarrow \cancel{\left[\begin{matrix} =0 \\ =a \end{matrix}\right.} \\ a \cap \bar{b} \leq a \Rightarrow \cancel{\left[\begin{matrix} =0 \\ =a \end{matrix}\right.} \end{cases}$

$a \wedge b = a$
$a \wedge b = 0$
$a \wedge \bar{b} = a$
$a \wedge \bar{b} = 0$

1) $a \cap b = 0, a \cap \bar{b} = 0 \Rightarrow 0 \cup 0 = a$ – противоречие, т.к. 0 не атом.

2) $a \cap b = a, a \cap \bar{b} = a \Rightarrow a = a \cap a = (a \cap b) \cap (a \cap \bar{b}) = (a \cap a) \cap (b \cap \bar{b}) = 0$ – противоречие.

3) $a \cap b = a, a \cap \bar{b} = 0 \Rightarrow a \leq b \Rightarrow a \cap \bar{b} \neq a \Rightarrow a \nleq \bar{b}$

4) $a \cap b = 0, a \cap \bar{b} = a \Rightarrow a \cap b \neq a \Rightarrow a \nleq b \Rightarrow a \leq \bar{b}$ $\models$ $\underset{c-\text{ал}}{a \leq b} \Leftrightarrow a \nleq \bar{b}$

ЗАМЕЧАНИЕ 27 пусть $\mathfrak{A}$ – булева алгебра, $a, b, c \in \mathfrak{A}$. Тогда:

а) $c \leq a \cap b \Leftrightarrow c \leq a$ и $c \leq b$;

б) $c \geq a \cup b \Leftrightarrow c \geq a$ и $c \geq b$.

Док-во:

а) $(\Rightarrow)$ $c \leq a \cap b$, $a \cap b \leq a$, $a \cap b \leq b \Rightarrow c \leq a, c \leq b$.
$(\Leftarrow)$ $c \leq a, c \leq b \Rightarrow c \leq \inf\{a, b\}$, $a \cap b = \inf\{a, b\} \Rightarrow c \leq a \cap b$.

б) $(\Rightarrow)$ $c \geq a \cup b$, $a \cup b \geq a$, $a \cup b \geq b \Rightarrow c \geq a, c \geq b$.
$(\Leftarrow)$ $c \geq a, c \geq b \Rightarrow c \geq \sup\{a, b\}$, $a \cup b = \sup\{a, b\} \Rightarrow c \geq a \cup b$.

ЗАМЕЧАНИЕ 28 $\mathfrak{A}$ – булева алгебра, $a_1, \ldots, a_n \in A$.

а) $a_1 \cup \ldots \cup a_n = \sup\{a_1, \ldots, a_n\}$

б) $a_1 \cap \ldots \cap a_n = \inf\{a_1, \ldots, a_n\}$

Док-во: индукцией по n.

а) $n = 1$: $a_1 = \sup\{a_1\}$ – очевидно.
$n = 2$: $a_1 \cup a_2 = \sup\{a_1, a_2\}$ – по определению.
$n \to n+1$: $a_1 \cup \ldots \cup a_{n+1} = (a_1 \cup \ldots \cup a_n) \cup a_{n+1} = \sup\{a_1, \ldots, a_n\} \cup a_{n+1} = \sup\{\sup\{a_1, \ldots, a_n\}, a_{n+1}\} \leftrightharpoons c \overset{?}{=}$
$= \sup\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \leftrightharpoons q$.
покажем, что $c = q$: $c \geq \sup\{a_1, \ldots, a_n\}$, $c \geq \{a_{n+1}\} \Rightarrow c \geq \sup\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \Rightarrow c \geq q$.
$q \geq \{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \Rightarrow q \geq \{a_1, \ldots, a_n\} \Rightarrow q \geq \sup\{a_1, \ldots, a_n\}$, $q \geq a_{n+1} \Rightarrow q \geq \sup\{\sup\{a_1, \ldots, a_n\}, a_{n+1}\} = c$.

б) $n = 1$: $a_1 = \inf\{a_1\}$ – очевидно.
$n = 2$: $a_1 \cap a_2 = \inf\{a_1, a_2\}$ – по определению.
$n \to n+1$: $a_1 \cap \ldots \cap a_{n+1} = (a_1 \cap \ldots \cap a_n) \cap a_{n+1} = \inf\{a_1, \ldots, a_n\} \cap a_{n+1} = \inf\{\inf\{a_1, \ldots, a_n\}, a_{n+1}\} \leftrightharpoons c \overset{?}{=}$
$= \inf\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \leftrightharpoons q$.
покажем, что $c = q$: $c \leq \inf\{a_1, \ldots, a_n\}$, $c \leq \{a_{n+1}\} \Rightarrow c \leq \inf\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \Rightarrow c \leq q$.
$q \leq \{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \Rightarrow q \leq \{a_1, \ldots, a_n\} \Rightarrow q \leq \inf\{a_1, \ldots, a_n\}$, $q \leq a_{n+1} \Rightarrow q \leq \inf\{\inf\{a_1, \ldots, a_n\}, a_{n+1}\} = c$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 29 $\mathfrak{A}$ – конечная булева алгебра, $a \in \mathfrak{A}$, $\boxed{a = \bigcup_{c \in At(a)} c}$, $a = \sup\{At(a)\}$,
$At(a) = \{c_1, \ldots, c_k\}$, $a = c_1 \cup \ldots \cup c_k$.

каждый элемент яв-ся объединением своих атомов

Док-во:

$a \in \mathfrak{A}$, $C \leftrightharpoons At(a)$, $b \leftrightharpoons \bigcup_{d \in C} d$, покажем, что $a = b$:

1) $a \leq b$ (от противного); пусть $a \nleq b$, $b = \bar{\bar{b}} \Rightarrow a \nleq \bar{\bar{b}} \Rightarrow a \cap \bar{b} \neq 0 \Rightarrow \exists d \in At(a) : d \leq a \cap \bar{b} \Rightarrow d \leq a \Rightarrow$
$\Rightarrow d \in C \Rightarrow d \leq b, d \leq \bar{b} \Rightarrow d \leq b \cap \bar{b} \Rightarrow d = 0$ – противоречие $\models$ $a \leq b$.

2) $b \leq a$: $\forall d \in C$, $d \leq a$, $b = \sup C \Rightarrow b \leq a$ $\models$ $b = a$.

ТЕОРЕМА 30 Стоуна для конечных булевых алгебр:

$\mathfrak{A}$ – конечная булева алгебра, $\mathfrak{A} \cong \langle \mathcal{P}(At(\mathfrak{A})); \cup, \cap, ^-, \varnothing, At(\mathfrak{A})\rangle$.

Док-во:

$h: |\mathfrak{A}| \to \mathcal{P}(At(\mathfrak{A}))$, $a \in \mathfrak{A}$, $h(a) \leftrightharpoons At(a) \leftrightharpoons \{c \mid c$ – атом и $c \leq a\}$.

1) h – взаимно однозначное:

а) h – разнозначно: $a, b \in \mathfrak{A}, a \neq b \Rightarrow a \nleq b$ либо $b \nleq a$. Пусть $a \nleq b \Rightarrow a \cap \bar{b} \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists d \in At(\mathfrak{A}) : d \leq a \cap \bar{b} \Rightarrow d \leq a, d \leq \bar{b} \Rightarrow d \in At(a) = h(a) \Rightarrow d \nleq b \Rightarrow d \notin At(b) = h(b) \Rightarrow h(a) \neq h(b)$

б) h – "на": $C \subseteq At(\mathfrak{A})$, $a \leftrightharpoons \bigcup_{d \in C} d = \sup C$. Покажем, что $h(a) = C$. $D \leftrightharpoons h(a)$, покажем, что $D = C$.
$C \subseteq D$: $b \in C \Rightarrow \cancel{b \in At(\mathfrak{A})} \Rightarrow b \leq a \Rightarrow b \in At(a) = h(a) = D$.
$C \supseteq D$: $b \in D \Rightarrow b \in At(a) \Rightarrow b$ – атом, $b \leq a$, пусть $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$, $a = c_1 \cup \ldots \cup c_n \Rightarrow b = b \cap a =$
$= (b \cap c_1) \cup \ldots \cup (b \cap c_n) \Rightarrow \exists k \leq n$ $b \cap c_k \neq 0$, $0 \neq b \cap c_k \leq b$, b – атом $\Rightarrow b \cap c_k = b$.
$0 < b \cap c_k \leq c_k$ – атом $\Rightarrow b \cap c_k = c_k \models b = c_k \Rightarrow b \in C$ $\models D \subseteq C$. т.е. $C = h(a)$

2) h – сохраняет операции и константы:

а) для пересечения: $a, b \in \mathfrak{A}$, $h(a \cap b) = h(a) \cap h(b)$
$h(a \cap b) \leftrightharpoons \{c \in At(\mathfrak{A}) \mid c \leq a \cap b\} = \{c \in At(\mathfrak{A}) \mid c \leq a$ и $c \leq b\} = \{c \in At(\mathfrak{A}) \mid c \leq a\} \cap \{c \in At(\mathfrak{A}) \mid c \leq b\} =$
$= h(a) \cap h(b)$.

б) для дополнения: $h(\bar{a}) = \overline{h(a)} = At(\mathfrak{A}) \setminus h(a)$
$c \in h(\bar{a}) \Leftrightarrow c \in At(\mathfrak{A})$ и $c \leq \bar{a} \Leftrightarrow c \in At(\mathfrak{A})$ и $c \nleq a \Leftrightarrow c \in At(\mathfrak{A})$ и $c \notin At(a) \Leftrightarrow c \in At(\mathfrak{A}) \setminus At(a) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow c \in At(\mathfrak{A}) \setminus h(a) \models h(\bar{a}) = \overline{h(a)}$.

в) для объединения: $h(a \cup b) = h(a) \cup h(b)$
$h(a \cup b) = h(\overline{\overline{a \cup b}}) = \overline{h(\bar{a} \cap \bar{b})} = \overline{h(\bar{a}) \cap h(\bar{b})} = \overline{\overline{h(a)} \cap \overline{h(b)}} = h(a) \cup h(b)$.

г) $h(1) = h(1 \cup \bar{1}) = h(1) \cup \overline{h(1)} = At(\mathfrak{A})$.
$h(0) = h(0 \cap \bar{0}) = h(0) \cap \overline{h(0)} = \varnothing$.

ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА.

Опр. 31 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\Sigma)$, $f : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$, f – изоморфизм, если:

а) f – взаимно однозначно.

б) f сохраняет отношения, операции и константы: $\forall p^n, g^n, c \in \Sigma$, $\forall a_1, \ldots, a_n \in A = |\mathfrak{A}|$

1) $\mathfrak{A} \models p^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models p^{\mathfrak{B}}(f(a_1), \ldots, f(a_n))$;

2) $f(g^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = g^{\mathfrak{B}}(f(a_1), \ldots, f(a_n))$;

3) $c^{\mathfrak{B}} = f(c^{\mathfrak{A}})$; обозначается $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

$\underline{M} = \{((a_1 b_1) \cup (a_2 b_2) \cup \ldots \cup (a_m b_m)) \cap Q\}$

$a_i, b_i \in Q.$

$0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq b_n \leq 1$

$\langle M; \cup, \cap$, дополн. до $(0,1) \cap Q \rangle$ – Б.А.

Пусть X – атом

$(a, b) \subseteq X \Rightarrow$

$\left(\frac{2a+b}{3}; \frac{a+2b}{3}\right) \cap X = \left(\frac{2a+b}{3}; \frac{a+2b}{3}\right)$

$X \quad \emptyset$

...тивно.

...мметрично.

... ЧУМ $\Rightarrow \exists a \in B$ такое, что $a \leq c$, a – минимальное $\Rightarrow a \neq 0$,

...улевых $\Rightarrow a$ – атом, $a \leq c \Rightarrow \mathfrak{A}$ – атомная.

...ра:

...гебра, рассмотрим такие элементы:

$I \leftrightharpoons \{[p;q), (-\infty;p), [q;+\infty) \mid p, q \in \mathbb{Q}$, интервалы равномощны$\}$

$B \leftrightharpoons \{V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k \mid V_i \in I\}$

$\cup, \cap, -$:

...), тогда $V_1 \cup V_2 = [p_1;q_1) \cup [p_1;q_2) \cup [p_2;q_2) \cup [p_2;q_1) \ni B$,

...$\cup [p_2;q_2) \cup [p_2;q_1) \ni B$, $\overline{V_2} = (-\infty;p_2) \cup [q_2;+\infty) \ni B$,

..., $b \cap c, \overline{b} \in B \Rightarrow \langle B; \cup, \cap, -, \emptyset, \mathbb{Q}\rangle$ – булева алгебра.

..., $\mathbb{Q}\rangle$ – булева алгебра, очевидно, если принять во внимание,

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 24 ... $\mathbb{Q}\rangle$ – безатомная булева алгебра, счётная.

Док-во:

1) $\mathfrak{A}$ – безатомная булева алгебра, пусть $c \in \mathfrak{A}$, $c \neq 0$, т.е. $c \in \mathfrak{A}$, $c \neq \emptyset \Rightarrow \exists V \leq c$: $(V = [q;p)) \vee (V = (-\infty;q)) \vee (V = [p;+\infty)) \Rightarrow \exists t, r \in \mathbb{Q} : t < r$ $[t, r) < c$, т.к. достаточно выбрать одну из частей $\overline{c}$: $c = [p_1;q_1) \Rightarrow V = (-\infty;p_1)$; $c = (-\infty;p_1) \Rightarrow V = [p_1;+\infty)$; $c = [q_1;+\infty) \Rightarrow V = (-\infty;q_1)$, т.е. $\exists t, r \in \mathbb{Q} : t < r$ $[t, r] < c$, т.к. $c = \bigcup_i [p_i;q_i)$ – из построения B. $\Rightarrow \left[t; \frac{t+r}{2}\right), \left[\frac{t+r}{2}, r\right) \neq \emptyset < c$ и не пересекаются $\Rightarrow c$ – не атом $\Rightarrow$ $\mathfrak{A}$ – безатомная.

2) $\mathfrak{A}$ – счётно. $\mathbb{Q}^* \leftrightharpoons \{(p_1, \ldots, p_n) \mid n \in \mathbb{N}, p_i \in \mathbb{Q}\}$ – счётно $\Rightarrow A$ – счётно, т.к. $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (p_i; q_i)$, то количество p_i – счётно, т.к. $p_i \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ количество отрезков тоже счётно, т.к. они построены на p_i.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 25 $\mathfrak{A}$ – булева алгебра, $a, b \in \mathfrak{A}$ $a \cap b = 0 \Leftrightarrow a \leq \overline{b}$

Док-во:

$(\Rightarrow)$ $a \cap b = 0 \Rightarrow a = a \cap 1 = a \cap (b \cup \overline{b}) = (a \cap b) \cup (a \cap \overline{b}) = 0 \cup (a \cap \overline{b}) = a \cap \overline{b} \Rightarrow a \leq \overline{b}$

$(\Leftarrow)$ $a \leq \overline{b} \Rightarrow a = a \cap \overline{b} \Rightarrow a \cap b = (a \cap \overline{b}) \cap b = a \cap (\overline{b} \cap b) = a \cap 0 = 0.$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 26 $\mathfrak{A}$ – булева алгебра, $a, b \in \mathfrak{A}$ a – атом $a \leq b \Leftrightarrow a \nleq \overline{b}$.

Док-во:

$a = a \cap 1 = a \cap (b \cup \overline{b}) = (a \cap b) \cup (a \cap \overline{b}) \Rightarrow \begin{cases} a \cap b \leq a \Rightarrow \cancel{\left[\begin{smallmatrix} b=0 \\ b=a \end{smallmatrix}\right.} \\ a \cap \overline{b} \leq a \Rightarrow \cancel{\left[\begin{smallmatrix} b=0 \\ b=a \end{smallmatrix}\right.} \end{cases}$

$a \cap b = a$
$a \cap b = 0$
$a \cap \overline{b} = a$
$a \cap \overline{b} = 0$

1) $a \cap b = 0$, $a \cap \overline{b} = 0 \Rightarrow a = 0 \cup 0 = a$ – противоречие, т.к. 0 не атом.

2) $a \cap b = a$, $a \cap \overline{b} = a \Rightarrow a = a \cap a = (a \cap b) \cap (a \cap \overline{b}) = (a \cap a) \cap (b \cap \overline{b}) = 0$ – противоречие.

3) $a \cap b = a$, $a \cap \overline{b} = 0 \Rightarrow a \leq b \Rightarrow a \cap \overline{b} \neq a \Rightarrow a \nleq \overline{b}$

4) $a \cap b = 0$, $a \cap \overline{b} = a \Rightarrow a \cap b \neq a \Rightarrow a \nleq b \Rightarrow a \leq \overline{b}$ $\models$ $a \leq b \Leftrightarrow a \nleq \overline{b}$

ЗАМЕЧАНИЕ 27 пусть $\mathfrak{A}$ – булева алгебра, $a, b, c \in \mathfrak{A}$. Тогда:

а) $c \leq a \cap b \Leftrightarrow c \leq a$ и $c \leq b$;

б) $c \geq a \cup b \Leftrightarrow c \geq a$ и $c \geq b$.

Док-во:

а) $(\Rightarrow)$ $c \leq a \cap b$, $a \cap b \leq a$, $a \cap b \leq b \Rightarrow c \leq a, c \leq b$.

$(\Leftarrow)$ $c \leq a, c \leq b \Rightarrow c \leq \inf\{a, b\}$, $a \cap b = \inf\{a, b\} \Rightarrow c \leq a \cap b$.

б) $(\Rightarrow)$ $c \geq a \cup b$, $a \cup b \geq a$, $a \cup b \geq b \Rightarrow c \geq a, c \geq b$.

$(\Leftarrow)$ $c \geq a, c \geq b \Rightarrow c \geq \sup\{a, b\}$, $a \cup b = \sup\{a, b\} \Rightarrow c \geq a \cup b$.

ЗАМЕЧАНИЕ 28 $\mathfrak{A}$ – булева алгебра, $a_1, \ldots, a_n \in A$.

а) $a_1 \cup \ldots \cup a_n = \sup\{a_1, \ldots, a_n\}$

б) $a_1 \cap \ldots \cap a_n = \inf\{a_1, \ldots, a_n\}$

Док-во: индукцией по n.

а) $n = 1$: $a_1 = \sup\{a_1\}$ – очевидно.

$n = 2$: $a_1 \cup a_2 = \sup\{a_1, a_2\}$ – по определению.

$n \to n+1$: $a_1 \cup \ldots \cup a_{n+1} = (a_1 \cup \ldots \cup a_n) \cup a_{n+1} = \sup\{a_1, \ldots, a_n\} \cup a_{n+1} = \sup\{\sup\{a_1, \ldots, a_n\}, a_{n+1}\} \leftrightharpoons c \stackrel{?}{=}$
$= \sup\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \leftrightharpoons q$.

покажем, что $c = q$: $c \geq \sup\{a_1, \ldots, a_n\}$, $c \geq \{a_{n+1}\} \Rightarrow c \geq \sup\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \Rightarrow c \geq q$.

$q \geq \{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \Rightarrow q \geq \{a_1, \ldots, a_n\} \Rightarrow q \geq \sup\{a_1, \ldots, a_n\}$, $q \geq a_{n+1} \Rightarrow q \geq \sup\{\sup\{a_1, \ldots, a_n\}, a_{n+1}\} = c$.

б) $n = 1$: $a_1 = \inf\{a_1\}$ – очевидно.

$n = 2$: $a_1 \cap a_2 = \inf\{a_1, a_2\}$ – по определению.

$n \to n+1$: $a_1 \cap \ldots \cap a_{n+1} = (a_1 \cap \ldots \cap a_n) \cap a_{n+1} = \inf\{a_1, \ldots, a_n\} \cap a_{n+1} = \inf\{\inf\{a_1, \ldots, a_n\}, a_{n+1}\} \leftrightharpoons c \stackrel{?}{=}$
$= \inf\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \leftrightharpoons q$.

покажем, что $c = q$: $c \leq \inf\{a_1, \ldots, a_n\}$, $c \leq \{a_{n+1}\} \Rightarrow c \leq \inf\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \Rightarrow c \leq q$.

$q \leq \{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \Rightarrow q \leq \{a_1, \ldots, a_n\} \Rightarrow q \leq \inf\{a_1, \ldots, a_n\}$, $q \leq a_{n+1} \Rightarrow q \leq \inf\{\inf\{a_1, \ldots, a_n\}, a_{n+1}\} = c$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 29 $\mathfrak{A}$ – конечная булева алгебра, $a \in \mathfrak{A}$, $\boxed{a = \bigcup_{c \in At(a)} c}$, $a = \sup\{At(\mathfrak{A})\}$,
$At(\mathfrak{A}) = \{c_1, \ldots, c_k\}$, $a = c_1 \cup \ldots \cup c_k$.

каждый элемент яв-ся объединением своих атомов

Док-во:

$a \in \mathfrak{A}$, $C \leftrightharpoons At(a)$, $b \leftrightharpoons \bigcup_{d \in C} d$, покажем, что $a = b$:

1) $a \leq b$ (от противного): Пусть $a \nleq b$, $b = \overline{\overline{b}} \Rightarrow a \nleq \overline{\overline{b}} \Rightarrow a \cap \overline{b} \neq 0 \Rightarrow \exists d \in At(a)$: $d \leq a \cap \overline{b} \Rightarrow d \leq a \Rightarrow$
$\Rightarrow d \in C \Rightarrow d \leq b, d \leq \overline{b} \Rightarrow d \leq b \cap \overline{b} \Rightarrow d = 0$ – противоречие $\models a \leq b$.

2) $b \leq a$: $\forall d \in C$, $d \leq a$, $b = \sup C \Rightarrow b \leq a \models b = a$.

ТЕОРЕМА 30 Стоуна для конечных булевых алгебр:

$\mathfrak{A}$ – конечная булева алгебра, $\mathfrak{A} \cong \langle P(At(\mathfrak{A})); \cup, \cap, -, \emptyset, At(\mathfrak{A})\rangle$.

Док-во:

$h: |\mathfrak{A}| \to P(At(\mathfrak{A}))$, $a \in \mathfrak{A}$, $h(a) \leftrightharpoons At(a) \leftrightharpoons \{c \mid c$ – атом и $c \leq a\}$.

1) h – взаимно однозначное:

а) h – разнозначно: $a, b \in \mathfrak{A}$, $a \neq b \Rightarrow a \nleq b$ либо $b \nleq a$. Пусть $a \nleq b \Rightarrow a \cap \overline{b} \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists d \in At(\mathfrak{A})$: $d \leq a \cap \overline{b} \Rightarrow d \leq a, d \leq \overline{b} \Rightarrow d \in At(a) = h(a) \Rightarrow d \nleq b \Rightarrow d \notin At(b) = h(b) \Rightarrow h(a) \neq h(b)$

б) h – "на": $C \subseteq At(\mathfrak{A})$, $a \leftrightharpoons \bigcup_{d \in C} d = \sup C$. Покажем, что $h(a) = C$. $D \leftrightharpoons h(a)$, покажем, что $D = C$.

$C \subseteq D$: $b \in C \Rightarrow \underline{b \in At(\mathfrak{A})} \Rightarrow b \leq a \Rightarrow b \in At(a) = h(a) = D$.

$C \supseteq D$: $b \in D \Rightarrow b \in At(a) \Rightarrow b$ – атом, $b \leq a$, пусть $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$, $a = c_1 \cup \ldots \cup c_n \Rightarrow b = b \cap a =$
$= (b \cap c_1) \cup \ldots \cup (b \cap c_n) \Rightarrow \exists k \leq n$ $b \cap c_k \neq 0$, $0 \neq b \cap c_k \leq b$, b – атом $\Rightarrow b \cap c_k = b$.
$0 < b \cap c_k \leq c_k$ – атом $\Rightarrow b \cap c_k = c_k \models b = c_k \Rightarrow b \in C \models D \subseteq C$. Т.е. $C = h(a)$

2) h – сохраняет операции и константы:

а) для пересечения: $a, b \in \mathfrak{A}$, $h(a \cap b) = h(a) \cap h(b)$
$h(a \cap b) \leftrightharpoons \{c \in At(\mathfrak{A}) \mid c \leq a \cap b\} = \{c \in At(\mathfrak{A}) \mid c \leq a$ и $c \leq b\} = \{c \in At(\mathfrak{A}) \mid c \leq a\} \cap \{c \in At(\mathfrak{A}) \mid c \leq b\} =$
$= h(a) \cap h(b)$.

б) для дополнения: $h(\overline{a}) = \overline{h(a)} = At(\mathfrak{A}) \setminus h(a)$
$c \in h(\overline{a}) \Leftrightarrow c \in At(\mathfrak{A})$ и $c \leq \overline{a} \Leftrightarrow c \in At(\mathfrak{A})$ и $c \nleq a \Leftrightarrow c \in At(\mathfrak{A})$ и $c \notin At(a) \Leftrightarrow c \in At(\mathfrak{A}) \setminus At(a) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow c \in At(\mathfrak{A}) \setminus h(a) \models h(\overline{a}) = \overline{h(a)}$.

в) для объединения: $h(a \cup b) = h(a) \cup h(b)$
$h(a \cup b) = h(\overline{\overline{a \cup b}}) = \overline{h(\overline{a} \cap \overline{b})} = \overline{h(\overline{a}) \cap h(\overline{b})} = \overline{\overline{h(a)} \cap \overline{h(b)}} = h(a) \cup h(b)$.

г) $h(1) = h(1 \cup \overline{1}) = h(1) \cup \overline{h(1)} = At(\mathfrak{A})$.
$h(0) = h(0 \cap \overline{0}) = h(0) \cap \overline{h(0)} = \emptyset$.

ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА.

Опр.31 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $f: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$, f – изоморфизм, если:

а) f – взаимно однозначно.

б) f сохраняет отношение, операции и константы: $\forall p^n, g^n, c \in \sigma$, $\forall a_1, \ldots, a_n \in A = |\mathfrak{A}|$

1) $\mathfrak{A} \models p^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models p^{\mathfrak{B}}(f(a_1), \ldots, f(a_n))$;

2) $f(g^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = g^{\mathfrak{B}}(f(a_1), \ldots, f(a_n))$;

3) $c^{\mathfrak{B}} = f(c^{\mathfrak{A}})$; обозначается $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

ТЕОРЕМА 32 Теорема Стоуна:

Пусть $\mathfrak{A}$ – булева алгебра, тогда $\exists X$, $\exists \mathfrak{B} \leftrightharpoons \langle \mathcal{P}(X); \cup, \cap, -, \varnothing, X \rangle$, что $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, т.е. любая булева алгебра изоморфна подалгебре алгебры всех подмножеств некоторого множества.

ЗАМЕЧАНИЕ 33 $\mathfrak{A}$ – счётная или безатомная булева алгебра, тогда $\forall X$ $\mathfrak{A} \ncong \langle \mathcal{P}(X); \cup, \cap, -, \varnothing, X \rangle$.

Док-во:

Мощность множества. Теорема Кантора – Бернштейна, теорема Кантора. Счётные множества. Счётность множества слов в конечном алфавите. Несчётность множества вещественных чисел. Континуум. Равномощность множества вещественных чисел и множества всех подмножеств множества натуральных чисел. Бесконечность класса бесконечных мощностей. Континуум-гипотеза и обобщённая континуум-гипотеза. Ординальные и кардинальные числа.

Опр 1 Два множества наз. равномощными, если между ними $\exists f: A \to B$ – взаимно однозначное соответствие. $\|A\| = \|B\|$ – обозначение.

$\|A\| \leq \|B\| \Leftrightarrow \exists C \subseteq B: \|A\| = \|C\|$.

$\|A\| < \|B\| \Leftrightarrow \|A\| \leq \|B\|$ и $\|A\| \neq \|B\|$.

Опр. 2 $f: A \to B$ – взаимно однозначное, если f – функция и:

а) f – разнозначно, т.е. $\forall a, c \in A$ $a \neq c \to f(a) \neq f(c)$.

б) f – "на", т.е. $\operatorname{im} f \leftrightharpoons f(A) = B \leftrightharpoons \{f(a) \mid a \in A\}$, т.е. $\forall b \in B$ $\exists a \in A \mid f(a) = b$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3

а) $f: A \to B$ – отображение, f – взаимно однозначно $\Leftrightarrow$ f – обратимо.

б) $f: A \to B$ – взаимно однозначно $\Rightarrow f^{-1}: B \to A$ – взаимно однозначно.

в) $f: A \to B$, $g: B \to C$ – взаимно однозначно, то $f \circ g: A \to C$ – взаимно однозначно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 отношение равномощности является отношением эквивалентности:

а) $\|A\| = \|A\|$, т.к. $id_A: A \to A$ – взаимно однозначное – рефлексивность.

б) $\|A\| = \|B\| \Rightarrow \exists f: A \to B$ – взаимно однозначное $\Rightarrow f^{-1}: B \to A$ – взаимно однозначное $\Rightarrow$ $\Rightarrow \|B\| = \|A\|$ – симметричность.

в) $\|A\| = \|B\|$, $\|B\| = \|C\| \Rightarrow \exists f: A \to B, \exists g: B \to C$ – взаимно однозначные $\Rightarrow$ $\Rightarrow f \circ g: A \to C$ – взаимно однозначное $\Rightarrow \|A\| = \|C\|$ – транзитивность.

ЗАМЕЧАНИЕ 5 $\|A\| \leq \|B\| \Leftrightarrow \exists$ разнозначное отображение $f: A \to B$.

Док-во:

($\Rightarrow$) $\|A\| \leq \|B\| \Rightarrow \exists C \subseteq B: \|A\| = \|C\| \Rightarrow \exists f: C \to A$ – взаимно однозначно $\Rightarrow f$ – разнозначно.

($\Leftarrow$) $f: A \to B$ – разнозначно, $C \leftrightharpoons f(A) \Rightarrow f: A \to C$ – взаимно однозначно, $C \subseteq B \Rightarrow \|A\| \leq \|B\|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6 $f: A \to B$, $g: B \to C$ – разнозначные $\Rightarrow f \circ g: A \to C$ – разнозначное.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 $\|A\| \leq \|B\|$ – предпорядок.

Док-во:

а) $\|A\| \leq \|A\|$, т.к. $id_A: A \to A$ – разнозначно – рефлексивность.

б) $\|A\| \leq \|B\|$, $\|B\| \leq \|C\| \Rightarrow \exists f: A \to B, \exists g: B \to C$ – разнозначные $\Rightarrow f \circ g: A \to C$ – разнозначно – – транзитивность.

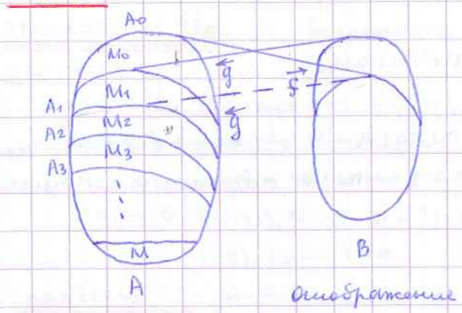
$a \in A_{i+2} = f \circ g(A_i) \Rightarrow \exists b \in A_i . f \circ g(A_i) = a$

$a \notin A_{i+3} = f \circ g(A_{i+1}) \Rightarrow \forall b \in A_{i+1}$

ТЕОРЕМА 8 Теорема Кантора – Бернштейна:

$\|A\| \leq \|B\|$ и $\|B\| \leq \|A\| \Rightarrow \|A\| = \|B\|$.

Док-во:



$\|A\| \leq \|B\|$,

$\|B\| \leq \|A\| \Rightarrow \exists f: A \to B$, $\exists g: B \to A$ – разнозначные.

$A_0 \leftrightharpoons A$, $A_1 \leftrightharpoons g(B)$, $g: B \to A_1$ – взаимно однозначное, т.к.

g – разнозначно (по условию) и g – "на", т.к. $A_1 = g(B)$ – по условию, тогда $\|B\| = \|A_1\|$.

Итак, нам достаточно доказать, что $\|A\| = \|A_1\|$, тогда $f \circ g$ – разнозначно и $f \circ g: A \to A_1$ и $\|A\| = \|B\|$.

$A_{n+2} \leftrightharpoons f \circ g(A_n)$, $A_2 = f \circ g(A_0)$, $A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$; $M_i \leftrightharpoons A_i \setminus A_{i+1}$

Отображение $f \circ g(M_i) = M_{i+2}$, $f \circ g: M_i \to M_{i+2}$ – взаимно однозначно, т.к. $\exists b . f \circ g(b) = a$?

$f \circ g$ – разнозначно (по условию), и $f \circ g$ – "на", т.к.: ($\Rightarrow$) $f \circ g(M_i) \supseteq M_{i+2}$; пусть $a \in M_{i+2}$, т.к. $M_{i+2} = A_{i+2} \setminus A_{i+3}$, то $a \in A_{i+2}$ и $a \notin A_{i+3} \Rightarrow f \circ g(A_i) = A_{i+2}$ и $f \circ g(A_{i+1}) \neq A_{i+3}$, $f \circ g$ – разнозначно $\Rightarrow$ $\Rightarrow f \circ g(A_i \setminus A_{i+1}) = f \circ g(M_i)$. ($\Leftarrow$) $f \circ g(M_i) \subseteq M_{i+2}$; пусть $a \in M_i$, покажем, что $f \circ g(a) \in M_{i+2}$:

$A_{i+2} = f \circ g(A_i)$, $a \in A_i$, $f \circ g$ – разнозначно $\Rightarrow f \circ g(a) \in A_{i+2}$; $A_{i+3} = f \circ g(A_{i+1})$, $a \notin A_{i+1}$, $f \circ g$ – разнозначно $\Rightarrow f \circ g(a) \notin A_{i+3}$, $M_{i+2} = A_{i+2} \setminus A_{i+3} \Rightarrow f \circ g(a) \in A_{i+2} \setminus A_{i+3} = M_{i+2}$; $\Rightarrow$ т.е. $f \circ g$ – "на".

$M \leftrightharpoons \bigcap A_i$, $h: A \to A_1$, $a \in A$ и $h(a) \leftrightharpoons \begin{cases} a, & a \in ((\bigcup_n M_{2n+1}) \cup M) \\ g(f(a)), & a \in (\bigcup_n M_{2n}) \end{cases}$, тогда $h: A \to A_1$ – взаимно однозначно,

т.к. h – разнозначно (из построения): $a_1 \neq a_2$ и $h(a_1) = h(a_2)$, если $a_1, a_2 \in ((\bigcup_n M_{2n+1}) \cup M)$, то $h(a_1) = a_1 \neq a_2 = h(a_2)$ – противоречие, если $a_1 \in ((\bigcup_n M_{2n+1}) \cup M)$, а $a_2 \in (\bigcup_n M_{2n})$, то $h(a_1) = a_1$, $h(a_2) = g(f(a_2)) \neq a_1$ – противоречие, если $a_1, a_2 \in (\bigcup_n M_{2n})$, то $h(a_1) = f \circ g(a_1) \neq f \circ g(a_2) = h(a_2)$ – противоречие,

h – "на", т.к.: $(\bigcup_n M_{2n+1}) \cup M$ либо $(\bigcup_n M_{2n}) \Rightarrow A_0 = (\bigcup_n M_{2n+1}) \cup M (\bigcup_n M_{2n})$, т.е. h – взаимно однозначно, отсюда $\|A\| = \|A_1\|$, $\|A_1\| = \|B\| \Rightarrow \|A\| = \|B\|$ – ввиду транзитивности.

ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА.

ТЕОРЕМА 9 теорема Кантора:

Мощность множества меньше мощности множества всех его подмножеств, $\|A\| < \|\mathcal{P}(A)\|$.

Док-во:

а) $\|A\| \leq \|\mathcal{P}(A)\|$, $f: A \to \mathcal{P}(A)$, $f(a) \leftrightharpoons \{a\}$, f – разнозначное, т.к. $f(a_1) = \{a_1\} \neq \{a_2\} = f(a_2)$, при $a_1 = a_2$ – не верно $\Rightarrow f$ – разнозначно $\Rightarrow \|A\| \leq \|\mathcal{P}(A)\|$.

б) $\|A\| \neq \|\mathcal{P}(A)\|$, от противного:

пусть $\|A\| = \|\mathcal{P}(A)\|$, тогда $\exists h: A \to \mathcal{P}(A)$ – взаимно однозначное, a – "хороший" $\Leftrightarrow a \notin h(a)$.

$H \leftrightharpoons \{a \mid a$ – хороший$\} = \{a \in A \mid a \notin h(a)\}$, $H \subseteq A \Rightarrow H \subseteq \mathcal{P}(A) \Rightarrow \exists b \in A \mid h(b) \in H$.

1) $b \in H \Rightarrow b$ – хороший $\Rightarrow b \notin h(b) \in H$ – противоречие.

2) $b \notin H = h(b) \Rightarrow b \notin h(b) \Rightarrow b$ – хороший $\Rightarrow b \in H$ – противоречие.

Отсюда имеем $\|A\| \neq \|\mathcal{P}(A)\| \Rightarrow \|A\| < \|\mathcal{P}(A)\|$

ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА.

СЛЕДСТВИЕ 10 из теоремы Кантора – Бернштейна:

$\|A\| \leq \|B\|$ – частичный порядок – антисимметричность – прямое следствие.

опр. 11 A – бесконечно, если $\exists B \subseteq A$, $B \neq A: \|A\| = \|B\|$.

A – конечно, если оно не бесконечно: $\forall B \subseteq A$, $B \neq A: \|A\| \neq \|B\|$

СЛЕДСТВИЕ 12 о бесконечности бесконечных мощностей:

$\|\mathbb{N}\| < \|\mathcal{P}(\mathbb{N})\| < \|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))\| < \|\mathcal{P}(\ldots(\mathcal{P}(\mathbb{N}))\ldots)\|$

ПАРАДОКС КАНТОРА (1899)

$A \leftrightharpoons \{a \mid a$ – множество$\}$, $\mathcal{P}(A) \subseteq A \Rightarrow \|\mathcal{P}(A)\| \leq \|A\|$, $\|A\| < \|\mathcal{P}(A)\|$ – противоречие.

ПАРАДОКС РАССЕЛА (1903) Предположение о существовании множеств всех множеств ведет к противоречиям

$A \leftrightharpoons \{a \mid a \notin a\}$, $A \in a$?

1) $A \in A \Rightarrow A \notin A$
2) $A \notin A \Rightarrow A \in A$
} противоречие.

Пусть A – мн-во всех мн-в, которые не содержат себя в качестве своего элемента. Содержит ли A само себя в качестве элемента? Если да, то, по опр. A оно не должно быть элементом A $\Leftrightarrow$ если нет, то по опр. A, оно должно быть элем. A.

опр. 13 множество A наз. счётным, если $\|A\| = \|\mathbb{N}\|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14 следующие множества являются счётными:

Одному деревенскому брадобрею приказали "брить всякого, кто сам не бреется, и не брить того, кто сам бреется", как он должен поступить

а) $2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\exists f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $f(n) \leftrightharpoons 2n$.
б) $\mathbb{Z}$, $\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(n) \leftrightharpoons \begin{cases} m, & n = 2m \\ -m, & n = 2m+1 \end{cases}$.
в) $\mathbb{Q}$.

Предложение 15

а) $\mathbb{N}^2$ – счётное, $c(x,y): \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ – взаимно однозначно $\Rightarrow \|\mathbb{N}^2\| = \|\mathbb{N}\|$.
б) если A счётно, то A^2 счётно – из (в) при $A = B$.
в) A, B – счётны $\Rightarrow A \times B$ – счётно. A, B – счётные $\Rightarrow \exists f: A \to \mathbb{N}, \exists g: B \to \mathbb{N}$ – взаимно однозначные
$A \times B \xrightarrow{(f,g)} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{(c)} \mathbb{N}$, $(f,g)(a,b) \leftrightharpoons (f(a), f(b))$, $(f,g): A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ – взаимно однозначные.
$h \leftrightharpoons (f,g) \circ c$ – взаимно однозначное: $A \times B \to \mathbb{N}$.

Следствие 16

а) мощности $\|\mathbb{N}^k\| = \|\mathbb{N}\|$.
б) $A_1, \dots, A_k$ – счётны, $A_1 \times \dots \times A_k$ – счётно.

Док-во:

а) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ – счётно, $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ – счётно, $\underbrace{(\dots((\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N})\dots)}_{k\text{-раз}} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^k$ – счётно по построению.

б) $A_1, \dots, A_k$ – счётно $\Rightarrow \exists f_1: A_1 \to \mathbb{N}, \dots, \exists f_k: A_k \to \mathbb{N}$ – взаимно однозначные
$(A_1, \dots, A_k) \xrightarrow{(f_1,\dots,f_k)} \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $h \leftrightharpoons (f_1, \dots, f_k) \circ g$, $(f_1, \dots, f_k)(a_1, \dots, a_k) \leftrightharpoons (f_1(a_1), \dots, f_k(a_k))$
при $A_i = A$, $i \in \mathbb{N}$ $(\times_i A_i) = A^k$ – счётно.

Предложение 17 о множестве слов конечного алфавита:

а) $\mathbb{N}^* \leftrightharpoons \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ – счётное.

б) A – счётное $\Rightarrow A^* \leftrightharpoons \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A^k \leftrightharpoons \{(a_1, \dots, a_k) \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in A\}$ – счётное.

Док-во:

а) k, $\mathbb{N}^k$ – счётное $\Rightarrow \exists f_k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ – взаимно однозначное.
$\mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$, $h(n) \leftrightharpoons f_{e(n)}(r(n))$, h – взаимно однозначное.

{ рисунок?

б) $g: \mathbb{N} \to A$ – взаимно однозначное, $\mathbb{N} \to A^*$, $\mathbb{N} \xrightarrow{(h)} \mathbb{N}^* \xrightarrow{(g^*)} A^*$
$g^*(n_1, \dots, n_k) \leftrightharpoons (g(n_1), \dots, g(n_k))$, $g^*: \mathbb{N}^* \to A^*$ – взаимно однозначное,
$h \circ g^*: \mathbb{N} \to A^*$ – взаимно однозначное.
Т.е. множество слов конечного алфавита счётно.

Следствие 18

а) Множество всех программ счётно.
б) множество всех функций вычислимых на машине Тьюринга счётно.
в) множество частично-рекурсивных функций счётно.
г) множество многочленов с целыми коэффициентами счётно.
д) Множество алгебраических чисел счётно.

Предложение 19 A – счётное, $\mathcal{P}^f(A) \leftrightharpoons \{B \subseteq A \mid B\text{ – конечное}\}$, $\mathcal{P}^f(A)$ – счётное. Множество конечных подмножеств счётного множества счётно.

Док-во:

а) $h: A \to \mathcal{P}^f(A)$, $h(a) \leftrightharpoons \{a\}$ – разнозначное, $\{a\} \in \mathcal{P}^f(A) \Rightarrow h: A \to \mathcal{P}^f(A)$ – разнозначное $\Rightarrow \|A\| \leq \|\mathcal{P}^f(A)\|$
б) $f: A \to \mathbb{N}$ – взаимно однозначное, $g: \mathcal{P}^f(A) \to \mathbb{N}^*$ – разнозначное, $B \subseteq A$ $f'(B) \leftrightharpoons \{f(a) \mid a \in B\}$
$f': \mathcal{P}^f(A) \to \mathcal{P}^f(\mathbb{N})$ – взаимно однозначное, $C \subseteq \mathbb{N}$, C – конечное, $C = \{m_1 < \dots < m_k\}$
$V(C) \leftrightharpoons (m_1, \dots, m_k)$: $C = \{m_1, \dots, m_k\}$ и $m_1 < \dots < m_k$, $V: \mathcal{P}^f(a) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{N}^*$ – разнозначно,
$g \leftrightharpoons f' \circ V$, $g = f' \circ V: \mathcal{P}^f(A) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{N}^*$ – разнозначно, но не взаимно однозначное.
$\|\mathcal{P}^f(A) \setminus \{\emptyset\}\| \leq \|\mathbb{N}^*\| - \|\mathbb{N}\| \Rightarrow \|\mathcal{P}^f(A)\| \leq \|\mathbb{N}\|$, $\|\mathbb{N}\| = \|A\| \leq \|\mathcal{P}^f(A)\| \leq \|\mathbb{N}\| \Rightarrow$
по (т) Кантора-Бернштейна $\|\mathcal{P}^f(A)\| = \|\mathbb{N}\|$.

Замечание 20 A, B – конечные, то $A \cup B$, $A \cap B$ – конечные.

Предложение 21 В любом бесконечном множестве $\exists$ счётное подмножество.

Док-во:

A – бесконечно $\Rightarrow A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a_1 \in A \Rightarrow A \neq \{a_1\} \Rightarrow \exists a_2 \in (A \setminus \{a_1\})$, $A \neq \{a_1, a_2\} \Rightarrow \exists a_3 \in (A \setminus \{a_1, a_2\})$
$\dots$ $A \neq \{a_1, \dots, a_n\} \Rightarrow \exists a_{n+1} \in (A \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$, $B \leftrightharpoons \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow B$ – счётное, $B \subseteq A$.

Предложение 22 A – бесконечно, $a \in A$ $\|A\| = \|A \setminus \{a\}\|$.

Док-во:

A – бесконечное $\Rightarrow A \setminus \{a\}$ – бесконечное, т.к. $A = (A \setminus \{a\}) \cup \{a\} \Rightarrow$
$\exists B \subseteq A \setminus \{a\}$, B – счётно $\Rightarrow \exists f: \mathbb{N} \to B$ – взаимно однозначное, $g: A \to (A \setminus \{a\})$, $c \in A$
$g(c) \leftrightharpoons \begin{cases} c, & \text{если } c \notin B \cup \{a\}; \\ f(n+1), & \text{если } c = f(n), c \in B; \\ f(0), & \text{если } c = a. \end{cases}$ g – взаимно однозначное.

Следствие 23 A – бесконечное $\Leftrightarrow A \neq \emptyset$ и $\forall a \in A$ $\|A\| = \|A \setminus \{a\}\|$

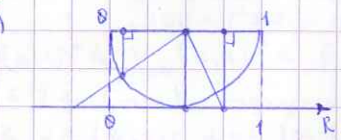
Следствие 24 а) A – бесконечное, $B \subseteq A$, B – конечно, тогда $\|A\| = \|A \setminus B\|$
б) A – ~~беск~~ счётно, B – кон $\Rightarrow$ $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B$ – сч

Опр. 25 Множество A наз. континуальным, если $\|A\| = \|\mathbb{R}\|$, $\|\mathbb{R}\| = c$ – по определению.

Замечание 26

а) $\|(0;1)\| = \|\mathbb{R}\|$
б) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ $\|(a;b)\| = \|(a;b]\| = \|[a;b)\| = \|[a;b]\| = \|\mathbb{R}\|$.
в) $\|\bigcirc\| = \|\mathbb{R}\|$

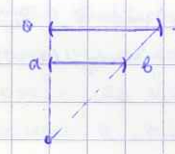
Док-во:

а) 

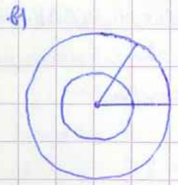
$\|(0;1)\| = \|\mathbb{R}\|$
сопоставление взаимно однозначное.

б) $\|(a;b)\| = \|(0;1)\|$ 

$\exists c, d$ $a < c < d < b$



$\|\mathbb{R}\| = \|(0;1)\| = \|(c;d)\| \leq \|\langle a;b\rangle\| \leq \|\mathbb{R}\|$ по (т) Кантора-Бернштейна получаем требуемое.

в) 
взаимно однозначное соответствие.


$\|(0;2]\| = \|\mathbb{R}\|$ – по предыдущему.

Теорема 27 о несчётности континуума: $\|\mathbb{N}\| < \|\mathbb{R}\|$

Док-во:

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \|\mathbb{N}\| \leq \|\mathbb{R}\|$, пусть $\|\mathbb{N}\| = \|\mathbb{R}\| \Rightarrow \|\mathbb{N}\| = \|(0,1)\| \Rightarrow \exists f: \mathbb{N} \to (0;1)$ – взаимно однозначное
$f(0) = 0, a_0^0 a_1^0 \dots$
$f(1) = 0, a_0^1 a_1^1 \dots$ $b_n \leftrightharpoons \begin{cases} 1, & a_n^n \neq 1 \\ 2, & a_n^n = 1 \end{cases}$; $p \leftrightharpoons 0, b_0 b_1 \dots$; $p \in (0;1) \Rightarrow \exists n: f(n) = p$, тогда
$f(2) = 0, a_0^2 a_1^2 a_2^2 \dots$ т.к. $f(n) = p \Rightarrow b_n = a_n^n$ – противоречие, откуда $\|\mathbb{N}\| < \|\mathbb{R}\|$
$\dots$ Теорема доказана.
$f(n) = 0, a_0^n a_1^n a_2^n \dots$

Континуум-гипотеза $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ $\|A\| = \|\mathbb{N}\|$ или $\|A\| = \|\mathbb{R}\|$, где A – бесконечное множество.
Эквивалентно: $\forall A$ – бесконечное $\|\mathbb{N}\| \leq \|A\| \leq \|\mathbb{R}\| \to \|A\| = \|\mathbb{N}\| \vee \|A\| = \|\mathbb{R}\|$

Следствие 28 о существовании трансцендентных чисел:

а) трансцендентные числа существуют.
б) множество трансцендентных чисел не счётно.

Док-во:

б) количество алгебраических чисел – счётно
$\left.\begin{array}{ll} A \leftrightharpoons \{q \mid q \text{ – алгебраическое}\} & \mathbb{R} = A \cup T \\ T \leftrightharpoons \{q \mid q \text{ – трансцендентно}\} & A \cap T = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow T$ – не счётно.

опр. 23 $q \in \mathbb{R}$, число q наз. алгебраическим, если $\exists P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, $a_i \in \mathbb{Q}$ и $P(q) = 0$.
число q наз. трансцендентным, если оно не является алгебраическим.

Замечание 30 $A \cap B = \emptyset$, A – счётно, B конечно, то $\|A \cup B\|$ – счётно.

Теорема 31 $\|A\| < \|C\|$, $\|B\| < \|C\|$, C – бесконечное, то $\|A \cup B\| < \|C\|$

Следствие 32 Множество трансцендентных чисел континуально.

Следствие 33

а) $\|\mathbb{R}^2\| = \|(0;1)^2\|$

б) $\|\mathbb{R}^n\| = \|(0;1)^n\|$

Док-во:

а) $f: \mathbb{R} \to (0;1)$ – взаимно однозначное, $(f,f): \mathbb{R}^2 \to (0;1)^2$
$(p,q) \rightleftharpoons (f(p), f(q))$ – взаимно однозначное.

б) $(\underbrace{f,\ldots,f}_{n\text{-раз}}): \mathbb{R}^n \to (0;1)^n$, $(f,\ldots,f)(a_1,\ldots,a_n) \rightleftharpoons (f(a_1),\ldots,f(a_n))$ – взаимно однозначное.

Теорема 34 $\|\mathbb{R}\| = \|\mathbb{R}^2\|$:

Док-во:

Покажем, что $\|(0;1)\| = \|(0;1)^2\|$, $h: (0;1)^2 \to (0;1)$, $(p,q) \in (0;1)^2$,
$p = 0,a_1 a_2 \ldots$; $q = 0,b_1 b_2 \ldots$; $h(p,q) = c$; $c \rightleftharpoons 0,a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots$
h – разнозначно, h – не "на", откуда $\|(0;1)^2\| \leq \|(0;1)\|$,

$\Rightarrow \|(0;1)\| \leq \|(0;1)^2\|$ тогда по т. Кантора-Бернштейна $\|(0;1)^2\| = \|(0;1)\|$
откуда $\|\mathbb{R}^2\| = \|(0;1)^2\| = \|(0;1)\| = \|\mathbb{R}\| = \|\mathbb{R}^2\| \Rightarrow \|\mathbb{R}^2\| = \|\mathbb{R}\|$.

Теорема 35 $\|\mathbb{R}\| = \|P(\mathbb{N})\|$

Док-во:

1) $\|P(\mathbb{N})\| \leq \|\mathbb{R}\|$
$f: P(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ – разнозначное, $A \subseteq \mathbb{N}$, $f(A) \rightleftharpoons a \in [0;1)$, $a = 0, b_0 b_1 \ldots$ – бесконечная десятичная дробь, $\chi_A(n) = b_n \rightleftharpoons \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0, & n \notin A \end{cases}$, $f(\emptyset) = 0$. f – разнозначно $\Rightarrow \|P(\mathbb{N})\| \leq \|\mathbb{R}\|$.

2) покажем, что $\|\mathbb{R}\| \leq \|P(\mathbb{N})\|$, для этого достаточно показать, что $\|(0;1)\| \leq \|P(\mathbb{N})\|$
$g: (0;1) \to P(\mathbb{N})$, $a \in (0;1)$, $a = 0, c_0 c_1$ – бесконечная двоичная дробь.
$g(a) \rightleftharpoons A \rightleftharpoons \{n \mid c_n = 1\} \Rightarrow g$ – разнозначно $\Rightarrow \|(0;1)\| \leq \|P(\mathbb{N})\|$
$\|\mathbb{R}\| = \|(0;1)\| \leq \|P(\mathbb{N})\| \leq \|\mathbb{R}\| \to$ по т. Кантора-Бернштейна $\|\mathbb{R}\| = \|P(\mathbb{N})\|$.
f, g – не взаимнооднозначны.

$\|\mathbb{R}\| < \|f(A)\| \leq \|\mathbb{R}\|$

Обобщённая континуум-гипотеза $\|\mathbb{R}\| = \|P(\mathbb{N})\|$ A, B – бесконечные множества.
$\forall B, \forall A$ $\|B\| \leq \|A\| \leq \|P(B)\| \to \|A\| = \|B\| \vee \|A\| = \|P(B)\|$.
Можно брать в качестве аксиом как ОКГ, так и КГ.

опр. 36 ординальные числа:
$0 \rightleftharpoons \emptyset$, $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$, $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$, $\omega \rightleftharpoons \{0, 1, \ldots\}$, $\omega = 2\omega = \omega + 1$.

опр. 37 ординал α – предельный, если не существует $\beta: \alpha = \beta + 1$.
ординал α наз. непредельным, если $\exists \beta: \alpha = \beta + 1$.

Замечание 38

а) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$

б) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$

Замечание 39

а) $\|\omega\| = \|\omega + 1\|$

б) $\|\omega + n\| = \|\omega\|$

в) $\|\omega\| = \|2\omega\|$

Док-во:

а) $\{0, 1, \ldots, \omega, \omega+1\}$
$\{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$

б) $\{0, 1, \ldots, (\omega + n)\}$
$\{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$

в) $\{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega\}$
$\{0, 1, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots, 2\omega\}$
$\begin{cases} 2n \to n \\ \omega \to 2\omega \\ 2n+1 \to \omega + n \end{cases}$ – взаимно однозначное.

опр. 40 кардинальные числа:
Ординал наз. кардиналом, если он не равномощен никакому меньшему ординалу.
α – кардинал, $\forall \beta < \alpha$ $\|\beta\| \neq \|\alpha\|$

Замечание 41

а) $0, 1, 2, \ldots, \omega$ – кардиналы.

б) $\omega + 1, \omega + n, 2\omega$ – не кардиналы.

Предложение 42 Бесконечный кардинал является предельным.

Док-во:

1) α – бесконечен $\Rightarrow \omega \leq \alpha \Rightarrow \omega \subseteq \alpha$.

2) от противного: $\exists \beta: \alpha = \beta + 1 \Rightarrow \beta$ – бесконечный $\Rightarrow \omega \leq \beta \Rightarrow \omega \subseteq \beta$
$\{0, 1, 2, \ldots\} \beta$
$\{0, 1, \ldots, \beta\} \alpha$ $g: \alpha \to \beta$, $g(\gamma) = \begin{cases} 0, & \gamma = \beta \\ n+1, & \gamma = n \\ \gamma, & \omega \leq \gamma \end{cases}$, g – взаимно однозначное.

Машины Тьюринга. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга.

Машина Тьюринга представляет собой бесконечный носитель информации (лента) и считывающее устройство. Характеризуется внешним и внутренним алфавитом.

опр. 1 $\{0,1\}^* \rightleftharpoons \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{0,1\}^n \rightleftharpoons \{a_1, \ldots, a_n \mid a_i \in \{0,1\}\}$, $A \rightleftharpoons \{0,1\}$ – внешний алфавит,
$Q \rightleftharpoons \{q_0, q_1, \ldots\}$ – внутренний алфавит. Машинным словом наз. последовательность $S \rightleftharpoons \alpha q_i j \beta$, где $\alpha, \beta \in \{0,1\}^n$, $j \in \{0,1\}$, $q_i \in Q$.

опр. 2 команды машины тьюринга:
$q_i j \to q_s t f$, $f \in \{L, R, \emptyset\}$. L – замена j на t и сдвиг влево; R – замена j на t и сдвиг вправо; $\emptyset$ – просто замена, $t \in \{0,1\}$.
Π – множество команд (программа). Считается, что машина начинает работать в состоянии q_1, если она переходит в состояние q_0, то она заканчивает работу.
Машина может работать бесконечно. Если в состоянии $q_i j \to$ нет команды, то машина останавливается, остановка не корректна.

опр. 3 $S_1 \xrightarrow{\Pi} S_2$: машина тьюринга T с программой Π слово S_1 за один такт работы переводит в слово S_2.
$S \overset{\Pi}{\Rightarrow} S'$: $\exists S = S_1 \xrightarrow{\Pi} S_2 \xrightarrow{\Pi} \ldots \xrightarrow{\Pi} S_n = S'$ – программа Π за конечное число шагов переводит слово S в S'.
$S \overset{\Pi}{\Rightarrow} S'$: $S \overset{\Pi}{\Rightarrow} S'$ – при этом не достраивает ячеек слева.
$S \overset{\Pi}{\Rightarrow} S'$: $S \overset{\Pi}{\Rightarrow} S'$ – находится только в рамках памяти.

опр. 4 под функциями мы будем понимать $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \cup \{H\}$, где $\{H\}$ – неопределена.
$f(n_1, \ldots, n_k) = \begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ \text{неопределена} \end{cases}$ частичная функция, определённая на натуральных числах.
$n \rightleftharpoons 0\underbrace{1\ldots1}_{(n+1)\text{-раз}}0$ – код числа n. $(n_1, \ldots, n_k) \to 0\,\underline{n_1}\,0 \ldots 0\,\underline{n_k}\,0$

опр. 5 функция $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ наз. вычислимой на машине тьюринга с программой Π, если:

а) $f(n_1, \ldots, n_k) = m$, то $q_1 0 1^{n_1+1} 0 \ldots 0 1^{n_k+1} 0 \overset{\Pi}{\Rightarrow} \alpha q_0 0 1^{m+1} 0 \beta$

б) $f(n_1, \ldots, n_k) = \{H\}$, то $q_1 0 1^{n_1+1} 0 \ldots 0 1^{n_k+1} 0$ и МТ не останавливается.

опр. 6 $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ наз. правильно вычислимой на МТ с программой Π, если:

а) $f(n_1, \ldots, n_k) = m$, то $q_1 0 1^{n_1+1} 0 \ldots 0 1^{n_k+1} 0 \Rightarrow q_0 0 1^{m+1} 0 \beta$

б) $f(n_1, \ldots, n_k) = \{H\}$, то начав с такого слова она не остановится.

опр. 7 Композиция МТ: МТ с программой Π наз. композицией МТ с программой Π_1 и Π_2 и обозначается $\Pi = \Pi_1 \circ \Pi_2$, если: $S \overset{\Pi_1}{\Rightarrow} \alpha q_0 j \beta$, $\alpha q_1 j \beta \overset{\Pi_2}{\Rightarrow} S'$, $S \overset{\Pi}{\Rightarrow} S'$
$\Pi_1: Q_1 \rightleftharpoons \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$, $\Pi_2: Q_2 \rightleftharpoons \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$, $\Pi \rightleftharpoons \Pi_1 \circ \Pi_2 \rightleftharpoons [\Pi_1]^{q_0}_{q_{n+1}} \cup [\Pi_2]^{q_i, i \neq 0}_{q_{i+n}}$

опр. 8 Условный оператор: Π_1, Π_2, Π_3, $\Pi \rightleftharpoons \Pi_1 E^{\Pi_2}_{\Pi_3}$.

$S \overset{\Pi_1}{\Rightarrow} \alpha q_0 010 \beta$, $\alpha q_1 010\beta \overset{\Pi_3}{\Rightarrow} S'$, $S \overset{\Pi}{\Rightarrow} S'$; $S \overset{\Pi_1}{\Rightarrow} \alpha q_0 \gamma$, $\gamma \neq 010\beta$, $\alpha q_1 \gamma \overset{\Pi_3}{\Rightarrow} S'$, $S \overset{\Pi}{\Rightarrow} S'$

Если в каком-то месте какая-то из машин не останавливается, то машина П не останавливается. $\Pi_1: Q_1 = \{q_0, \dots, q_n\}$; $\Pi_2: Q_2 = \{q_0, \dots, q_m\}$; $\Pi_3: Q_3 = \{q_0, \dots, q_k\}$;

Π_4: $q_1 1 \to q_{n+1} 1$, $q_1 0 \to q_2 0 R$

$q_2 1 \to q_3 1 R$, $q_2 0 \to q_{n+1} 0 L$

$q_3 1 \to q_4 1 L$, $q_3 0 \to q_5 0 L$

$q_5 1 \to q_{n+k+1} 1 L$

$q_n 1 \to q_{n+1} 1 L$

$$\Pi = [\Pi_1]^{q_0}_{q_{n+m+k+1}} \cup [\Pi_2]^{q_i, i\neq 0}_{q_{i+n+k}} \cup [\Pi_3]^{q_i, i\neq 0}_{q_{i+n}} \cup [\Pi_4]^{q_i, i\leq S}_{q_{i+n+m+k}}$$

опр. 9 Условный оператор цикла: $\Pi \leftrightharpoons \dot{\Pi}_1 E^{\Pi_2}_{\Pi_3}$

$S \overset{\Pi_1}{\Rightarrow} \alpha q_0 010\beta$, $\alpha q_1 010\beta \overset{\Pi_2}{\Rightarrow} S'$, $S \overset{\Pi}{\Rightarrow} S'$; $S \overset{\Pi_1}{\Rightarrow} \alpha q_0 \gamma$, $\gamma \neq 010\beta$, $\alpha q_1 \gamma \overset{\Pi_3}{\Rightarrow} S'$ – снова запускается Π_1.

$$\Pi = [\Pi_1] \quad \cup [\Pi_2] \quad \cup [\Pi_3]^{q_i, i\neq 0}_{q_{i+n}} \quad \cup [\Pi_4]$$

опр. 10 Базовые машины тьюринга (БМТ)

1) А перенос нуля $q_1 0 0 1^x 0 \Rrightarrow q_0 0 1^x 0 0$
2) $Б^+$ правый сдвиг $q_1 0 1^x 0 \Rrightarrow 0 1^x q_0 0$
3) $Б^-$ левый сдвиг $0 1^x q_1 0 \Rrightarrow q_0 0 1^x 0$
4) В транспозиция $0 1^x q_1 0 1^y 0 \Rrightarrow 0 1^y q_0 0 1^x 0$
5) Г удвоение $q_1 0 1^x 0^{x+2} \Rrightarrow q_0 0 1^x 0 1^x 0$
6) $Ц_n$ циклический сдвиг $q_1 0 1^{x_1} 0 \dots 0 1^{x_n} 0 \Rrightarrow q_0 0 1^{x_2} 0 \dots 0 1^{x_n} 0 1^{x_1} 0$
7) $К_n$ копирование $q_1 0 1^{x_1} 0 \dots 0 1^{x_n} 0^{n+1+x_1+\dots+x_n} \Rrightarrow q_0 0 1^{x_1} 0 \dots 0 1^{x_n} 0 1^{x_1} 0 \dots 0 1^{x_n} 0$
8) Λ ликвидация $q_1 0 1^x 0 \Rrightarrow q_0 0^{x+2}$
9) R вычитание единицы $q_1 0 1^{x+1} 0 \Rrightarrow q_0 0 1^x 0 0$
10) S прибавление единицы $q_1 0 1^x 0 0 \Rrightarrow q_0 0 1^{x+1} 0$

построение:

1) $q_1 0 \to q_2 0 R$
$q_2 0 \to q_3 0 R$
$q_3 1 \to q_3 1 R$, $q_3 0 \to q_4 0 L$
$q_4 1 \to q_5 0 L$
$q_5 0 \to q_0 1 L$, $q_5 1 \to q_5 1 L$

2) $q_1 0 \to q_2 0 R$
$q_2 0 \to q_0 0$, $q_2 1 \to q_2 1 R$

3) $q_1 0 \to q_2 0 L$
$q_2 1 \to q_2 1 L$, $q_2 0 \to q_0 0$

6) $Ц_n = (Б^+ \circ В)^{n-1} \circ (Б^-)^{n-1}$
7) $К_n = (Ц_n \circ (Б^+)^{n-1} \circ Г \circ (Б^-)^{n-1} \circ (Ц_n)^{n-1} \circ Б^+)^n \circ (Б^-)^n$
8) $q_1 0 \to q_2 0 R$
$q_2 1 \to q_2 1 R$, $q_2 0 \to q_3 0 L$
$q_3 1 \to q_3 0 L$, $q_3 0 \to q_0 0$
9) $q_1 0 \to q_2 0 R$
$q_2 1 \to q_2 1 R$, $q_2 0 \to q_3 0 L$
$q_3 1 \to q_4 0 L$
$q_4 1 \to q_4 1 L$, $q_4 0 \to q_0 0$
10) $q_1 0 \to q_2 0 R$
$q_2 1 \to q_2 1 R$, $q_2 0 \to q_3 1 L$
$q_3 1 \to q_3 1 L$, $q_3 0 \to q_0 0$

предложение 11 Следующие функции являются правильно вычислимыми на МТ:

а) $O(x) \leftrightharpoons 0$
б) $S(x) \leftrightharpoons x+1$
в) $I^n_m(x_1, \dots, x_n) \leftrightharpoons x_m$
г) $x+y$
д) $x \dot{-} 1$
е) $x \dot{-} y \leftrightharpoons \begin{cases} x-y, & x \geq y \\ 0, & x < y \end{cases}$ – усечённая разность.
ж) $x \cdot y$

Примитивно-рекурсивные, общерекурсивные и частично-рекурсивные функции.

опр. 1 Следующие функции наз. простейшими:
$O(x) \leftrightharpoons 0$; $S(x) \leftrightharpoons x+1$; $I^n_m(x_1, \dots, x_n) \leftrightharpoons x_m$, $1 \leq m \leq n$ (выдаёт то число)

опр. 2

а) оператор суперпозиции: $g(x_1, \dots, x_k)$, $h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n)$ – функции.
$f(x_1, \dots, x_k) \leftrightharpoons g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n))$, тогда f наз. оператором суперпозиции.

б) оператор примитивной рекурсии: $g(x_1, \dots, x_n)$, $h(x_1, \dots, x_n, y, z)$ – функции.
говорят, что функция f получена из функций g, h путём примитивной рекурсии.
$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n); \\ f(x_1, \dots, x_n, y+1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)); \end{cases}$$

в) оператор минимизации: $g(x_1, \dots, x_n, y)$ – функция. Тогда говорят, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ получена из g применением оператора минимизации, если
$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} y, & \text{если } g(x_1, \dots, x_n, y) = 0, \forall z < y: g(x_1, \dots, x_n, z) \text{ – определена и } g(x_1, \dots, x_n, z) \neq 0; \\ \text{не определена иначе.} \end{cases}$$
Обозначается $f(x_1, \dots, x_n) \leftrightharpoons \mu y[g(x_1, \dots, x_n, y) = 0]$

опр. 3 Примитивно-рекурсивная функция (ПРФ):
1) каждая простейшая функция является ПРФ.
2) если функция получена из ПРФ однократным применением оператора суперпозиции или примитивной рекурсии, то она ПРФ.
3) других ПРФ нет.

опр. 4 Частично-рекурсивная функция (ЧРФ):
1) каждая простейшая функция является ЧРФ.
2) Если функция получена из ЧРФ при помощи однократного применения оператора суперпозиции ПРФ или минимизации, то она ЧРФ.
3) других ЧРФ нет.

опр. 5 Обще-рекурсивная функция:
Функция наз. ОРФ, если она ЧРФ и всюду определена.

ЗАМЕЧАНИЕ 6 Каждая ПРФ всюду определена:

Док-во: индукцией по построению.

1) $O(x)$, $S(x)$, $I^n_m(x_1,\dots,x_n)$ – всюду определены.

2) а) если применишь оператор суперпозиции к ПРФ, то получаем ПРФ-так же всюду определённую функцию.

б) оператор примитивной рекурсии к ПРФ, так же получаем ПРФ.

СЛЕДСТВИЕ 7 ПРФ $\subseteq$ ОРФ $\subseteq$ ЧРФ

Док-во:

ПРФ $\subseteq$ ЧРФ – по определению (индукцией по построению)

ПРФ – всюду определена $\Rightarrow$ ПРФ $\subseteq$ ОРФ, ОРФ $\subseteq$ ЧРФ – по определению.

ЗАМЕЧАНИЕ 8 ОРФ $\neq$ ЧРФ

Док-во:

$\omega(x) \rightleftharpoons \mu y\,(S(y)=0)$ – нигде не определена и является ЧРФ, но не ОРФ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9 ПРФ – следующие функции:

стр 127-128
№ 5, 7, 9, 12
36 функц.

1) $f(x)=n$
2) $f(x)=x+n$
3) $f(x,y)=x+y$
4) $f(x,y)=x\cdot y$
5) $f(x,y)=x^y$
6) $sg(x) \rightleftharpoons \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$
7) $\overline{sg}(x) \rightleftharpoons \begin{cases} 0, & x>0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$
8) $x \dot{-} 1$
9) $x \dot{-} y$
10) $|x-y|$
11) $\max(x,y)$
12) $\min(x,y)$
13) $f(x_1,\dots,x_{n+1}) \rightleftharpoons \sum\limits_{i=0}^{x_{n+1}} g(x_1,\dots,x_n,i)$
14) $f(x_1,\dots,x_{n+2}) \rightleftharpoons \begin{cases} 0, & x_{n+1}>x_{n+2} \\ \sum\limits_{i=x_{n+1}}^{x_{n+2}} g(x_1,\dots,x_n,i), & x_{n+1}\leq x_{n+2} \end{cases}$
15) $f(x_1,\dots,x_{n+1}) \rightleftharpoons \prod\limits_{i=0}^{x_{n+1}} g(x_1,\dots,x_n,i)$
16) $f(x_1,\dots,x_{n+2}) \rightleftharpoons \begin{cases} 1, & x_{n+1}>x_{n+2} \\ \prod\limits_{i=x_{n+1}}^{x_{n+2}} g(x_1,\dots,x_n,i), & x_{n+1}\leq x_{n+2} \end{cases}$
17) $\left[\frac{x}{y}\right]$; $\left[\frac{x}{0}\right] \rightleftharpoons x$ – целочисленное деление.
18) $rest(x,y)$ – остаток от деления x на y. $rest(x,0) \rightleftharpoons x$
19) $\tau(x)$, $\tau(0) \rightleftharpoons 0$ – число делителей x.
20) $\sigma(x)$, $\sigma(0) \rightleftharpoons 0$ – сумма делителей числа x.
21) $lh(x)$, $lh(0) \rightleftharpoons 0$ – число простых делителей числа x.
22) $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих x.
23) $K(x,y) \rightleftharpoons НОК(x,y)$, $K(x,0) \rightleftharpoons K(0,x) \rightleftharpoons 0$.
24) $D(x,y) \rightleftharpoons НОД(x,y)$, $D(0,0) \rightleftharpoons 0$.
25) $p(x)$ – x-ое простое число, $p(0)=2$, $p(1)=3$, …
26) $ex(x,y)$ – x-ое простое число в каноническом ряде $y=p_0^{k_0}\cdot\ldots\cdot p_x^{k_x}\cdot\ldots$, $ex(x,y)=k_x$.
27) $[\sqrt{x}]$.

Док-во:

1) $f(x)=\underbrace{S(\ldots S(}_{n\text{-раз}}O(x))\ldots)$ – применение оператора суперпозиции.

2) $f(x)=\underbrace{S(\ldots S(}_{n\text{-раз}}I^1_1(x))\ldots)$ – применение оператора суперпозиции.

3) $\begin{cases} f(x,0)=I^1_1(x) \\ f(x,y+1)=S(I^3_3(x,y,f(x,y))) \end{cases}$ – применение оператора примитивной рекурсии.

4) $\begin{cases} f(x,0)=O(x) \\ f(x,y+1)=I^3_1(x,y,f(x,y))+I^3_3(x,y,f(x,y)) \end{cases}$ – применение оператора примитивной рекурсии.

5) $\begin{cases} f(x,0)=S(O(x)) \\ f(x,y+1)=I^3_3(x,y,f(x,y))\cdot I^3_1(x,y,f(x,y)) \end{cases}$ – применение оператора примитивной рекурсии.

6) $\begin{cases} sg(0)=O(0) \\ sg(x+1)=S(O(x)) \end{cases}$ – примитивная рекурсия.

7) $\begin{cases} \overline{sg}(0)=S(O(0)) \\ \overline{sg}(x+1)=O(x) \end{cases}$ – примитивная рекурсия.

8) $\begin{cases} f(0)=O(0) \\ f(x+1)=f(x) \end{cases}$ – примитивная рекурсия.

9) $\begin{cases} x \dot{-} 0 = x \\ x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1 \end{cases}$ – примитивная рекурсия.

10) $|x-y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$

11) $\max(x,y) = x\cdot sg(x \dot{-} y) + y\cdot \overline{sg}(x \dot{-} y)$

12) $\min(x,y) = x\cdot \overline{sg}(x \dot{-} y) + y\cdot sg(x \dot{-} y)$

13) $\begin{cases} f(x_1,\dots,x_n,0)=I^1_1(g(x_1,\dots,x_n,0)) \\ f(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}+1)=I^2_1(f(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}),g(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}+1))+I^2_2(f(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}),g(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}+1)). \end{cases}$

14) $f(x_1,\dots,x_{n+2}) = \overline{sg}(x_{n+1} \dot{-} x_{n+2})\cdot(I^1_1(g(\bar{x},x_{n+1}))+I^1_1(g(\bar{x},x_{n+2})))$

15) $\begin{cases} f(x_1,\dots,x_n,0)=I^1_1(g(x_1,\dots,x_n,0)) \\ f(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}+1)=I^2_1(g(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}+1),f(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}))\cdot I^2_2(g(\bar{x},x_{n+1}+1),f(\bar{x},x_{n+1})) \end{cases}$

16) $f(x_1,\dots,x_{n+2}) = sg(x_{n+1} \dot{-} x_{n+2}) + \overline{sg}(x_{n+1} \dot{-} x_{n+2})\cdot I^1_1(g(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}))\cdot I^1_1(g(x_1,\dots,x_n,x_{n+2}))$

17) $f(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{x} \overline{sg}((i\cdot y) \dot{-} x)$

18) $rest(x,y) = x \dot{-} \left[\frac{x}{y}\right]\cdot y$

19) $\tau(x) = \sum\limits_{i=1}^{x} \overline{sg}(rest(x,i))$

20) $\sigma(x) = \sum\limits_{i=1}^{x} i\cdot\overline{sg}(rest(x,i))$

21) $lh(x) = \sum\limits_{i=1}^{x} \overline{sg}(|\tau(i)-2|+rest(x,i))$

22) $\pi(x) = \sum\limits_{i=1}^{x} \overline{sg}(|\tau(i)-2|)$

23) $K(x,y) = \mu z((z\cdot\overline{sg}(x\cdot y) + sg(x\cdot y)\cdot(\overline{sg}(z)+rest(z,x)+rest(z,y))=0) \leq (x\cdot y)$

24) $D(x,y) = \left[\frac{x\cdot y}{K(x,y)}\right] + x\cdot\overline{sg}(y) + y\cdot\overline{sg}(x)$

25) $p(x) = \mu y(|\pi(y)-(x+1)|=0) \leq 2^{2^x}$

26) $ex(x,y) = \mu z((\overline{sg}(rest(y,p(x)^{z+1}))\cdot sg\,y=0) \leq x$

27) $[\sqrt{x}] = \mu z(\overline{sg}((z+1)^2 \dot{-} x)=0) \leq x$

опр. 10 $g(x_1,\dots,x_n,y)$, $h(x_1,\dots,x_n)$ – функции.

$f(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} y, & h(\bar{x}) \text{ – определена}, y\leq h(\bar{x}), g(\bar{x},y)=0, \forall z<y: g(\bar{x},z) \text{ – определено и } g(\bar{x},z)\neq 0; \\ h(\bar{x})+1, & h(\bar{x}) \text{ – определена и } \forall z: g(\bar{x},z) \text{ – определено}, g(\bar{x},z)\neq 0; \\ \text{~~не определено иначе.~~} \end{cases}$

Тогда говорят, что функция f получена из g и h при помощи оператора ограниченной минимизации и обозначается $f(\bar{x}) \rightleftharpoons (\mu y \leq h(\bar{x}))[g(\bar{x},y)=0]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11 Пусть g, h – ПРФ, $f(\bar{x})=(\mu y \leq h(\bar{x}))[g(\bar{x},y)=0]$, тогда f – ПРФ, т.е. оператор ограниченной минимизации сохраняет примитивную рекурсивность функции.

Док-во: покажем, что f может быть представлена в виде $f(\bar{x}) = \sum\limits_{i=0}^{h(\bar{x})} sg\left(\prod\limits_{j=0}^{i} g(\bar{x},j)\right)$.

а) если $\exists$ такой первый $y \leq h(\bar{x})$, что $g(\bar{x},y)=0$, то:
$sg\left(\prod\limits_{j=0}^{i} g(\bar{x},j)\right)=1$, при $i<y$; $sg\left(\prod\limits_{j=0}^{i} g(\bar{x},j)\right)=0$, при $i\geq y$, а, значит, $f(\bar{x})=y$.

б) если $\forall z \leq h(\bar{x}): g(\bar{x},z)\neq 0$, то $\forall i \leq h(\bar{x}): sg\left(\prod\limits_{j=0}^{i} g(\bar{x},j)\right)=1$. Следовательно, $f(\bar{x})=h(\bar{x})+1$; других вариантов нет.

опр. 12 оператор возвратной рекурсии:
$g_1(\bar{x},y), g_2(\bar{x},y),\dots,g_n(\bar{x},y), g(\bar{x}), h(\bar{x},y,z_1,\dots,z_n)$, где $\bar{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $\forall i\ \forall\bar{x}\ \forall y: g_i(\bar{x},y)\leq y$;
тогда $\begin{cases} f(\bar{x},0)=g(\bar{x}); \\ f(\bar{x},y+1)=h(\bar{x},y,f(\bar{x},\cancel{y},g_1(\bar{x},y)),\dots,f(\bar{x},\cancel{y},g_n(\bar{x},y))); \end{cases}$

говорят, что функция f получена из функций $g, h, g_1, \ldots, g_k$ применением оператора возвратной рекурсии (полная индукция).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13 $g(\bar{x}), g_1(\bar{x}), \ldots, g_k(\bar{x}), h(\bar{x}, y, \bar{z})$ – ПРФ и f получена из всех g, h при помощи оператора возвратной рекурсии, тогда функция f – ПРФ.

Док-во:

$F(\bar{x}, y) \rightleftharpoons \prod_{i=0}^{y} p(i)^{f(\bar{x}, i)}$, покажем, что F – ПРФ.

$$\begin{cases} F(\bar{x}, 0) = 2^{g(\bar{x})}, \\ F(\bar{x}, y+1) = F(\bar{x}, y) \cdot p(y+1)^{h(\bar{x}, y, ex(g_1(\bar{x}, y), F(\bar{x}, y)), \ldots, ex(g_k(\bar{x}, y), F(\bar{x}, y)))} = H(\bar{x}, y, F(\bar{x}, y)), \end{cases}$$

где $H(\bar{x}, y, z) = z \cdot p(y+1)^{h(\bar{x}, y, ex(g_1(\bar{x}, y), z), \ldots, ex(g_k(\bar{x}, y), z))}$

H – ПРФ $\Rightarrow F$ – ПРФ, $f(\bar{x}, y) = ex(y, F(\bar{x}, y))$ – ПРФ.

ОПР. 14 канторовская нумерующая функция:

$(0,0), (0,1), (0,2), \ldots$
$(1,0), (1,1), (1,2), \ldots$
$(2,0), (2,1), (2,2), \ldots$
$\ldots$

$\underset{0}{(0,0)}, \underset{1}{(0,1)}, \underset{2}{(1,0)}, \underset{3}{(0,2)}, \underset{4}{(1,1)}, \underset{5}{(2,0)}, \ldots$

$c(x, y): \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ – взаимно однозначное.

$c(x, y) = n$, $l(n) = x$, $r(n) = y$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15

а) $c(x, y) = \left[\dfrac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}\right]$; $l(n) = n \dot{-} \left[\dfrac{\left[\frac{[\sqrt{8n+1}]+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{[\sqrt{8n+1}] \dot{-} 1}{2}\right]}{2}\right]$;

$r(n) = \left[\dfrac{[\sqrt{8n+1}]+1}{2}\right] \dot{-} (l(n)+1)$;

б) c, l, r – ПРФ.

Док-во:

а)

б) т.к. все функции – ПРФ $\Rightarrow$ то и они ПРФ.

ОПР. 16

$c_2(x, y) \rightleftharpoons c(x, y)$;
$c_2^1(n) \rightleftharpoons l(n)$;
$c_2^2(n) \rightleftharpoons r(n)$;
$c_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \rightleftharpoons c(c_n(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1})$;
$c_k^{n+1}(m) \rightleftharpoons c_k^n(l(m)), k \leq n$;
$\ldots$
$c_{n+1}^{n+1}(m) \rightleftharpoons r(m)$;

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17

а) c_n, c_k^n – ПРФ – из определение ПРФ

б) $c_k^n(c_n(x_1, \ldots, x_n)) = c_n(c_1^n(m), \ldots, c_n^n(m)) = m$;

в) $c_n: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ – взаимно однозначное.

ЗАМЕЧАНИЕ 18

а) $f(x_1, \ldots, x_n)$ – ПРФ, $h(y) = f(c_1^n(y), \ldots, c_n^n(y))$, тогда h – ПРФ.

б) $h(y)$ – ПРФ, $f(x_1, \ldots, x_n) \rightleftharpoons h(c_n(x_1, \ldots, x_n)) \Rightarrow f$ – ПРФ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19 ПРФ $\subsetneq$ ОРФ $\subsetneq$ ЧРФ

Док-во:

ПРФ $\neq$ ОРФ

функция Аккермана:

$$\begin{cases} f(x, y, 0) = x + y \\ f(x, y, 1) = x \cdot y \\ f(x, y, 2) = x^y \\ f(x, y, 3) = \left.x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}\right\} y\text{-раз} \\ \ldots \end{cases}$$

Секвенциальное исчисление высказываний. Семантика исчисления секвенций. Теорема о полноте секвенциального исчисления высказываний. Исчисление высказываний гильбертовского типа.

опр. 1 $\Gamma \rightleftharpoons \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$, возможно, $\Gamma = \varnothing$, ψ – формула, тогда:

$\Gamma \vdash \psi$ – из Γ следует ψ
$\Gamma \vdash$ – Γ противоречиво
$\vdash \psi$ – ψ доказуема
$\vdash$ – выводимо

} секвенция.

АКСИОМА $\varphi \vdash \varphi$ – схема аксиомы.

ПРАВИЛА ВЫВОДА

1) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi;\ \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}$

2) $\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}{\Gamma \vdash \varphi}$

3) $\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$

4) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}$

5) $\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}$

6) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \xi;\ \Gamma, \psi \vdash \xi;\ \Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}{\Gamma \vdash \xi}$

7) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}$

8) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi;\ \Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$ modus ponens

9) $\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash}{\Gamma \vdash \varphi}$

10) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi;\ \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash}$

11) $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi, \Gamma_1 \vdash \xi}{\Gamma, \psi, \varphi, \Gamma_1 \vdash \xi}$

12) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$

опр. 2 Последовательность секвенций $S_1, \ldots, S_n$ наз. доказательством, если $\forall i \leq n$ S_i либо аксиома, либо получена из предыдущих однократным применением правила вывода. Секвенция S наз. доказуемой, если $\exists$ доказательство, которое заканчивается на эту секвенцию.

ЗАМЕЧАНИЕ 3

а) если $S_1, \ldots, S_n$ – доказательство, $k \leq n$, то $S_1, \ldots, S_k$ – доказательство.

б) если $S_1, \ldots, S_n$ – доказательство, $k \leq n$, то S_k – доказуема.

опр. 4 Дерево секвенций:

1) $D = S$ (одна секвенция является деревом).

2) $D_1, \ldots, D_n$ – деревья, S – секвенция, тогда $\dfrac{D_1; \ldots; D_n}{S}$ – дерево.

3) других деревьев нет.

опр. 5 а) вершина дерева:

1) $D = S$, S – вершина;

2) $D = \dfrac{D_1; \ldots; D_n}{S}$, V – множество вершин, то $V(D) \rightleftharpoons V(D_1) \cup V(D_2) \cup \ldots \cup V(D_n)$.

б) переход:

1) $D = S$ – переходов нет.

2) $D = \frac{D_1; \dots; D_n}{S}$, тогда переходы – это все переходы деревьев $D_1, \dots, D_n$ и последний переход.

в) высота дерева:

1) $D = S \Rightarrow h(D) = 1$.

2) $D = \frac{D_1; \dots; D_n}{S} \Rightarrow h(D) = \max(h(D_1), \dots, h(D_n)) + 1$;

опр. 6 Дерево вывода:

Дерево секвенций наз. деревом вывода, если все его вершины являются аксиомами, а переходы делаются по правилам вывода.

предложение 7 S - доказуема $\Leftrightarrow \exists$ дерево вывода $D = \frac{\sqcap}{S}$, которое заканчивается на эту секвенцию.

Док-во:

($\Rightarrow$): S - доказуема, т.е. $\exists\ S_1, \dots, S_n = S$ – дерево. Доказываем индукцией по n:

$n = 1$: $S_1 = S \Rightarrow S$ - аксиома $\Rightarrow D = S$ – дерево вывода, заканчивающееся на S.

$< n \to n$ (полная индукция): $S = S_n \Rightarrow$ либо $S = S_n$ – аксиома $\Rightarrow D = S$ – дерево вывода, либо $\exists\ k_1, \dots, k_l < n$ такие, что $\frac{S_{k_1}; \dots; S_{k_l}}{S}$ – правило вывода, тогда

$\left.\begin{matrix} S_1; \dots; S_{k_1} \\ S_1; \dots; S_{k_l} \end{matrix}\right\}$ доказательство $\Rightarrow \exists$ деревья вывода $D_1, \dots, D_l$, что $D_i = \frac{\sqcap}{S_{k_i}} \Rightarrow$

$\Rightarrow D = \frac{D_1; \dots; D_l}{S_{k_l}}$? – дерево вывода $\Rightarrow D = \frac{\sqcap}{S}$ – дерево вывода.

($\Leftarrow$): Пусть $D = \frac{\sqcap}{S}$ – дерево вывода, тогда доказательство ведётся индукцией по высоте дерева:

$h = 1$: $h(D) = 1$, $D = S \Rightarrow S$ – аксиома $\Rightarrow S_1 = S$ – доказательство $\Rightarrow S$ – доказуема.

$< h \to h$: $D = \frac{D_1; \dots; D_l}{S}$, $D_i = \frac{\sqcap}{S_i}$, $\frac{S_1, \dots, S_l}{S}$ – правило вывода, D_i – дерево вывода,

$h(D_i) < h(D) \Rightarrow \left.\begin{matrix} \exists\ S_1^1, \dots, S_{k_1}^1 = S_1 \\ \vdots \\ \exists\ S_1^l, \dots, S_{k_l}^l = S_l \end{matrix}\right\}$ доказательства $\Rightarrow S_1^1, \dots, S_{k_1}^1, \dots, S_1^l, \dots, S_{k_l}^l, S$ – доказательство.

$\frac{S_1, \dots, S_k}{S}$

опр. 8 Дерево секвенций высоты два наз. произвольным правилом вывода, если $\exists$ дерево секвенций D, которое заканчивается на S, все переходы являются правилами вывода, а в вершинах стоят либо аксиомы, либо секвенции $S_1, \dots, S_k$.

Дерево секвенций высоты два наз. допустимым правилом вывода, если при добавлении его в качестве правила вывода количество доказуемых секвенций не увеличивается.

замечание 9 Произвольное правило вывода является допустимым правилом вывода.

Док-во:

пусть $\frac{S_1; \dots; S_n}{S}$ – правило вывода, $D = \frac{\sqcap}{S}$

предложение 10 следующие правила вывода являются допустимыми:

а) $\left.\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi}{\xi_1, \dots, \xi_k \vdash \varphi}\right\}$ $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$

б) $\left.\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash}{\xi_1, \dots, \xi_k \vdash}\right\}$ $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$

в) $\frac{\Gamma \vdash \varphi;\ \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}$ – правило сечения

г) $\frac{\Gamma_1, \varphi, \psi, \Gamma_2 \vdash \xi}{\Gamma_1, (\varphi \& \psi), \Gamma_2 \vdash \xi}$ – объединение посылок

д) $\frac{\Gamma, (A \& B) \vdash C}{\Gamma, A, B, \vdash C}$ – расщепление посылок

е) $\frac{\Gamma \vdash (\varphi \& \neg\varphi)}{\Gamma \vdash}$

ж) $\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \varphi}$

з) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash}{\Gamma \vdash \neg\varphi}$

и) $\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash}$

к) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \neg\psi \vdash \neg\varphi}$ (контрапозиция) л) $\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$ (док-во от противного)

Док-во:

м) $\frac{\Gamma, A \vdash C;\ \Gamma, B \vdash C}{\Gamma (A \vee B) \vdash C}$ разбор случаев

$\varphi_1, \dots \varphi_n \vdash \psi$ -ис если $\exists i\ \varphi_i$ - л. или ψ -ис.

$\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash \psi$ -лож. если $\forall i\ \varphi_i$ -ис. и ψ - лож.

$\vdash \varphi$ - ис если φ - ис.

$\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash$ ис. если $\exists i\ \varphi_i$ - л.

опр. 11 ~~$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ наз. истинная при данном значении пропозициональных переменных, если хотя бы одна формула $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ложная.~~ или ψ – ис.

? ~~$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ наз. ложной, если хотя бы одна из формул при данных значениях пропозициональных переменных ложная.~~ и ψ – ис.

~~$\vdash \psi$ наз. истинной, если формула ψ истинна.~~

~~Секвенция наз. Т.И., если она истинна при любых значениях пропозициональных переменных.~~

теорема 12 о корректности исчисления секвенций:

Если секвенция доказуема, то она – Т.И.

Док-во:

$S_1, \dots, S_n = S$, доказательство ведётся индукцией по n:

$n = 1$: $S = S_1 \Rightarrow S$ - аксиома – Т.И.

$< n \to n$: S – аксиома $\Rightarrow S$ – Т.И.

$\exists\ k_1, \dots, k_l < n$ такие, что $\frac{S_{k_1}; \dots; S_{k_l}}{S}$ – правило вывода.

$S_1, \dots, S_{k_i}$ – доказательство $\Rightarrow$ по индукции S_{k_i} – Т.И.

$\frac{S_1'; \dots S_m'}{S'}$ – правило вывода. Если при данных значениях пропозициональных переменных

$S_1', \dots, S_m'$ – истинна, то S' – истинна. Достаточно проверить это утверждение на всех правилах вывода. $\mapsto S$ – т.и.

опр. 13 отображение $\rho: F \to F$ наз. подстановкой, если она перестановочна с логическими связками, где F – множество формул.

$\rho(\varphi \& \psi) = \rho(\varphi) \& \rho(\psi)$

$\rho(\varphi \vee \psi) = \rho(\varphi) \vee \rho(\psi)$

$\rho(\varphi \to \psi) = \rho(\varphi) \to \rho(\psi)$

$\rho(\neg\varphi) = \neg\rho(\varphi)$

теорема 14 о подстановках:

Подстановка сохраняет доказуемость секвенции.

Док-во:

Секвенция S – доказуема, ρ – подстановка $\Rightarrow \rho(S)$ – доказуема.

$S = (\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi)$

$\rho(S) = \rho(\varphi_1), \dots, \rho(\varphi_n) \vdash \rho(\psi)$

ρ – подстановка, S – доказуема $\Rightarrow \exists$ дерево вывода $D = \frac{\Pi}{S}$, $\rho(D) = \frac{\Pi}{\rho(S)}$, где каждая секвенция S' заменена на $\rho(S')$, тогда $\rho(D)$ – дерево вывода $\mapsto \rho(S)$ – доказуема

опр. 15 φ – доказуема, если $\vdash \varphi$ – доказуема.

следствие 16 φ – доказуема $\Rightarrow \rho(\varphi)$ – доказуема.

опр. 17 Формулы φ и ψ наз. равносильными, если $\varphi \vdash \psi$ и $\psi \vdash \varphi$ – доказуемы, обозн. $\varphi \equiv \psi$.

предложение 18 $\equiv$ – отношение эквивалентности.

Док-во:

а) $\varphi \vdash \varphi$ – аксиома $\Rightarrow \varphi \equiv \varphi$ – рефлексивность.

б) $\varphi \equiv \psi \Rightarrow \varphi \vdash \psi, \psi \vdash \varphi$ – доказуемы $\Rightarrow \psi \equiv \varphi$ – симметричность.

в) $\varphi \equiv \psi, \psi \equiv \xi \Rightarrow \varphi \vdash \psi, \psi \vdash \xi, \xi \vdash \psi, \psi \vdash \varphi$ – доказуемы

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\varphi \vdash \psi;\ \psi \vdash \xi}{\varphi \vdash \xi} \\ \dfrac{\xi \vdash \psi;\ \psi \vdash \varphi}{\xi \vdash \varphi} \end{array}\right\}$$ по правилу сечения $\Rightarrow \varphi \vdash \xi, \xi \vdash \varphi$ – доказуемы $\Rightarrow \varphi \equiv \xi$. – транзитивность.

Пред. 20

предложение 19 Равносильность является конгруэнцией на модели $\langle F; \vee, \&, \to, \neg \rangle$, т.е. если $\varphi \equiv \varphi_1$, $\psi \equiv \psi_1$, то:

1) $(\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi_1 \vee \psi_1)$

2) $(\varphi \& \psi) \equiv (\varphi_1 \& \psi_1)$

3) $(\varphi \to \psi) \equiv (\varphi_1 \to \psi_1)$

4) $\neg\varphi \equiv \neg\varphi_1$

$\langle F/\equiv; \vee, \&, \to, \neg \rangle$

Док-во:

1)
$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi_1}{\varphi \vdash (\varphi_1 \vee \psi_1)} \qquad \dfrac{\psi \vdash \psi_1}{\psi \vdash (\varphi_1 \vee \psi_1)}}{(\varphi \vee \psi) \vdash (\varphi_1 \vee \psi_1)}$$ (разбор случаев)
$$\dfrac{\dfrac{\varphi_1 \vdash \varphi}{\varphi_1 \vdash (\varphi \vee \psi)} \qquad \dfrac{\psi_1 \vdash \psi}{\psi_1 \vdash (\varphi \vee \psi)}}{(\varphi_1 \vee \psi_1) \vdash (\varphi \vee \psi)}$$

2)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi_1}{\varphi, \psi \vdash \varphi_1} \qquad \dfrac{\psi \vdash \psi_1}{\varphi, \psi \vdash \psi_1}}{\varphi, \psi \vdash \varphi_1 \& \psi_1}\ (1)}{\varphi \& \psi \vdash \varphi_1 \& \psi_1}$$ (объед. посылок)

3)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi;\ \varphi \to \psi \vdash \varphi \to \psi}{\varphi; \varphi \to \psi \vdash \psi}\ ;\ \psi \vdash \psi_1}{\varphi; \varphi \to \psi \vdash \psi_1}\ \text{(сечение)} \qquad \varphi_1 \vdash \varphi}{\dfrac{\varphi_1, \varphi \to \psi \vdash \psi_1}{\varphi \to \psi \vdash \varphi_1 \to \psi_1}}\ \text{(сечение)}$$

4)
$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi_1}{\neg\varphi_1 \vdash \neg\varphi}\ \text{(контр.)} \qquad \dfrac{\varphi_1 \vdash \varphi}{\neg\varphi \vdash \neg\varphi_1}}{\varphi_1 \equiv \varphi_1}$$ (контрпозиц.)

предложение 20 если φ – доказуемо, $\varphi \equiv \psi$, то ψ – доказуемо.

Док-во:

φ – доказуемое $\Rightarrow \vdash \varphi$ – доказуемо, $\varphi \equiv \psi \Rightarrow \varphi \vdash \psi \Rightarrow \dfrac{\vdash \varphi;\ \varphi \vdash \psi}{\vdash \psi} \Rightarrow \vdash \psi$ – доказуемо $\Rightarrow \psi$ – доказуемо.

теорема 21 о замене:

$\varphi \equiv \varphi'$, ψ' из ψ получена заменой одного вхождения φ на φ', тогда $\psi \equiv \psi'$.

Док-во: $n = ln(\psi)$ – длина слова; доказательство ведётся индукцией по длине.

φ – подформула $\psi \Rightarrow ln(\psi) \geqslant ln(\varphi)$. $n = ln(\varphi) = ln(\psi) \Rightarrow \psi = \varphi \Rightarrow \psi' = \varphi' \Rightarrow \psi = \varphi \equiv \varphi' = \psi' \Rightarrow \psi \equiv \psi'$.

делаем полной индукцией:

$< n \to n$: $\psi = (\psi_1 \vee \psi_2)$, $\psi = (\psi_1 \& \psi_2)$, $\psi = (\psi_1 \to \psi_2)$, $\psi = \neg\psi_1$;

$\psi' = (\psi_1' \vee \psi_2')$, $\psi' = (\psi_1' \& \psi_2')$, $\psi' = (\psi_1' \to \psi_2')$, $\psi' = \neg\psi_1'$

по индукции $\psi_i' \equiv \psi_i \Rightarrow \psi \equiv \psi'$.

следствие 22 Пусть $\varphi \equiv \varphi'$, ψ' получена из ψ заменой некоторого количества вхождений φ на φ', тогда $\psi' \equiv \psi$.

Док-во: индукцией по числу вхождений.

предложение 23

1) $\neg(\varphi \& \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

2) $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \& \neg\psi)$

3) $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

4) $(\varphi \& \psi) \equiv (\psi \& \varphi)$

5) $(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$

6) $((\varphi \& \psi) \& \xi) \equiv (\varphi \& (\psi \& \xi))$

7) $((\varphi \vee \psi) \vee \xi) \equiv (\varphi \vee (\psi \vee \xi))$

8) $(\varphi \& (\psi \vee \xi)) \equiv ((\varphi \& \psi) \vee (\varphi \& \xi))$

9) $(\varphi \vee (\psi \& \xi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \& (\varphi \vee \xi))$

10) $(\varphi \to \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$

11) $(\varphi \vee (\psi \& \neg\psi) \vee \xi) \equiv (\varphi \vee \xi)$

12) $(\varphi \& (\psi \vee \neg\psi) \& \xi) \equiv (\varphi \& \xi)$

Док-во:

4)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi \vdash \psi}{\varphi, \psi \vdash \psi} \qquad \dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\varphi, \psi \vdash \varphi}}{\varphi, \psi \vdash (\psi \& \varphi)}\ (1)}{\psi, \varphi \vdash (\psi \& \varphi)}\ (11)}{(\psi \& \varphi) \vdash (\varphi \& \psi)}$$ (ч.т.д. (2))

OFFICE COLLECTION

Пон 16^{00} 310

Суб 17^{45} 223

ТЕОРЕМА 24 $\forall \varphi\ \exists$ КНФ $\psi \equiv \varphi$

Док-во: алгоритм построения КНФ равносильной данной формуле.

1) с помощью тождества (10) избавляемся от импликации.
2) с помощью тождеств (1,2,3) вносим отрицание к пропозициональным переменным, получаем формулу с тесными отрицаниями.
3) с помощью тождества (9) выносим конъюнкцию наружу.

Получаем КНФ равносильную данной формуле.

ТЕОРЕМА 25 КНФ φ – т.и. $\Leftrightarrow$ в любую её элементарную дизъюнкцию хотя бы одна пропозициональная переменная входит как с отрицанием, так и без него.

Док-во:

($\Rightarrow$) φ – т.и., $\varphi = \varphi_1 \& \dots \& \varphi_n$, φ_i – элементарная дизъюнкция. Пусть $\exists i \le n$ в φ_i $A_1, \dots, A_n$, тогда $A_j \leftarrow \begin{cases} И, & \neg A_j \\ Л, & A_j \end{cases}$ – в результате этого означивания видно, что φ_i – ложна $\Rightarrow \varphi = Л$ – противоречие.

($\Leftarrow$) $\varphi = \varphi_1 \& \dots \& \varphi_n$, $\varphi_i = \varphi_i' \vee \underbrace{A_{ki} \vee \neg A_{ki}}_{т.и.} \vee \varphi_k'' \Rightarrow \varphi_i$ – т.и. $\forall i \Rightarrow \varphi$ – т.и.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 26 $\vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$ – доказуема.

Док-во:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\vdash (\varphi \to \varphi)} \qquad \varphi \to \varphi \vdash (\neg\varphi \vee \varphi)}{\vdash (\neg\varphi \vee \varphi)} \text{ (правило сечения)}$$

ТЕОРЕМА 27 КНФ φ – доказуема $\Leftrightarrow$ для любой её элементарной дизъюнкции $\exists$ пропозициональная переменная, которая входит в эту элементарную дизъюнкцию как с отрицанием, так и без него.

Док-во:

($\Rightarrow$) φ – КНФ, φ – доказуема $\Rightarrow$ $\vdash\varphi$ – доказуема, φ – т.и. $\Rightarrow$ $\vdash\varphi$ – т.и. $\Rightarrow$ из предыдущей теоремы.

($\Leftarrow$) φ – КНФ, $\varphi = \varphi_1 \& \dots \& \varphi_n$, $\varphi_i = \varphi_i' \vee A_{ki} \vee \neg A_{ki} \vee \varphi_i''$

$$\dfrac{\vdash (A_{ki} \vee \neg A_{ki})}{\vdash (\varphi_i' \vee A_{ki} \vee \neg A_{ki} \vee \varphi_i'')} \quad \forall i \vdash \varphi_i$$

$$\begin{array}{l} \vdash \varphi_1;\ \vdash \varphi_2 \\ \hline \vdash (\varphi_1 \& \varphi_2);\ \vdash \varphi_3 \\ \hline \vdash ((\varphi_1 \& \varphi_2) \& \varphi_3);\ \vdash \varphi_4 \\ \hline \vdots \\ \hline \vdash \varphi \end{array}$$

$\vdash\varphi$ – доказуемо $\Rightarrow \varphi$ – доказуемо

СЛЕДСТВИЕ 28 КНФ φ – доказуема $\Leftrightarrow \varphi$ – т.и.

ТЕОРЕМА 29 о полноте секвенциального исчисления высказываний:

Если φ – т.и., то φ – доказуемо.

Док-во:

φ – т.и. $\exists$ КНФ $\psi \equiv \varphi \Rightarrow \varphi \vdash \psi$ – доказуема $\Rightarrow \varphi \vdash \psi$ – т.и. $\Rightarrow \psi$ – т.и. $\Rightarrow \psi$ – доказуема $\Rightarrow$
$\Rightarrow \vdash\psi$ – доказуема $\quad \dfrac{\vdash \psi;\ \psi \vdash \varphi}{\vdash \varphi}$

$\vdash\varphi$ – док $\Rightarrow \varphi$ – док

ТЕОРЕМА 30

а) φ – т.и. $\Leftrightarrow \varphi$ – доказуема.

б) S – т.и. $\Leftrightarrow S$ – доказуема.

Док-во:

а) ($\Rightarrow$) – ТЕОРЕМА 29; ($\Leftarrow$) – ТЕОРЕМА 12.

б) ($\Leftarrow$) – ТЕОРЕМА 12;

($\Rightarrow$) 1) S – т.и., $S = (\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi)$ – т.и. $\xRightarrow{\text{многократное применение правила вывода № 7.}} \vdash(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \dots (\varphi_n \to \psi)\dots))$ – т.и. $\Rightarrow$
$\Rightarrow (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \dots (\varphi_n \to \psi)\dots))$ – т.и. $\Rightarrow$ доказуема $\Rightarrow \vdash(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \dots (\varphi_n \to \psi)\dots))$ – доказуема

$$\begin{array}{l} \varphi_1 \vdash \varphi_1;\ \vdash(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \dots (\varphi_n \to \psi)\dots)) \\ \hline \varphi_1 \vdash (\varphi_2 \to \dots (\varphi_n \to \psi)\dots);\ \varphi_2 \vdash \varphi_2 \\ \hline \varphi_1, \varphi_2 \vdash (\varphi_3 \to \dots (\varphi_n \to \psi)\dots);\ \varphi_3 \vdash \varphi_3 \\ \hline \vdots \\ \hline \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi. \end{array} \quad \text{правило сечения}$$

2) $S = (\vdash \varphi)$ – т.и. $\Rightarrow \varphi$ – т.и. $\Rightarrow \varphi$ – доказуема $\Rightarrow \vdash\varphi$ – доказуема.

3) $\dfrac{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash A;\ \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \neg A}{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash}$
доказуема.

СЛЕДСТВИЕ 31 $\forall \varphi, \psi,\ \varphi \sim \psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi$

Док-во:

$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \varphi \vdash \psi$ и $\psi \vdash \varphi$ – т.и. $\Leftrightarrow \varphi \vdash \psi$ и $\psi \vdash \varphi$ – доказуемы $\Leftrightarrow \varphi \equiv \psi$

Опр. 32 исчисление высказываний гильбертовского типа:

Аксиомы:

1) $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$
2) $((\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \xi)) \to (\varphi \to \xi)))$
3) $((\varphi \& \psi) \to \varphi)$
4) $((\varphi \& \psi) \to \psi)$
5) $((\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \xi) \to (\varphi \to (\psi \& \xi))))$
6) $(\varphi \to (\varphi \vee \psi))$
7) $(\psi \to (\varphi \vee \psi))$
8) $((\varphi \to \xi) \to ((\psi \to \xi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \xi)))$
9) ! $((\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi))$
10) $\neg\neg\varphi \to \varphi$.

Правило вывода:

$\dfrac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$ modus ponens

Опр. 33 Последовательность $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ наз. доказательством исчисления высказываний, если каждая φ_i либо аксиома, либо получена из предыдущих однократным применением правила вывода.

$\varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi$ – доказательство, тогда говорят, что φ – доказуема и обозначается $\triangleright\varphi$.

Пусть H – множество формул, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ наз. доказательство из множества формул H, если $\forall i \le n$ φ_i либо аксиома, либо $\varphi_i \in H$, либо φ_i получена из предыдущих однократным применением правила вывода.

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$ из H, то говорят, что $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ – это доказательство формулы из H, при этом говорят, что φ доказуема в H и пишут $H \rhd \varphi$. H играет роль аксиом. H наз. внелогическими аксиомами.

Теорема 34 о дедукции:

$H \cup \{\varphi\} \rhd \psi$, то $H \rhd (\varphi \to \psi)$

Теорема 35 об эквивалентности ИС и ИВ: $(\vdash \varphi \Leftrightarrow \rhd \varphi)$

а) если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ – доказуема в ИС $\Leftrightarrow \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \rhd \varphi$ в ИВ.

б) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash$ доказуема в ИС $\Leftrightarrow \forall \psi \; \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \rhd \psi$ в ИВ.

Гомоморфизмы. Эпиморфизмы. Изоморфизмы. Конгруэнции алгебраических систем

Опр. 1 σ – сигнатура, $K(\sigma)$ – класс алгебраических систем сигнатуры σ.

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma^{\mathfrak{A}} \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma^{\mathfrak{B}} \rangle$, $A \subseteq |\mathfrak{A}|$, $B \subseteq |\mathfrak{B}|$.

1) $h: A \to B$ наз. гомоморфизмом $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, если:

$h: A \to B$ – отображение, $\forall p^n, f^n, c \in \sigma$, $\forall a_1, \ldots, a_n \in A$ выполнено:

а) $\mathfrak{A} \models P(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{B} \models P(h(a_1), \ldots, h(a_n))$;

б) $f(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = h(f(a_1, \ldots, a_n))$;

в) $c^{\mathfrak{B}} = h(c^{\mathfrak{A}})$.

2) $h: A \to B$ наз. эпиморфизмом $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, если:

h – гомоморфизм и h – "на", т.е. $h(A) = B$.

3) $h: A \to B$ наз. строгим гомоморфизмом, если:

$h: A \to B$ – отображение и h сохраняет как истинность, так и ложность:

а) $(\mathfrak{A} \not\models P(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{B} \not\models P(h(a_1), \ldots, h(a_n)))$ & $(\mathfrak{A} \models P(b_1, \ldots, b_n) \Rightarrow \mathfrak{B} \models P(h(b_1), \ldots, h(b_n)))$;

б) $f(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = h(f(a_1, \ldots, a_n))$;

в) $c^{\mathfrak{B}} = h(c^{\mathfrak{A}})$.

4) $h: A \to B$ наз. сильным гомоморфизмом, если:

$h: A \to B$ – отображение и $\forall p^n, f^n, c \in \sigma$, $\forall a_1, \ldots, a_n \in A$:

а) $\mathfrak{A} \models P(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{B} \models P(h(a_1), \ldots, h(a_n))$

$\mathfrak{B} \models P(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \Rightarrow \exists c_1, \ldots, c_n \in A: \mathfrak{A} \models P(c_1, \ldots, c_n)$, $h(a_1) = h(c_1), \ldots, h(a_n) = h(c_n)$;

б) $f(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = h(f(a_1, \ldots, a_n))$;

в) $c^{\mathfrak{B}} = h(c^{\mathfrak{A}})$.

5) $h: A \to B$ наз. изоморфизмом, если:

$h: A \to B$ – взаимно однозначно, $\forall p^n, f^n, c \in \sigma$, $\forall a_1, \ldots, a_n \in A$:

а) $\mathfrak{A} \models P(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P(h(a_1), \ldots, h(a_n))$;

б) $f(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = h(f(a_1, \ldots, a_n))$;

в) $c^{\mathfrak{B}} = h(c^{\mathfrak{A}})$;

6) $h: A \to B$ наз. изоморфным вложением, если h – разнозначно.

Замечание 2 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $A = |\mathfrak{A}|$, $B = |\mathfrak{B}|$, $h: A \to B$ – отображение.

а) h – эпиморфизм $\Leftrightarrow$ h – гомоморфизм и $h(A) = B$.

б) h – строгий гомоморфизм $\Leftrightarrow$ h – гомоморфизм и $\forall p^n \in \sigma$, $\forall a_1, \ldots, a_n \in A$

$\mathfrak{A} \models \neg P(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \neg P(h(a_1), \ldots, h(a_n))$.

в) h – изоморфное вложение $\Leftrightarrow$ h – строгий гомоморфизм и h – разнозначно.

г) h – изоморфизм $\Leftrightarrow$ h – эпиморфизм и изоморфное вложение.

Опр. 3 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$

$\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$: модель $\mathfrak{A}$ наз. подмоделью модели $\mathfrak{B}$, если:

а) $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$;

б) $\forall p^n, f^n, c \in \sigma$, $\forall a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$:

$\mathfrak{A} \models P(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P(a_1, \ldots, a_n)$

$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n)$

$c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$

Замечание 4 пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$. $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B} \Leftrightarrow id_A: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ – изоморфное вложение.

Опр. 5 пусть $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $A \subseteq B$. Говорят, что множество A замкнуто относительно операций в модели $\mathfrak{B}$, если: $\forall f^n, c \in \sigma$, $\forall a_1, \ldots, a_n \in A$, $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n), c^{\mathfrak{B}} \in A$.

Предложение 6 $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $A \subseteq B$. Множество A определяет подмодель модели $\mathfrak{B} \Leftrightarrow A$ замкнуто относительно операций в $\mathfrak{B}$.

Док-во:

$(\Rightarrow)$ Пусть $\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, $A = |\mathfrak{A}|$, $\forall f^n, c \in \sigma$, $\forall a_1, \ldots, a_n \in A$:

$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), c^{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A} \Rightarrow f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n)$, $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{A} \Rightarrow f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n), c^{\mathfrak{B}} \in A$.

$(\Leftarrow)$ A замкнуто в $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \leq \langle A; \sigma \rangle$, $\forall p^n, f^n, c \in \sigma$, $\forall a_1, \ldots, a_n \in A$

$\mathfrak{A} \models P(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P(a_1, \ldots, a_n)$, $f^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \leq f^{\mathfrak{B}}(\bar{a}) \in \mathfrak{A}$, $c^{\mathfrak{A}} \leq c^{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$.

Предложение 7 σ содержит только предикатные символы, $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$. $\forall A \subseteq B$ A замкнуто в $\mathfrak{B} \Rightarrow A$ определяет подмодель $\mathfrak{B}$.

Док-во:

Условие замкнутости удовлетворяется тривиально.

Предложение 8 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ – гомоморфизм, тогда $C \leftrightharpoons h(A) \leftrightharpoons \{h(a) \mid a \in |\mathfrak{A}|\}$ замкнуто относительно операций в модели $\mathfrak{B}$, т.е. определяет подсистему $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}$.

Док-во:

$f^n, c \in \sigma$, $\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}} \Rightarrow c^{\mathfrak{B}} \in h(A) = C$, $f(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = h(f(a_1, \ldots, a_n)) \in h(A) = C$.

Предложение 9 имеется $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $H \subseteq K(\sigma)$, $\forall \mathfrak{A} \in H$ $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, $C \leftrightharpoons \bigcap\limits_{\mathfrak{A} \in H} |\mathfrak{A}|$ замкнуто относительно операций в $\mathfrak{B}$, т.е. определяет $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}$, $|\mathfrak{C}| = C$.

Док-во:

пусть $f^n, c \in \sigma$, $a_1, \ldots, a_n \in C$, $\forall \mathfrak{A} \in H$, т.к. $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ $c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{A}} \in |\mathfrak{A}|$, $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}| \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{\mathfrak{B}}(\bar{a}) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \in |\mathfrak{A}| \Rightarrow c^{\mathfrak{B}}, f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n) \in C$.

Теорема 10 Пусть $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $X \subseteq |\mathfrak{B}|$, тогда $\exists$ наименьшее по включению $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}$: $X \subseteq |\mathfrak{C}|$ и $|\mathfrak{C}|$ – наименьшее по включению среди таких моделей.

Док-во:

$H \leftrightharpoons \{\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B} \mid X \subseteq |\mathfrak{A}|\} \Rightarrow C \leftrightharpoons \bigcap\limits_{\mathfrak{A} \in H} |\mathfrak{A}|$ замкнуто в $\mathfrak{B} \Rightarrow \exists \mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}: |\mathfrak{C}| = C \Rightarrow X \subseteq C$ и

$\forall \mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ так, что $X \subseteq |\mathfrak{A}|$ выполнено $\mathfrak{A} \in H \Rightarrow C \subseteq |\mathfrak{A}|$.

Предложение 11 отношение $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ – частичный порядок на $K(\sigma)$.

Док-во:

а) $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{A}$ – рефлексивность.

б) $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A} \Rightarrow |\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$, $|\mathfrak{B}| \subseteq |\mathfrak{A}| \Rightarrow |\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}| \Rightarrow \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ – антисимметричность.

в) $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{C} \Rightarrow A \subseteq B$, $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$. $P^n, f^n, c \in \sigma$, $a_1, \ldots, a_n \in A$.

$\mathfrak{A} \models P(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{C} \models P(a_1, \ldots, a_n)$.

$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathfrak{C}}(a_1, \ldots, a_n)$.

$c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{C}}$ – транзитивность.

Следствие 12 $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $X \subseteq B$ $\exists$ наименьшее $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}$ среди $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ такое, что $X \subseteq |\mathfrak{A}|$

? **Предложение 13** Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in K(\sigma)$, $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}$, $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{C}|$, тогда $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{C}$.

Док-во:

$P^n, f^n, c \in \sigma$, $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}| \Rightarrow a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{C}| \Rightarrow$

$\mathfrak{A} \models P(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P(a_1, \ldots, a_n) \underset{\mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{C} \models P(a_1, \ldots, a_n)$

$f^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = f^{\mathfrak{B}}(\bar{a}) \overset{\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}}{=} f^{\mathfrak{C}}(\bar{a})$.

$c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{C}}$

$\mathfrak{C} \leq sub_{\mathfrak{B}}(X)$

Теорема 14 $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $X \subseteq |\mathfrak{B}|$, $X \neq \varnothing$, либо σ содержит хотя бы одну константу, $\mathfrak{C} \leq sub_{\mathfrak{B}}(X)$

$|\mathfrak{C}| = \{t(a_1, \ldots, a_n) \mid t$ – терм сигнатуры σ, $a_1, \ldots, a_n \in X\} \leftrightharpoons A$.

Док-во:

1) $|\mathfrak{C}| \subseteq D$ покажем, что D замкнуто в $\mathfrak{B}$:

$f^n, c \in \sigma$, $t_1(\bar{a}^1), \ldots, t_n(\bar{a}^n) \in D$, $\bar{b}$ – кортеж, составленный из всех $\bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^n$,

Предл. 11: $\leq$ частич. порядок на $K(\sigma)$

OFFICE COLLECTION

$t_1(\bar{b}),\dots,t_n(\bar{b}) \Rightarrow f(t_1(\bar{b}),\dots,t_n(\bar{b}))$ – терм, $\bar{b}\in X^* \Rightarrow f(t_1(\bar{b}),\dots,t_n(\bar{b}))\in D$, D – замкнуто в $\mathfrak{B} \Rightarrow \exists\, \mathfrak{M}\leq\mathfrak{B} \Rightarrow |\mathfrak{L}|\subseteq|\mathfrak{M}|=D$

2) $D\subseteq|\mathfrak{L}|$. Пусть t – терм, $a_1,\dots,a_n\in X \Rightarrow a_1,\dots,a_n\in|\mathfrak{L}|$.

а) $t=x,\ t=c \quad a\in|\mathfrak{L}|,\ c\in|\mathfrak{L}|$.

б) $t_1(\bar{a}),\dots,t_n(\bar{a})\in|\mathfrak{L}|,\ f^n\in\sigma \quad t(\bar{a})\leftrightharpoons f(t_1(\bar{a}),\dots,t_n(\bar{a}))\in|\mathfrak{L}|$.

СЛЕДСТВИЕ 15 Если σ содержит константы, $X=\varnothing$, то $\mathfrak{L}=sub_{\mathfrak{B}}(\varnothing)$, то $|\mathfrak{L}|=C=\{t^{\mathfrak{B}}\mid t$ – замкнутый терм$\}$. Если σ содержит константы, то модель данной сигнатуры имеет наименьшую подмодель.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16

а) $X\subseteq Y\subseteq|\mathfrak{B}|$, то $sub_{\mathfrak{B}}(X)\leq sub_{\mathfrak{B}}(Y)$

б) $\mathfrak{A}\leq\mathfrak{B}$, то $sub_{\mathfrak{B}}(|\mathfrak{A}|)=|\mathfrak{A}|$

Док-во:

а) $|sub_{\mathfrak{B}}(X)|=\{t(\bar{a})\mid t$ – терм, $\bar{a}\in X^*\}$, $|sub_{\mathfrak{B}}(Y)|=\{t(\bar{a})\mid\bar{a}\in Y^*\}$

$X\subseteq Y\Rightarrow X^*\subseteq Y^*\Rightarrow|sub_{\mathfrak{B}}(X)|\subseteq|sub_{\mathfrak{B}}(Y)|$, $sub_{\mathfrak{B}}(X)\leq\mathfrak{B}$, $sub_{\mathfrak{B}}(Y)\leq\mathfrak{B}\Rightarrow sub_{\mathfrak{B}}(X)\leq sub_{\mathfrak{B}}(Y)$.

! б) $\mathfrak{L}\leq\mathfrak{B}$, $|\mathfrak{A}|\in\mathfrak{L}$. $sub_{\mathfrak{L}}(|\mathfrak{A}|)\geq|\mathfrak{A}|$, т.к. $\mathfrak{A}\leq\mathfrak{B}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 17 σ – чисто предикатная сигнатура, $\mathfrak{B}\in K(\sigma)$, $X\subseteq|\mathfrak{B}|\Rightarrow X=|sub_{\mathfrak{B}}(X)|$.

ТЕОРЕМА 18 $\mathfrak{B}\in K(\sigma)$, $S: \mathcal{P}(|\mathfrak{B}|)\to\mathcal{P}(\mathfrak{B})$, $S(X)\leftrightharpoons|sub_{\mathfrak{B}}(X)|$, тогда S – оператор замыкания, т.е.:

V а) $S(|S(X)|)=S(X)$;

б) $X\subseteq Y\to S(X)\subseteq S(Y)$;

в) $S(X)\cup S(Y)\subseteq S(X\cup Y)$.

Док-во:

а) $X\subseteq|\mathfrak{B}|$, $\mathfrak{L}\leftrightharpoons sub_{\mathfrak{B}}(X)$, тогда $|\mathfrak{L}|=S(X)$, $|\mathfrak{L}|=sub_{\mathfrak{B}}(|\mathfrak{L}|)=S(S(X))\Rightarrow S(S(X))=S(X)$.

б) уже доказано выше.

в) $X,Y\subseteq|\mathfrak{B}|$, $\mathfrak{L}\leftrightharpoons sub_{\mathfrak{B}}(X)$, $\mathfrak{A}\leftrightharpoons sub_{\mathfrak{B}}(Y)$, $|\mathfrak{L}|=\{t(\bar{a})\mid\bar{a}\in X^*\}$, $|\mathfrak{A}|=\{t(\bar{a})\mid\bar{a}\in Y^*\}$

$\mathfrak{M}\leftrightharpoons sub_{\mathfrak{B}}(X\cup Y)$, $|\mathfrak{M}|=\{t(\bar{a})\mid\bar{a}\in(X\cup Y)^*\}$.

$$\left.\begin{array}{l}\bar{a}\in X^*\to\bar{a}\in(X\cup Y)^*\\ \bar{a}\in Y^*\to\bar{a}\in(X\cup Y)^*\end{array}\right\}\Rightarrow t(\bar{a})\in S(X)\cup S(Y), \text{ то } t(\bar{a})\in|\mathfrak{M}|=S(X\cup Y).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\in K(\sigma)$, $\mathfrak{A}\leq\mathfrak{B}$, $a_1,\dots,a_n\in|\mathfrak{A}|$, $t(x_1,\dots,x_n)$ – терм σ, тогда $t^{\mathfrak{A}}(\bar{a})=t^{\mathfrak{B}}(\bar{a})$.

Док-во: индукцией по построению терма.

1) $t=x,\ t=c\Rightarrow t^{\mathfrak{A}}(a)=a=t^{\mathfrak{B}}(a)$, $t^{\mathfrak{A}}=c^{\mathfrak{A}}=c^{\mathfrak{B}}=t^{\mathfrak{B}}$.

2) $t=f(t_1(\bar{x}),\dots,t_k(\bar{x}))$, $t_i^{\mathfrak{A}}(\bar{a})=t_i^{\mathfrak{B}}(\bar{a})$, $1\leq i\leq k$.

$t^{\mathfrak{A}}(\bar{a})=f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(\bar{a}),\dots,t_k^{\mathfrak{A}}(\bar{a}))=f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}(\bar{a}),\dots,t_k^{\mathfrak{B}}(\bar{a}))=t^{\mathfrak{B}}(\bar{a})$.

ТЕОРЕМА 20 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\in K(\sigma)$, $\mathfrak{A}\leq\mathfrak{B}$, $a_1,\dots,a_n\in|\mathfrak{A}|$, $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ бескванторная формула, тогда $\mathfrak{A}\models\varphi(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi(\bar{a})$.

Док-во: индукцией по построению формулы.

а) $\varphi(\bar{x})=(t(\bar{x})=q(\bar{x}))$, $\varphi(\bar{x})=p(t_1(\bar{x}),\dots,t_n(\bar{x}))$.

$\mathfrak{A}\models\varphi(\bar{a})\Leftrightarrow t^{\mathfrak{A}}(\bar{a})=t^{\mathfrak{B}}(\bar{a})=q^{\mathfrak{B}}(\bar{a})=q^{\mathfrak{A}}(\bar{a})\Leftrightarrow t^{\mathfrak{B}}(\bar{a})=q^{\mathfrak{B}}(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi(\bar{a})$

$\mathfrak{A}\models\varphi(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models p(t_1^{\mathfrak{A}}(\bar{a}),\dots,t_k^{\mathfrak{A}}(\bar{a}))\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models p(t_1^{\mathfrak{B}}(\bar{a}),\dots,t_k^{\mathfrak{B}}(\bar{a}))\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi(\bar{a})$.

б) $\varphi=\varphi_1\to\varphi_2$, $\varphi=\varphi_1\vee\varphi_2$, $\varphi=\varphi_1\&\varphi_2$, $\varphi=\neg\varphi_1$

$\mathfrak{A}\models\varphi(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\varphi_1(\bar{a})\,\&\,\varphi_2(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\varphi_1(\bar{a})$ и $\mathfrak{A}\models\varphi_2(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi_1(\bar{a})$ и $\mathfrak{B}\models\varphi_2(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi(\bar{a})$.

$\mathfrak{A}\models\varphi(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\varphi_1(\bar{a})\to\varphi_2(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\varphi_1(\bar{a})$, то $\mathfrak{A}\models\varphi_2(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi_1(\bar{a})$, то $\mathfrak{B}\models\varphi_2(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi(\bar{a})$.

$\mathfrak{A}\models\varphi(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\varphi_1(\bar{a})\vee\mathfrak{A}\models\varphi_2(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\varphi_1(\bar{a})$ или $\mathfrak{A}\models\varphi_2(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi_1(\bar{a})$ или $\mathfrak{B}\models\varphi_2(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi(\bar{a})$,

$\mathfrak{A}\models\varphi(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{A}\not\models\varphi_1(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{B}\not\models\varphi_1(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi(\bar{a})$.

ТЕОРЕМА 21 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\in K(\sigma)$, $\mathfrak{A}\leq\mathfrak{B}$, $\psi(\bar{x},\bar{y})$ – бескванторная формула, $a_1,\dots,a_n\in A$.

а) $\mathfrak{A}\models\exists\bar{x}\,\psi(\bar{x},\bar{a})$, то $\mathfrak{B}\models\exists\bar{x}\,\psi(\bar{x},\bar{a})$;

б) $\mathfrak{B}\models\forall\bar{x}\,\psi(\bar{x},\bar{a})$, то $\mathfrak{A}\models\forall\bar{x}\,\psi(\bar{x},\bar{a})$;

Док-во:

а) $\mathfrak{A}\models\exists\bar{x}\,\psi(\bar{x},\bar{a})\Rightarrow\exists\,\bar{c}\in A^*,\ \bar{c}\in B^*: \mathfrak{A}\models\psi(\bar{c},\bar{a})\Rightarrow\mathfrak{B}\models\psi(\bar{c},\bar{a})\Rightarrow\mathfrak{B}\models\exists\bar{x}\,\psi(\bar{x},\bar{a})$.

б) $\mathfrak{B}\models\forall\bar{x}\,\psi(\bar{x},\bar{a})\Rightarrow\forall\,c_1,\dots,c_k\in B$, $\mathfrak{B}\models\psi(\bar{c},\bar{a})\Rightarrow\forall c_1,\dots,c_k\in A$, $\mathfrak{B}\models\psi(\bar{c},\bar{a})\Rightarrow\mathfrak{A}\models\psi(\bar{c},\bar{a})\Rightarrow$
$\Rightarrow\mathfrak{A}\models\forall\bar{x}\,\psi(\bar{x},\bar{a})$.

опр. 22 Пусть $\mathfrak{A}\in K_\sigma$, $\sim$ – эквивалентность на $|\mathfrak{A}|$, тогда $\sim$ наз. конгруэнцией, если $\forall f^n\in\sigma$, $\forall a_1,\dots,a_n\in\mathfrak{A}$, $\forall b_1,\dots,b_n\in\mathfrak{A}$, если $\forall i\leq n\ \ a_i\sim b_i\to f(a_1,\dots,a_n)\sim f(b_1,\dots,b_n)$.

опр. 23 $\mathfrak{A}\in K_\sigma$, $\sim$ – конгруэнция. $\mathfrak{A}/_\sim\leftrightharpoons\langle A/_\sim;\sigma\rangle$, где $A/_\sim\leftrightharpoons\{a/_\sim\mid a\in A\}=\{[a]_\sim\mid a\in A\}$. $\forall p^n, f^n, c\in\sigma$, $\forall a_1,\dots,a_n\in A$ $\mathfrak{A}/_\sim\models P([a_1],\dots,[a_n])$: $\exists\, b_1,\dots,b_n\in A\ /\ \forall i\leq n\ \ a_i\sim b_i$ (либо $\Leftrightarrow b_i\in[a_i]$) $\mathfrak{A}\models P(b_1,\dots,b_n)$; $f^{\mathfrak{A}/_\sim}([a_1],\dots,[a_n])\leftrightharpoons$ $\leftrightharpoons[f^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n)]$; $c^{\mathfrak{A}/_\sim}\leftrightharpoons[c^{\mathfrak{A}}]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 24. определение 23 корректно, т.е. $\mathfrak{A}/_\sim$ – корректно.

Док-во:

$a_1,\dots,a_n,\ b_1,\dots,b_n\in\mathfrak{A}$, $\forall i\leq n\ \ [a_i]=[b_i]\Rightarrow\forall i\leq n\ \ a_i\sim b_i\Rightarrow f(a_1,\dots,a_n)\sim f(b_1,\dots,b_n)\Rightarrow[f(\bar{a})]=[f(\bar{b})]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 25 Конгруэнция – это в точности такая эквивалентность на данной алгебраической системе, по которой можно корректно проводить операцию факторизации.

ТЕОРЕМА 26. $\mathfrak{A}\in K_\sigma$, $\sim$ – конгруэнция, $h:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}/_\sim$, $h(a)\leftrightharpoons[a]\Rightarrow h$ – сильный эпиморфизм.

Док-во:

а) h – гомоморфизм, т.к. $\forall p^n, f^n, c\in\sigma$, $\forall a_1,\dots,a_n\in\mathfrak{A}$:

1) $\mathfrak{A}\models p(a_1,\dots,a_n)\Rightarrow\mathfrak{A}/_\sim\models P([a_1],\dots,[a_n])\Rightarrow\mathfrak{A}/_\sim\models P(h(a_1),\dots,h(a_n))$.

2) $b\in\mathfrak{A}$, $f(a_1,\dots,a_n)=b$. $h(b)=h(f(a_1,\dots,a_n))=[f(a_1,\dots,a_n)]=f([a_1],\dots,[a_n])=f(h(a_1),\dots,h(a_n))$.

3) $h(c^{\mathfrak{A}})=[c^{\mathfrak{A}}]=c^{\mathfrak{A}/_\sim}$.

б) h – "на" $[a]\in\mathfrak{A}/_\sim\Rightarrow h(a)=[a]$.

в) h – сильный гомоморфизм, т.к. $P^n\in\sigma$, $a_1,\dots,a_n\in\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}/_\sim\models P(h(a_1),\dots,h(a_n))\Rightarrow\mathfrak{A}/_\sim\models p([a_1],\dots,[a_n])\Rightarrow$ $\Rightarrow\exists\, b_1,\dots,b_n\in\mathfrak{A}\mid\forall i\leq n\ \ b_i\sim a_i$, $\mathfrak{A}\models p(b_1,\dots,b_n)\Rightarrow\forall i\leq n\ \ h(b_i)=[b_i]=[a_i]=h(a_i)\Rightarrow h$ – сильный эпиморфизм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 27. $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\in K_\sigma$, $h:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ – гомоморфизм, тогда $\sim$ на $\mathfrak{A}$: $a,c\in\mathfrak{A}$, $a\sim c$: $h(a)=h(c)$, тогда $\sim$ – конгруэнция

Док-во:

а) $\mathfrak{A}/_\sim$ – эквивалентность

б) $f^n\in\sigma$, $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathfrak{A}$ $\forall i\leq n\ \ a_i\sim b_i\Rightarrow h(a_i)\sim h(b_i)\Rightarrow h(f(a_1,\dots,a_n))=f(h(a_1),\dots,h(a_n))=$ $=f(h(b_1),\dots,h(b_n))=h(f(b_1,\dots,b_n))\Rightarrow f(a_1,\dots,a_n)\sim f(b_1,\dots,b_n)\Rightarrow\sim$ – конгруэнция.

ТЕОРЕМА 28. о сильных эпиморфизмах:

$\mathfrak{A},\mathfrak{B}\in K_\sigma$, $h:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ – сильный эпиморфизм, $a,b\in\mathfrak{A}$, $a\sim b$: $h(a)=h(b)\Rightarrow\mathfrak{B}$ – изоморфно $\mathfrak{A}/_\sim$, т.е. $\mathfrak{B}\cong\mathfrak{A}/_\sim$, причём изоморфизм $g: a\in\mathfrak{A}\ \ g(a/_\sim)=h(a)$.

Док-во:

$g:\mathfrak{A}/_\sim\to\mathfrak{B}$, $g(a/_\sim)=h(a)$.

а) корректность: $a,b\in\mathfrak{A}$, $[a]=[b]\Rightarrow a\sim b\Rightarrow h(a)=h(b)$, $g([a])=h(a)=h(b)=g([b])$.

б) g – взаимно однозначное:

1) "на": $b\in\mathfrak{B}\Rightarrow\exists a\in\mathfrak{A}$, $h(a)=b$, т.к. h – эпиморфизм. $g([a])=h(a)=b\Rightarrow g$ – "на".

2) разнозначно: $a,c\in\mathfrak{A}$ $h(a)=g([a])=g([c])=h(c)\Rightarrow h(a)=h(c)\Rightarrow a\sim c\Rightarrow[a]=[c]\Rightarrow g$ – взаимно однозначно.

в) $p^n, f^n, c\in\sigma$, $a_1,\dots,a_n\in\mathfrak{A}$.

1) $\mathfrak{A}/_\sim\models p([a_1],\dots,[a_n])\Rightarrow\exists\, b_1,\dots,b_n\in\mathfrak{A}$ $\forall i\leq n\ \ b_i\sim a_i$ $\mathfrak{A}\models P(b_1,\dots,b_n)\Rightarrow\forall i\ \ h(a_i)=h(b_i)\Rightarrow$ $\mathfrak{B}\models p(h(b_1),\dots,h(b_n))\Rightarrow\mathfrak{B}\models p(h(a_1),\dots,h(a_n))\Rightarrow\mathfrak{B}\models p(g([a_1]),\dots,g([a_n]))$;

$\mathfrak{B}\models p(g([a_1]),\dots,g([a_n]))\Rightarrow\mathfrak{B}\models P(h(a_1),\dots,h(a_n))\xrightarrow[\text{гомом.}]{\text{сильн.}}\exists\, b_1,\dots,b_n\in\mathfrak{A}:\forall i\leq n\ \ h(a_i)=h(b_i)$ $\mathfrak{A}\models p(b_1,\dots,b_n)\Rightarrow\forall i\leq n\ \ a_i\sim b_i\Rightarrow\mathfrak{A}/_\sim\models p([a_1],\dots,[a_n])$.

2) $g(f[a_1],\dots,[a_n]))=g([f(a_1,\dots,a_n)])=h(f(a_1,\dots,a_n))=f(h(a_1),\dots,h(a_n))=f(g([a_1]),\dots,g([a_n]))$.

3) $g(c^{\mathfrak{A}/_\sim})=g([c])=h(c^{\mathfrak{A}})=c^{\mathfrak{B}}\Rightarrow g$ – изоморфизм.

СЛЕДСТВИЕ 29. $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\in K_\sigma$, $h:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ – сильный эпиморфизм $a,b\in\mathfrak{A}$ $a\sim b$: $h(a)=h(b)$. $g(a/_\sim)=h(a)$, g – изоморфизм $\mathfrak{A}/_\sim\to\mathfrak{B}$, тогда $h=/_\sim\circ g$, т.е. любой сильный эпиморфизм является композицией факторизации и изоморфизма, или любой сильный эпиморфизм – это, с точностью до переобозначения – факторизация.

опр. 30 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\in K_\sigma$ $h:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ – гомоморфизм. h наз. доопределением предикатов, если $h:\mathfrak{A}\restriction_{\sigma_0}\to\mathfrak{B}\restriction_{\sigma_0}$ – изоморфизм. $\sigma_0\leftrightharpoons\{q\in\sigma\mid q$ – функция или q – const$\}$, $\mathfrak{A}\restriction_{\sigma_1}$ (сужение), $\mathfrak{A}\restriction_{\sigma_1}\leftrightharpoons\langle A;\sigma_1\rangle$, где $\forall q\in\sigma_1$ $q^{\mathfrak{A}\restriction_{\sigma_1}}=q^{\mathfrak{A}}$, для $\mathfrak{A}\in K_\sigma$ и $\sigma_1\subseteq\sigma$.

Теорема 31. Основная теорема о гомоморфизмах:

Любой гомоморфизм является композицией сильного эпиморфизма (факторизации), доопределения предикатов и изоморфного вложения. $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ – гомоморфизм $\Rightarrow \exists \mathfrak{L} \leq \mathfrak{B}$, $\exists \mathfrak{N}$, $\exists g: \mathfrak{A} \to \mathfrak{N}$ – сильный эпиморфизм, $\exists S: \mathfrak{N} \to \mathfrak{L}$ – доопределение предикатов, $h = g \circ S \circ id_C$, $id_C: \mathfrak{L} \to \mathfrak{B}$ – изоморфное вложение.

Док-во:

$\mathfrak{L} \leftrightharpoons h(\mathfrak{A}) \Rightarrow \mathfrak{L} \leq \mathfrak{B}$, $N = |\mathfrak{N}| \leftrightharpoons C = |\mathfrak{L}|$, $\sigma_0 \leftrightharpoons \{q \in \sigma \mid q$ – функция или константа$\}$, $\mathfrak{N}\restriction_{\sigma_0} \leftrightharpoons \mathfrak{L}\restriction_{\sigma_0}$, $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{L}$ – эпиморфизм. $P^n \in \sigma$ (т.е. $P^n \in \sigma \setminus \sigma_0$) $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{N} \models P(a_1, \dots, a_n)$: $\exists b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{A}$ $\forall i \leq n$ $h(a_i) = h(b_i)$ $\mathfrak{A} \models P(b_1, \dots, b_n)$. $\forall a \in \mathfrak{A}$ $g(a) \leftrightharpoons h(a)$ $g: A \to N = C$, тогда $g: \mathfrak{A} \to \mathfrak{N}$ – сильный эпиморфизм. $g\restriction_{\sigma_0}: \mathfrak{A}\restriction_{\sigma_0} \to \mathfrak{N}\restriction_{\sigma_0}$, $h\restriction_{\sigma_0}: \mathfrak{N}\restriction_{\sigma_0} = \mathfrak{L}\restriction_{\sigma_0}$, $g\restriction_{\sigma_0} = h\restriction_{\sigma_0}$ для отображения g все условия гомоморфизма, связанные с функциями и константами автоматически выполнены. По определению g – сильный гомоморфизм, $g(|\mathfrak{A}|) = C = |\mathfrak{N}| \Rightarrow g$ – сильный эпиморфизм. $\mathfrak{A} \xrightarrow{g} \mathfrak{N} \xrightarrow{S} \mathfrak{L} \overset{C}{\leq} \mathfrak{B}$, где $S: C \to C$, $S\restriction_{\sigma_0} = id$, $S\restriction_{\sigma_0}: \mathfrak{N}\restriction_{\sigma_0} \to \mathfrak{L}\restriction_{\sigma_0}$ – изоморфизм $P_n \in \sigma$, $c_1, \dots, c_n \in C$ (доопределение $\Leftrightarrow$ расширение множества предикатов) $\mathfrak{N} \models P(c_1, \dots, c_n) \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}: \forall i \leq n$, $h(a_i) = c_i$, $\mathfrak{A} \models P(a_1, \dots, a_n) \to \mathfrak{L} \models P(g(a_1), \dots, g(a_n))$ $\forall i \leq n$ $g(a_i) = h(a_i) = c_i \Rightarrow \mathfrak{L} \models P(c_1, \dots, c_n) \Rightarrow S$ – является доопределением предикатов. $\forall a$ $h(a) = g(a) = S(g(a)) = id_C(S(g(a))) \Rightarrow h = g \circ S \circ id_C$, где $id_C: \mathfrak{L} \to \mathfrak{B}$ – изоморфное вложение.

Теорема доказана.

Следствие 32. Любой гомоморфизм является композицией факторизации, доопределения (расширения предикатов) и изоморфного вложения.

Секвенциальное исчисление предикатов, аксиомы и правила вывода. Теорема о корректности. Допустимые правила вывода. Теорема о замене. Вывод основных эквивалентностей. Приведение формул к предварённой нормальной форме.

Опр. 1 а) аксиомы:

1) $\varphi \vdash \varphi$;
2) $\vdash \forall x \ (x = x)$;
3) $\vdash \forall x \forall y ((x = y) \to (y = x))$;
4) $\vdash \forall x \forall y \forall z (((x = y) \& (y = z)) \to (x = z))$
5) $(t_1 = q_1), \dots, (t_n = q_n), \varphi(t_1, \dots, t_n) \vdash \varphi(q_1, \dots, q_n)$, где t_i, q_i – термы, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ – формула, $\varphi(t_1, \dots, t_n) \leftrightharpoons [\varphi(x_1, \dots, x_n)]^{x_1, \dots, x_n}_{t_1, \dots, t_n}$;

равенство – это конгруэнция.

б) правила вывода:

1) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}$

2) $\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}{\Gamma \vdash \varphi}$

3) $\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$

4) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}$

5) $\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}$

6) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \xi; \Gamma, \psi \vdash \xi; \Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}{\Gamma \vdash \xi}$

7) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}$

8) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$

9) $\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash}{\Gamma \vdash \varphi}$

10) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash}$

11) $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi, \Gamma_1 \vdash \xi}{\Gamma, \psi, \varphi, \Gamma_1 \vdash \xi}$

12) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$

13) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$, $x \notin FV(\Gamma) \leftrightharpoons \{x \mid \exists \varphi \in \Gamma: x \in FV(\varphi)\}$

14) $\dfrac{\Gamma, \varphi(t) \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi(x) \vdash \psi}$

15) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi(t)}{\Gamma \vdash \exists x \varphi(x)}$

(к 14, 15:) $\varphi(t) = [\varphi(x)]^x_t$ $\forall y \in FV(t)$ не попадает в область действия кванторa по t. В формуле $\varphi(x)$ никакое вхождение x не находится в области действия квантора по y.

16) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \psi}$, $x \notin FV(\Gamma \cup \{\psi\})$

Опр. 2 Определения: доказательство, доказуемой секвенции, дерева секвенций, дерево вывода, допустимое правило вывода, производного правила вывода аналогичны соответствующим определениям для секвенциального исчисления высказываний.

Предложение 3. Секвенция доказуема $\Leftrightarrow \exists$ дерево вывода, которое заканчивается на эту секвенцию.

Предложение 4. а) если секвенция логики предикатов получена подстановкой в секвенцию логики высказываний доказуемого исчисления высказываний вместо пропозициональных переменных формул логики предикатов, то эта секвенция доказуема в секвенциальном исчислении предикатов.

б) правила вывода допустимые (производные) в СИВ являются допустимыми (соответственно производными) в СИ предикатов.

Док-во:

Берём дерево вывода D, заменяем пропозициональные переменные на формулы, при этом либо аксиома $\to$ аксиома, либо правило вывода $\to$ правило вывода, т.е. дерево вывода $\to$ дерево вывода.

Предложение 5. Следующие правила вывода являются производными $\Rightarrow$ допустимыми в СИ предикатов.

а) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\varphi \& \xi) \vdash (\psi \& \xi)}$

б) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \& \varphi) \vdash (\xi \& \psi)}$

в) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\varphi \vee \xi) \vdash (\psi \vee \xi)}$

г) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \vee \varphi) \vdash (\xi \vee \psi)}$

д) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\psi \to \xi) \vdash (\varphi \to \xi)}$

е) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \to \varphi) \vdash (\xi \to \psi)}$

ж) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\neg\psi \vdash \neg\varphi}$

з) $\dfrac{\Gamma \vdash \forall x \varphi(x)}{\Gamma \vdash \varphi(x)}$

и) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\forall x \varphi \vdash \forall x \psi}$

к) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\exists x \varphi \vdash \exists x \psi}$

Док-во:

Следствие 6. $\varphi_1 \equiv \varphi$, ψ_1 получена из ψ заменой одного вхождения φ на φ_1, тогда $\psi \equiv \psi_1$.

Док-во:

1) если φ не входит в ψ, тогда $\psi_1 = \psi \Rightarrow \psi \equiv \psi_1$ — из рефлексивности.

2) φ — входит в $\psi \Rightarrow lh(\varphi) \leq lh(\psi)$. Доказательство индукцией по длине формулы:

1°) $n = lh(\psi) = lh(\varphi) \Rightarrow \varphi = \psi \Rightarrow \psi_1 = \varphi_1 \Rightarrow \psi = \varphi \equiv \varphi_1 = \psi_1 \Rightarrow \psi \equiv \psi_1$.

2°) $<n \to n$ (полной индукцией): $\psi = (\psi' \& \psi'')$, $\psi = (\psi' \vee \psi'')$, $\psi = (\psi' \to \psi'')$, $\psi = \neg\psi'$, $\psi = \forall x \psi'$; $\psi = \exists x \psi'$. $\psi_1 = (\psi_1' \& \psi_1'')$, …, $\psi_1 = \exists x \psi_1'$. $(\psi' \equiv \psi_1', \psi'' \equiv \psi_1'') \Rightarrow \psi \equiv \psi_1$.

опр. 7 Семантика секвенций:

1) $\Gamma \vdash \varphi$ наз. т.и., если $\forall \mathfrak{A} \in K(\sigma(\Gamma \cup \{\varphi\}))$, $\forall \gamma : FV(\Gamma \cup \{\varphi\}) \to |\mathfrak{A}|$, если $\forall \psi \in \Gamma$ $\mathfrak{A} \models \psi[\gamma]$, то $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$.

2) $\vdash \varphi$ наз. т.и., если $\forall \mathfrak{A} \in K(\sigma(\varphi))$, $\forall \gamma : FV(\varphi) \to |\mathfrak{A}|$ $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$, т.е. если φ — т.и.

3) $\Gamma \vdash$ $\forall \mathfrak{A} \in K(\sigma(\Gamma))$, $\forall \gamma : FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}|$ $\exists \psi \in \Gamma$ $\mathfrak{A} \models \neg\psi[\gamma]$, либо $\mathfrak{A} \not\models \psi[\gamma]$.

Замечание 8. а) $\vdash \varphi$ — т.и. $\Leftrightarrow \varphi$ — т.и.

б) $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash\ )$ — т.и. $\Leftrightarrow (\varphi_1 \& \ldots \& \varphi_n)$ — т.л.

Теорема 9. О корректности:

Если секвенция доказуема, то она — т.и.

Док-во:

Аксиомы являются т.и. $S_1, \ldots, S_n$ — т.и. $\dfrac{S_1; \ldots; S_n}{S}$ — правило вывода $\Rightarrow S$ — т.и.

S — доказуема $\Rightarrow \exists \mathcal{D} = \dfrac{\Pi}{S}$ — дерево вывода. $n = h(\mathcal{D})$ — индукцией по n:

1) $n = 1$: $\mathcal{D} = S$ — аксиома $\Rightarrow$ т.и.

2) $<n \to n$: $\mathcal{D} = \dfrac{\mathcal{D}_1; \ldots; \mathcal{D}_n}{S}$, $\mathcal{D}_i = \dfrac{\Pi}{S_i}$ — дерево вывода $\Rightarrow \forall i < n$ $h(\mathcal{D}_i) \leq n-1 \Rightarrow h(\mathcal{D}_i) < n \Rightarrow$ S_i — т.и. (по индукционному предположению)

$\dfrac{S_1; \ldots; S_n}{S}$ — правило вывода $\Rightarrow S$ — т.и.

Предложение 10. $x \notin FV(\xi)$, тогда имеют место следующие эквивалентности:

1) $\forall x \xi \equiv \xi$
2) $\exists x \xi \equiv \xi$
3) $\forall x \forall y\ \varphi(x,y) \equiv \forall y \forall x\ \varphi(x,y)$
4) $\exists x \exists y\ \varphi(x,y) \equiv \exists y \exists x\ \varphi(x,y)$
5) $\neg \exists x \varphi(x) \equiv \forall x \neg\varphi(x)$
6) $\neg \forall x \varphi(x) \equiv \exists x \neg\varphi(x)$
7) $((\forall x \varphi(x)) \& (\forall x \psi(x))) \equiv \forall x (\varphi(x) \& \psi(x))$
8) $((\exists x \varphi(x)) \vee (\exists x \psi(x))) \equiv \exists x (\varphi(x) \vee \psi(x))$
9) $((\forall x \varphi(x)) \& \xi) \equiv \forall x (\varphi(x) \& \xi)$
10) $((\exists x \varphi(x)) \& \xi) \equiv \exists x (\varphi(x) \& \xi)$
11) $((\forall x \varphi(x)) \vee \xi) \equiv \forall x (\varphi(x) \vee \xi)$
12) $((\exists x \varphi(x)) \vee \xi) \equiv \exists x (\varphi(x) \vee \xi)$
13) $(\xi \& (\forall x \varphi(x))) \equiv \forall x (\xi \& \varphi(x))$
14) $(\xi \& (\exists x \varphi(x))) \equiv \exists x (\xi \& \varphi(x))$
15) $(\xi \vee (\forall x \varphi(x))) \equiv \forall x (\xi \vee \varphi(x))$
16) $(\xi \vee (\exists x \varphi(x))) \equiv \exists x (\xi \vee \varphi(x))$
17) $\forall x \varphi(x) \equiv \forall y \varphi(y)$
18) $\exists x \varphi(x) \equiv \exists y \varphi(y)$

В $\varphi(x)$ никакое свободное вхождение x не находится в области действия квантора по y, $y \notin FV(\varphi(x))$.

Док-во:

5)

$$\begin{array}{c} \neg\varphi \vdash \neg\varphi \\ \hline \forall x \neg\varphi(x) \vdash \neg\varphi \\ \hline \varphi \vdash \neg\forall x \neg\varphi(x) \\ \hline \exists x \varphi(x) \vdash \neg\forall x \neg\varphi(x) \\ \hline \forall x \neg\varphi(x) \vdash \neg\exists x \varphi(x) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \varphi \vdash \varphi \\ \hline \varphi \vdash \exists x \varphi(x) \\ \hline \neg\exists x \varphi(x) \vdash \neg\varphi \\ \hline \neg\exists x \varphi(x) \vdash \forall x \neg\varphi(x) \end{array}$$

6)

$$\begin{array}{c} \neg\varphi \vdash \neg\varphi \\ \hline \neg\varphi \vdash \exists x \neg\varphi(x) \\ \hline \neg\exists x \neg\varphi(x) \vdash \varphi \\ \hline \neg\exists x \neg\varphi(x) \vdash \forall x \varphi(x) \\ \hline \neg\forall x \varphi(x) \vdash \exists x \neg\varphi(x) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\varphi \vdash \neg\varphi \\ \hline \exists x \neg\varphi(x) \vdash \neg\varphi \\ \hline \varphi \vdash \neg\exists x \neg\varphi(x) \\ \hline \forall x \varphi(x) \vdash \neg\exists x \neg\varphi(x) \\ \hline \exists x \neg\varphi(x) \vdash \neg\forall x \varphi(x) \end{array}$$

10)

$$\begin{array}{c} \xi, \varphi \vdash \varphi \& \xi \\ \hline \xi; \varphi \vdash \exists x (\varphi(x) \& \xi) \\ \hline \xi, \exists x \varphi(x) \vdash \exists x (\varphi(x) \& \xi) \\ \hline \exists x \varphi(x) \vdash \xi \to \exists x (\varphi(x) \& \xi) \\ \hline \vdash (\exists x \varphi(x) \to (\xi \to \exists x (\varphi(x) \& \xi)));\ (\exists x \varphi(x) \& \xi) \vdash \exists x \varphi(x) \\ \hline (\exists x \varphi(x)) \& \xi \vdash (\xi \to \exists x (\varphi(x) \& \xi));\quad \exists x \varphi(x) \& \xi \vdash \xi \\ \hline (\exists x \varphi(x)) \& \xi \vdash \exists x (\varphi(x) \& \xi) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \varphi \& \xi \vdash \varphi \\ \hline \varphi \& \xi \vdash \exists x \varphi(x);\ \varphi \& \xi \vdash \xi \\ \hline \varphi \& \xi \vdash \exists x \varphi(x) \& \xi \\ \hline \exists x (\varphi(x) \& \xi) \vdash \exists x \varphi(x) \& \xi \end{array}$$

12)

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi \vee \xi}{\varphi \vdash \exists x (\varphi(x) \vee \xi)}}{\exists x \varphi(x) \vee \xi \vdash \exists x \varphi(x) \vee \xi;\ \exists x \varphi(x) \vdash \exists x (\varphi(x) \vee \xi);\ \xi \vdash \exists x (\varphi(x) \vee \xi)} \quad \dfrac{\xi \vdash \varphi \vee \xi}{} \\ \hline \exists x \varphi(x) \vee \xi \vdash \exists x (\varphi(x) \vee \xi) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \varphi \vdash \varphi \\ \hline \varphi \vdash \exists x \varphi(x) \\ \hline \varphi \vee \xi \vdash \varphi \vee \xi;\ \varphi \vdash \exists x \varphi(x) \vee \xi;\ \xi \vdash \exists x \varphi(x) \vee \xi \\ \hline \varphi \vee \xi \vdash \exists x \varphi(x) \vee \xi \\ \hline \exists x (\varphi(x) \vee \xi) \vdash \exists x \varphi(x) \vee \xi \end{array}$$

опр. 11 Говорят, что формула φ находится в предварённой нормальной форме, если $\varphi = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n\ \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$, где $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, ψ — бескванторная формула (пренексная).

Теорема 12. $\forall \varphi$ $\exists \psi \equiv \varphi$, ψ — в ПНФ.

Док-во: алгоритм построения ПНФ:

1) избавляемся от импликаций.
2) с помощью тождеств (5), (6) отрицание вносится под квантор.
3) с помощью тождеств (17), (18) переобозначаем переменные так, чтобы:
   а) разные кванторы действовали по разным переменным.
   б) связанные переменные не имели свободных вхождений.
4) с помощью тождеств (9)–(16) выносим кванторы наружу.

В силу (т) о замене, в силу предложения и в силу того, что $\equiv$ — является эквивалентностью, имеем формулу в ПНФ равносильную исходной.

Полные теории. Теорема о существовании модели. Теорема Гёделя о полноте и теорема компактности Мальцева. Теорема Мальцева о расширении. Понятие о нестандартных моделях. Существование нестандартной модели арифметики.

опр. 1 σ — сигнатура, $T \subseteq F(\sigma)$, $\varphi \in F(\sigma)$. $T \vdash \varphi$, если $\exists \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T \mid \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ — доказуема. T — противоречива ($T \vdash$), если $\exists \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T \mid \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash$ — доказуема. T — теория в сигнатуре σ, если $T \subseteq S(\sigma)$ — множество предложений, $\forall \varphi \in S(\sigma)$ $T \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in T$, т.е. T является дедуктивно замкнутым. $T \subseteq S(\sigma)$, T — полно (в σ), $\forall \varphi \in S(\sigma)$ выполнено: $\varphi \in T$, либо $\neg\varphi \in T$. Пусть $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $T \subseteq S(\sigma)$, $\mathfrak{A}$ — модель T ($\mathfrak{A} \models T$), если $\forall \varphi \in T$ $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Замечание 2. а) T — теория, $\sigma = \sigma(T)$, тогда $\forall \varphi \in S(\sigma)$ $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in T$.

б) T — теория, $\sigma = \sigma(T)$, $\sigma \subseteq \sigma_1$, $\sigma \neq \sigma_1$, тогда T — не теория σ_1, $T \subseteq S(\sigma)$. T не полно в σ_1.

Док-во:

а) $T \subseteq S(\sigma)$, T – теория, $\varphi \in S(\sigma)$. $T \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in T$. $\varphi \in T$, $\varphi \vdash \varphi$ – доказуема $\Rightarrow T \vdash \varphi$.

б) $T \subseteq S(\sigma)$, $\sigma \subseteq \sigma_1$, $\sigma \neq \sigma_1$. Рассмотрим $q \in \sigma_1 \setminus \sigma$; $\psi: \sigma(\psi) = \{q\}$, $\forall \bar{x}\,(p(\bar{x}))$, $\forall \bar{x} \forall y\,(f(\bar{x}) = y)$, $c = c$. φ – предложение, $\varphi = (\psi \vee \neg\psi)$, тогда $\vdash \varphi$ – доказуема (т.к. т.и.) $\Rightarrow T \vdash \varphi$; $\varphi \notin T \Rightarrow$ T – не теория. $\neg\varphi \notin T \Rightarrow T$ – не полно.

Опр. 3 $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, тогда элементарной теорией модели $\mathfrak{A}$ наз. $Th\,\mathfrak{A} \leftrightharpoons \{\varphi \in S(\sigma) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.
Две модели наз. элементарно эквивалентными, если $Th\,\mathfrak{A} = Th\,\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, т.е. $\forall \varphi \in S(\sigma)$ $(\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Элементарная теория $Th\,\mathfrak{A}$ является полной непротиворечивой теорией модели $\mathfrak{A}$.

Док-во:

а) $Th\,\mathfrak{A}$ – теория. $\varphi \in S(\sigma)$, $Th\,\mathfrak{A} \vdash \varphi \Rightarrow \exists \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in Th\,\mathfrak{A} \mid \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ – доказуема $\Rightarrow$ т.и. $\mathfrak{A} \models \varphi_1, \ldots, \mathfrak{A} \models \varphi_n \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \varphi \in Th\,\mathfrak{A} \Rightarrow Th\,\mathfrak{A}$ – теория.

б) $Th\,\mathfrak{A}$ – непротиворечива. От противного: $Th\,\mathfrak{A}$ – противоречива $\Rightarrow \exists \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in Th\,\mathfrak{A} \mid \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash$ – доказуема $\Rightarrow$ т.и. $\Rightarrow \exists i \leq n \mid \mathfrak{A} \not\models \varphi_i$, но $\forall i$ $\mathfrak{A} \models \varphi_i$ – противоречие $\Rightarrow Th\,\mathfrak{A}$ – непротиворечива.

в) $Th\,\mathfrak{A}$ – полна, $\varphi \in S(\sigma)$, $\varphi \notin Th\,\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi \in Th\,\mathfrak{A} \Rightarrow Th\,\mathfrak{A}$ – полна.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для теории $T \subseteq S(\sigma)$ эквивалентно:

а) T – противоречиво.

б) $\forall \varphi \in S(\sigma)$ $\varphi \in T$.

в) $\exists \varphi \in S(\sigma)$ $\varphi \in T$, $\neg\varphi \in T$.

Док-во:

$(а \to б)$. T – противоречиво $\Rightarrow \exists \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T \mid \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash$ – доказуема. Пусть $\varphi \in S(\sigma)$,

$$\frac{\dfrac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash}{\neg\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash}}{\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi} \Rightarrow \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi \text{ – доказуема} \Rightarrow T \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in T.$$

$(б \to в)$. $\varphi \in S(\sigma) \Rightarrow \neg\varphi \in S(\sigma) \Rightarrow \varphi, \neg\varphi \in T$. $\dfrac{T \vdash \varphi,\ T \vdash \neg\varphi}{T \vdash}$

$(в \to а)$. $\varphi \in S(\sigma)$, $\varphi, \neg\varphi \in T$. $\overset{\text{т.к. теория}}{\dfrac{\varphi \vdash \varphi;\ \neg\varphi \vdash \neg\varphi}{\varphi, \neg\varphi \vdash}} \Rightarrow \varphi, \neg\varphi \vdash$ – доказуема $\Rightarrow T \vdash$.

СЛЕДСТВИЕ 6. T – теория сигнатуры σ, $T \vdash \Leftrightarrow T = S(\sigma)$.

Док-во: $T \vdash \Leftrightarrow \forall \varphi \in S(\sigma)$ $\varphi \in T \Leftrightarrow T = S(\sigma)$, т.к. $T \subseteq S(\sigma)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. $T \subseteq S(\sigma)$, $T \nvdash$, T – полно в σ, тогда T – теория сигнатуры σ.

Док-во: от противного:

$\exists \varphi \in S(\sigma)$, $T \vdash \varphi$, $\varphi \notin T \Rightarrow \neg\varphi \in T$; $\exists \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T \mid \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ – доказуема

$$\frac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi;\ \neg\varphi \vdash \neg\varphi}{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\varphi \vdash} \Rightarrow \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\varphi \vdash \text{ – доказуема} \Rightarrow T \text{ – противоречиво – противоречие.}$$

ТЕОРЕМА 8. A, B – бесконечные, $\|A\| < \|B\|$, тогда $\|A \cup B\| = \|B\|$.

ТЕОРЕМА 9. A – бесконечно, $A^* \leftrightharpoons \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A, n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \|A^*\| = \|A\|$.

ТЕОРЕМА 10. A – множество, $\exists$ кардинал $\alpha \mid \|A\| = \|\alpha\|$.

ТЕОРЕМА 11. $\forall A, B$ $\|A\| \leq \|B\|$, либо $\|B\| \leq \|A\|$.

СЛЕДСТВИЕ 12. α – бесконечный кардинал, то α – предельный.

Док-во: от противного:

$\alpha = \beta + 1$, β – бесконечно $\alpha = \beta \cup \{\beta\} \Rightarrow \|\alpha\| = \|\beta\|$ – противоречие с условием.

Опр. 13 $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, X – множество переменных, тогда $\gamma: X \to |\mathfrak{A}|$ наз. интерпретацией переменных X модели $\mathfrak{A}$. $\Gamma \subseteq F(\sigma)$, $FV(\Gamma) \leftrightharpoons \{x \mid \exists \varphi \in \Gamma, x \in FV(\varphi)\}$, пусть $FV(\Gamma) \subseteq X$. Тогда говорят, что множество формул Γ истинно на модели $\mathfrak{A}$ при означивании (интерпретации) γ; $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$: $\forall \varphi \in \Gamma$ $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$.
$FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ $\gamma(x_i) = a_i$, $\varphi[\gamma] = \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$: $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$
Говорим, что множество Γ выполнимо на $\mathfrak{A}$, если $\exists \gamma: FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}|$ такое, что $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$. Говорят, что Γ – выполнимо, если оно выполнимо на некоторой модели, т.е. имеет модель.

ТЕОРЕМА 14. О существовании модели:
Любое непротиворечивое множество формул имеет модель, т.е. является выполнимым. $\Gamma \subseteq F(\sigma)$, $\Gamma \nvdash$, то $\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $\exists \gamma: FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}|$ $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$.

Док-во: Будем строить эту модель из констант.
$\Gamma \subseteq F(\sigma)$, $\Gamma \nvdash$ $X \leftrightharpoons FV(\Gamma)$. Рассмотрим D – множество констант $D \cap \sigma = \varnothing$, $\|D\| = \|X\|$, $\exists \gamma: X \to D$ – взаимно однозначно, $\Gamma' \leftrightharpoons \Gamma[\gamma] \leftrightharpoons \{\varphi(d_1, \ldots, d_n) \mid FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}, \varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \gamma(x_i) = d_i\}$.
$FV(\Gamma') = \varnothing$, $\Gamma' \subseteq S(\sigma \cup D)$.

ЛЕММА: $\Gamma' \nvdash$. Док-во: (от противного) $\Gamma' \vdash \Rightarrow \exists \varphi_1', \ldots, \varphi_n' \in \Gamma'$ такие, что $\varphi_1', \ldots, \varphi_n' \vdash$ – доказуема $\Rightarrow \exists \mathcal{D}' = \dfrac{\frown}{\varphi_1', \ldots, \varphi_n' \vdash}$ – дерево вывода $\xrightarrow{\gamma^{-1}} \mathcal{D}_0 = \dfrac{\frown}{\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash}$, $\psi' \to \psi$, $\psi = \gamma^{-1}(\psi') = [\psi']^{c \in D}_{\gamma^{-1}(c) \in X}$, $\gamma^{-1}: D \to X$.

$\mathcal{D}_0$ дерево вывода, т.к. аксиома $\to$ аксиома, правило вывода $\to$ правило вывода.
$\varphi_i = [\varphi_i']^{c}_{\gamma^{-1}(c) = x_k}$, $\varphi_i \in F(\sigma)$, $\varphi_i' \in \Gamma' \Rightarrow \varphi_i \in \Gamma$. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash$ – доказуема $\Rightarrow$
$\Gamma \vdash$ – противоречие $\Rightarrow \Gamma' \nvdash$. ЛЕММА ДОКАЗАНА.

$\delta = \max(\omega, \|\sigma\|, \|X\|)$ – в силу линейной упорядоченности мощностей. C – множество констант, $C \cap (\sigma \cup D) = \varnothing$, $\|C\| = \delta$. $\sigma' \leftrightharpoons \sigma \cup D \cup C$. $F(\sigma') \subseteq (\sigma' \cup \{v_i \mid i \in n\} \cup \{'(', ')', \&, \vee, \neg, \to, \forall, \exists, ',', '\}\})^*$.
$\|\sigma'\| = \|D \cup C\| = \max(\|D\|, \|C\|) = \delta$, $\|\sigma \cup D \cup C\| = \max(\|\sigma\|, \|D \cup C\|) = \delta \Rightarrow \|F(\sigma')\| \leq \delta$, $\|C\| = \delta$, $d \in C$
$\varphi = (x = d) \Rightarrow \|F(\sigma')\| \geq \delta \Rightarrow \|F(\sigma')\| = \delta$. $\|S(\sigma')\| \leq \delta$. $\forall d \in C$ $\exists x$: $(x = d) \in S(\sigma') \Rightarrow \|S(\sigma')\| \geq \delta \Rightarrow \|S(\sigma')\| = \delta$.
$\delta = \{\alpha \mid \alpha < \delta\}$, δ – предельный ординал, $\|S(\sigma')\| = \|\delta\| \Rightarrow \exists$ взаимно однозначное соответствие
$O: \delta \to S(\sigma')$ $\varphi_\alpha \leftrightharpoons O(\alpha)$. $S(\sigma') = \{\varphi_\alpha \mid \alpha < \delta\}$, т.е. мы занумеровали все предложения.

Строим теорию T', которая описывает нашу модель. $\Gamma' \subset S(\sigma)$ $\Gamma' \nvdash$
шаг 0: $T_0 \leftrightharpoons \Gamma'$. $C \cap \sigma = \varnothing$ $\|C\| = \omega$
шаг β: $\beta > 0$, $\beta \leq \delta$. $\sigma' = \sigma \cup C$

а) $\beta = \alpha + 1$, $\beta \leq \delta \Rightarrow \beta < \delta$, $\alpha < \delta$. T_α – построено. Рассмотрим φ_α:

1) $T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \nvdash$, $\varphi_\alpha \neq \exists x \psi(x)$. $T_\beta \leftrightharpoons T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$.

2) $T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \nvdash$, $\varphi_\alpha = \exists x \psi_\alpha(x)$, $\sigma(T_0) \cap C = \varnothing$, $\sigma(T_\alpha) \cap C$. $\|\sigma(T_\alpha) \cap C\|$ – конечно, если α – конечно, $\|\sigma(T_\alpha) \cap C\| \leq \alpha$, если α – бесконечно. $\alpha < \delta \Rightarrow \|\sigma(T_\alpha) \cap C\| < \delta$, $\|C\| = \delta \Rightarrow \sigma(T_\alpha) \cap C \subseteq C$, $\sigma(T_\alpha) \cap C \neq C \Rightarrow \exists c_\alpha \in (C \setminus \sigma(T_\alpha))$.
$T_\beta \leftrightharpoons T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha, \psi_\alpha(c)\} = T_\alpha \cup \{\exists x \psi_\alpha(x), \psi_\alpha(c_\alpha)\}$.

3) $T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \vdash$, тогда $T_\beta \leftrightharpoons T_\alpha \cup \{\neg\varphi_\alpha\}$.

б) β – предельный, тогда $T_\beta \leftrightharpoons \bigcup_{\alpha < \beta} T_\alpha$, $T' \leftrightharpoons T_\delta = \bigcup_{\alpha < \delta} T_\alpha$.

ЛЕММА: $\Delta \subseteq F(\sigma_0)$, $x \notin FV(\Delta)$, $\varphi \in F(\sigma_0)$, $c \in \sigma(\varphi)$, $c \notin \sigma(\Delta)$. $\Delta, \varphi \vdash$ – доказуема, тогда $\Delta, [\varphi]^c_x \vdash$ – доказуема.

Док-во: $S = (\Delta, \varphi \vdash)$ – доказуемо. $\exists \mathcal{D} = \dfrac{\frown}{S}$ – дерево вывода. $\mathcal{D} \to \mathcal{D}_1 = \left[[\mathcal{D}]^x_p\right]^c_x$, p не входит в $\mathcal{D}$, $c \notin \sigma(\Delta)$, $x \notin FV(\Delta)$, x не входит в φ, $\mathcal{D}_1$ – дерево вывода. $\mathcal{D}_1 = \dfrac{\frown}{S_1}$, $S_1 = \left[[S]^x_p\right]^c_x = (\Delta, [\varphi]^c_x \vdash)$. ЛЕММА ДОКАЗАНА.

ЛЕММА ХЕНКИНА:

а) $T' \nvdash$.

б) $\forall \varphi \in S(\sigma')$, $\varphi \in T'$ или $\neg\varphi \in T'$, т.е. T' – полно.

в) $\varphi \in S(\sigma')$ и $T' \vdash \varphi$, то $\varphi \in T'$, т.е. T' – теория.

г) $(\varphi \& \psi) \in T' \Leftrightarrow \varphi \in T'$ и $\psi \in T'$.

д) $(\varphi \vee \psi) \in T' \Leftrightarrow \varphi \in T'$ или $\psi \in T'$.

е) $\neg\varphi \in T' \Leftrightarrow \varphi \notin T'$.

ж) $(\varphi \to \psi) \in T' \Leftrightarrow$ если $\varphi \in T'$, то $\psi \in T'$.

з) $\exists x \psi(x) \in T' \Leftrightarrow \exists c \in C$ $\psi(c) \in T' \Leftrightarrow \exists$ замкнутый терм $t \in T(\sigma')$, $FV(t) = \varnothing$, $\psi(t) \in T'$.

и) $\forall x \psi(x) \in T' \Leftrightarrow \forall c \in C$ $\psi(c) \in T' \Leftrightarrow \forall$ замкнутого терма $t \in T(\sigma')$, $\psi(t) \in T'$.

Док-во: (трансфинитной индукцией)

а) (0): $T_0 = \Gamma' \nvdash$.

$(<\beta \to \beta)$:

а') $\beta = \alpha + 1$

1) $T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \nvdash$ и $\varphi_\alpha \neq \exists x \psi(x)$ $T_\beta = T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$, то $T_\beta \nvdash$.

2) $T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \nvdash$, $\varphi_\alpha = \exists x \psi_\alpha(x)$, $T_\beta = T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha, \psi_\alpha(c_\alpha)\}$. От противного $T_\beta \vdash \Rightarrow \exists \xi_1, \ldots, \xi_n \in T_\alpha$, что

$\xi_1,\dots,\xi_n, \varphi_\alpha, \psi_\alpha(c_\alpha) \vdash$ — доказуемо. $\xi_1,\dots,\xi_n, \exists x\psi_\alpha(x), \psi_\alpha(c_\alpha)\vdash \Rightarrow$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\xi_1,\dots,\xi_n,\exists x\psi_\alpha(x),\psi_\alpha(y)\vdash}{\xi_1,\dots,\xi_n,\psi_\alpha(y)\vdash\neg\exists x\psi_\alpha(x)}}{\xi_1,\dots,\xi_n,\exists y(\psi_\alpha(y))\vdash\neg\exists x\psi_\alpha(x)}}{\xi_1,\dots,\xi_n,\exists x\psi_\alpha(x)\vdash\neg\exists x\psi_\alpha(x)}\ ;\ \dfrac{\exists x\psi_\alpha(x)\vdash\exists x\psi_\alpha(x)}{\xi_1,\dots,\xi_n,\exists x\psi_\alpha(x)\vdash\exists x\psi_\alpha(x)}}{\xi_1,\dots,\xi_n,\exists x\psi_\alpha(x)\vdash}$$

$\Rightarrow$ $\xi_1,\dots,\xi_n,\varphi_\alpha\vdash$ — доказуемо $\Rightarrow (T_\alpha,\ \varphi_\alpha)\vdash$ — противоречие $\Rightarrow T_\beta\nvdash$.

3) $T_\alpha\cup\{\varphi_\alpha\}\vdash$; $T_\beta=T_\alpha\cup\{\neg\varphi_\alpha\}$, пусть $T_\beta\vdash\Rightarrow\exists\,\xi_1,\dots,\xi_n,\xi_{n+1},\dots,\xi_k\in T_\alpha$.

$\xi_1,\dots,\xi_n,\varphi_\alpha\vdash$, $\xi_{n+1},\dots,\xi_k,\neg\varphi_\alpha\vdash$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\xi_1,\dots,\xi_n,\varphi_\alpha\vdash}{\xi_1,\dots,\xi_n\vdash\neg\varphi_\alpha}}{\xi_1,\dots,\xi_k\vdash\neg\varphi_\alpha}\qquad\dfrac{\dfrac{\xi_{n+1},\dots,\xi_k,\neg\varphi_\alpha\vdash}{\xi_{n+1},\dots,\xi_k\vdash\neg\neg\varphi_\alpha}}{\xi_1,\dots,\xi_k\vdash\neg\neg\varphi_\alpha}}{\xi_1,\dots,\xi_k\vdash}$$

$\Rightarrow T_\alpha\vdash$ — противоречие $\Rightarrow T_\beta\nvdash$

б') β — предельный ординал. $T_\beta=\bigcup_{\alpha<\beta}T_\alpha$, $T_\beta\vdash$ (от противного) $\Rightarrow\exists\,\psi_1,\dots,\psi_n\in T_\beta$, $\psi_1,\dots,\psi_n\vdash$ — доказуемо $\Rightarrow$
$\exists\,\alpha_1,\dots,\alpha_n<\beta\mid\psi_i\in T_{\alpha_i}$, $i\le n$. $\alpha=\max\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}\Rightarrow\forall i\le n\ \alpha_i\le\alpha\Rightarrow T_{\alpha_i}\subseteq T_\alpha\Rightarrow$
$\Rightarrow\psi_1,\dots,\psi_n\in T_\alpha$, $\alpha<\beta\Rightarrow T_\alpha\vdash$ — противоречие. $\forall\beta\ T_\beta\nvdash\Rightarrow T_\delta\nvdash\Rightarrow T'\nvdash$.

б) T' — полная. $\varphi\in S(\sigma')=\{\varphi_\alpha\mid\alpha<\delta\}\Rightarrow\exists\alpha<\delta:\ \varphi=\varphi_\alpha\Rightarrow\varphi_\alpha\in T_{\alpha+1}\subseteq T'$, либо $\neg\varphi_\alpha\in T_{\alpha+1}\subseteq T'$!
$\Rightarrow\varphi_\alpha\in T'$ либо $\neg\varphi_\alpha\in T'\Rightarrow T'$ — полная.

в) поскольку (а), (б) $\Rightarrow$ теория.

г) (⇒) $(\varphi\&\psi)\in T'$ $\dfrac{(\varphi\&\psi)\vdash(\varphi\&\psi)}{(\varphi\&\psi)\vdash\varphi}$, $\dfrac{(\varphi\&\psi)\vdash(\varphi\&\psi)}{(\varphi\&\psi)\vdash\psi}$ $T'\vdash\varphi$, $T'\vdash\psi\Rightarrow\varphi,\psi\in T'$!

(⇐) $\varphi,\psi\in T'$ $\dfrac{\varphi\vdash\varphi;\ \psi\vdash\psi}{\varphi,\psi\vdash(\varphi\&\psi)}$ $\varphi,\psi\vdash(\varphi\&\psi)$ — доказуемо $\Rightarrow T'\vdash(\varphi\&\psi)\Rightarrow(\varphi\&\psi)\in T'$!

д) (⇒) ~~$(\varphi\vee\psi)\notin T'$~~, $\varphi\notin T'$, $\psi\notin T'\Rightarrow\neg\varphi,\neg\psi\in T'$! $\dfrac{\dfrac{\neg\varphi\&\neg\psi\vdash\neg\varphi\&\neg\psi}{\neg\varphi\&\neg\psi\vdash\neg(\varphi\vee\psi)}}{\neg\varphi,\neg\psi\vdash\neg(\varphi\vee\psi)}$

$\Rightarrow T'\vdash\neg(\varphi\vee\psi)\Rightarrow\neg(\varphi\vee\psi)\in T'$!

(⇐) $\varphi\in T'$ или $\psi\in T'$. $\varphi\vdash(\varphi\vee\psi)$, $\psi\vdash(\varphi\vee\psi)$ — доказуемы $\Rightarrow T'\vdash(\varphi\vee\psi)$ или $T'\vdash(\varphi\vee\psi)\Rightarrow(\varphi\vee\psi)\in T'$!

е) $\neg\varphi\in T'\Leftrightarrow\varphi\notin T'$.

(⇒) $\neg\varphi\in T'$, T' — непротиворечиво $\Rightarrow\varphi\notin T'$!

(⇐) $\varphi\notin T'$, T' — полна $\Rightarrow\neg\varphi\in T'$!

ж) (⇒) $(\varphi\to\psi)\in T'$, $\varphi\in T'$. $\dfrac{\varphi\vdash\varphi;\ (\varphi\to\psi)\vdash(\varphi\to\psi)}{\varphi,(\varphi\to\psi)\vdash\psi}\Rightarrow T'\vdash\psi\Rightarrow\psi\in T'$!

(⇐) от противного: $(\varphi\to\psi)\notin T'\Rightarrow\neg(\varphi\to\psi)\in T'$, $\neg(\varphi\to\psi)\equiv(\varphi\&\neg\psi)\Rightarrow$
$\Rightarrow T'\vdash(\varphi\&\neg\psi)\Rightarrow T'\vdash\varphi$, $T'\vdash\neg\psi\Rightarrow\varphi,\neg\psi\in T'\Rightarrow\psi\notin T'$, $\psi\in T'$ по условию $\Rightarrow$
$\Rightarrow T'\vdash$ — противоречиво $\Rightarrow(\varphi\to\psi)\in T'$!

з) (1) $\exists x\psi(x)\in T'\Leftrightarrow$ (2) $\exists c\in C\ \psi(c)\in T'\Leftrightarrow$ (3) $\exists t\in T(\sigma')\ FV(t)=\varnothing\ \psi(t)\in T'$!
(1⇒2) $\exists x\psi(x)\in T'$ $\exists\alpha:\varphi_\alpha=\exists x\psi(x)\Rightarrow T',\varphi_\alpha\nvdash$ $T_\alpha,\varphi_\alpha\nvdash\Rightarrow\exists c_\alpha\in C$ $T_{\alpha+1}=T_\alpha\cup\{\varphi_\alpha,\psi(c_\alpha)\}\Rightarrow$
$\Rightarrow\psi(c_\alpha)\in T'\Rightarrow\exists c_\alpha\in C\mid\psi(c_\alpha)\in T'$!
(2⇒3) $\exists c\in C$ $\psi(c)\in T'$, $t\rightleftharpoons c\in T(\sigma')$, $FV(t)=\varnothing$ $\psi(t)\in T'$!
(3⇒1) $\dfrac{\psi(t)\vdash[\psi(x)]^x_t}{\psi(t)\vdash\exists x\psi(x)}$ $t\in T(\sigma')$, $FV(t)=\varnothing$, $\psi(t)\in T'\Rightarrow T'\vdash\exists x\psi(x)\Rightarrow\exists x\psi(x)\in T'$!

и) $\forall x\psi(x)\in T'\Leftrightarrow\forall c\in C\ \psi(c)\in T'\Leftrightarrow\forall t\in T(\sigma')\mid FV(t)=\varnothing\ \psi(t)\in T'$!
1: $\forall x\psi(x)\in T'\Leftrightarrow\neg\exists x\neg\psi(x)\in T'\Leftrightarrow\exists x\neg\psi(x)\notin T'\Leftrightarrow\neg\exists c\in C\mid\neg\psi(c)\in T'\Leftrightarrow\forall c\in C\ \neg\psi(c)\notin T'\Leftrightarrow\forall c\in C\ \psi(c)\in T'$
2: $\forall x\psi(x)\in T'\Leftrightarrow\exists x\neg\psi(x)\notin T'\Leftrightarrow\neg\exists t\in T(\sigma')\mid FV(t)=\varnothing\ \neg\psi(t)\in T'\Leftrightarrow\forall t\in T(\sigma')\mid FV(t)=\varnothing\ \neg\psi(t)\notin T'\Leftrightarrow$
$\forall t\in T(\sigma')\mid FV(t)=\varnothing\ \psi(t)\in T'$!

ЛЕММА ДОКАЗАНА.

(I) исчисление предикатов без равенства, т.е. 1) нет $t=q$. 2) нет аксиом с равенством.
$\mathfrak{A}'\rightleftharpoons\langle A;\sigma'\rangle$, $A\rightleftharpoons\{t\in T(\sigma')\mid FV(t)=\varnothing\}$, $A\ne\varnothing: C\subseteq A\Rightarrow A\ne\varnothing$.
1) $e\in\sigma'$ $e^{\mathfrak{A}'}\rightleftharpoons e\in A$; 2) $P^n\in\sigma'$ $t_1,\dots,t_n\in A$ $\mathfrak{A}'\models P(t_1,\dots,t_n)\Leftrightarrow P(t_1,\dots,t_n)\in T'$! 3) $f^n\in\sigma'$ $t_1,\dots,t_n\in A$
$f^{\mathfrak{A}'}(t_1,\dots,t_n)\rightleftharpoons f(t_1,\dots,t_n)\in A$. $\mathfrak{A}'\models T'$!
Означили константы, значения функций и предикаты.

ЛЕММА. $t\in T(\sigma')$, $FV(t)=\varnothing\Rightarrow t^{\mathfrak{A}'}=t$.

Док-во: индукцией по построению терма.
1) $t=e\in\sigma'\Rightarrow t^{\mathfrak{A}'}=e^{\mathfrak{A}'}=e=t$.
2) $t=f(t_1,\dots,t_n)$, $t^{\mathfrak{A}'}=f^{\mathfrak{A}'}(t_1^{\mathfrak{A}'},\dots,t_n^{\mathfrak{A}'})=f^{\mathfrak{A}'}(t_1,\dots,t_n)=f(t_1,\dots,t_n)=t$.

ЛЕММА $\mathfrak{L}\in K(\sigma_0)$, $t(x_1,\dots,x_n)$, $q_1,\dots,q_n\in T(\sigma_0)$. $(t(q_1,\dots,q_n))^{\mathfrak{L}}=t^{\mathfrak{L}}(q_1^{\mathfrak{L}},\dots,q_n^{\mathfrak{L}})$

Док-во: индукцией по построению терма.

СЛЕДСТВИЕ $t(x_1,\dots,x_n)$ $FV(t)\subseteq\{x_1,\dots,x_n\}$, $t\in T(\sigma')$, $t=t(x_1,\dots,x_n)$ $q_1,\dots,q_n\in T(\sigma')$ $\forall i\ FV(q_i)=\varnothing$. $t^{\mathfrak{A}'}(q_1,\dots,q_n)=t(q_1,\dots,q_n)$

Док-во:
$t^{\mathfrak{A}'}(q_1,\dots,q_n)=t^{\mathfrak{A}'}(q_1^{\mathfrak{A}'},\dots,q_n^{\mathfrak{A}'})=(t(q_1,\dots,q_n))^{\mathfrak{A}'}=t(q_1,\dots,q_n)$.

ЛЕММА $\forall\varphi\in S(\sigma')$ $\mathfrak{A}'\models\varphi\Leftrightarrow\varphi\in T'$!

Док-во: индукцией по построению φ.
1) $\varphi=P(t_1,\dots,t_n)$, $t_i\in T(\sigma')$ $FV(t_i)=\varnothing$. $\mathfrak{A}'\models\varphi\Leftrightarrow\mathfrak{A}'\models P(t_1^{\mathfrak{A}'},\dots,t_n^{\mathfrak{A}'})\Leftrightarrow\mathfrak{A}'\models P(t_1,\dots,t_n)\Leftrightarrow P(t_1,\dots,t_n)\in T'\Leftrightarrow\varphi\in T'$!
2) $\varphi=\varphi_1\wedge\varphi_2$, $\varphi=\varphi_1\vee\varphi_2$, $\varphi=\varphi_1\to\varphi_2$, $\varphi=\neg\varphi_1$.
$\mathfrak{A}'\models(\varphi_1\wedge\varphi_2)\Leftrightarrow\mathfrak{A}'\models\varphi_1$ и $\mathfrak{A}'\models\varphi_2\Leftrightarrow\varphi_1\in T'$ и $\varphi_2\in T'\Leftrightarrow(\varphi_1\wedge\varphi_2)\in T'$.
$\mathfrak{A}'\models(\varphi_1\vee\varphi_2)\Leftrightarrow\mathfrak{A}'\models\varphi_1$ или $\mathfrak{A}'\models\varphi_2\Leftrightarrow\varphi_1\in T'$ или $\varphi_2\in T'\Leftrightarrow(\varphi_1\vee\varphi_2)\in T'$!
$\mathfrak{A}'\models(\varphi_1\to\varphi_2)\Leftrightarrow$ если $\mathfrak{A}'\models\varphi_1$, то $\mathfrak{A}'\models\varphi_2\Leftrightarrow$ если $\varphi_1\in T'$, то $\varphi_2\in T'\Leftrightarrow(\varphi_1\to\varphi_2)\in T'$!
3) $\varphi=\exists x\psi(x)$ $\mathfrak{A}'\models\exists x\psi(x)\Leftrightarrow\exists t\in\mathfrak{A}':\ \mathfrak{A}'\models\psi(t)\Leftrightarrow\exists t\in T(\sigma')\mid FV(t)=\varnothing$ $\psi(t)\in T'\Leftrightarrow\exists x\,\psi(x)\in T'\Leftrightarrow\varphi\in T'$!
4) $\mathfrak{A}'\models\forall x\psi(x)\Leftrightarrow\forall t\in\mathfrak{A}'$ $\mathfrak{A}'\models\psi(t)\Leftrightarrow\forall t\in T(\sigma')\mid FV(t)=\varnothing$ $\psi(t)\in T'\Leftrightarrow\forall x\,\psi(x)\in T'$! $\Leftrightarrow\varphi\in T'$!

СЛЕДСТВИЕ $\mathfrak{A}'\models T'$.
$\Gamma'=T_0\subseteq T'$, т.е. на $\mathfrak{A}'\models\Gamma'$. $\Gamma'=\Gamma[\gamma]=[\Gamma]^{x\in FV(\Gamma)}_{\gamma(x)}$; $\gamma:FV(\Gamma)\to\mathfrak{Z}\subseteq\sigma'$, $\mathfrak{Z}\subseteq A$, $\gamma: FV(\Gamma)\to A$. $\forall\varphi(x_1,\dots,x_n)\in\Gamma$
$\mathfrak{A}'\models\varphi(\gamma(x_1),\dots,\gamma(x_n))=\varphi(d_1,\dots,d_n)$, $d_i\in A$. $\mathfrak{A}\rightleftharpoons\mathfrak{A}'\restriction\sigma$, $\mathfrak{A}=\langle A;\sigma\rangle$ $\forall\varphi(x_1,\dots,x_n)\in\Gamma$ $\mathfrak{A}\models\varphi(d_1,\dots,d_n)$,
$d_i=\gamma(x_i)\in A$.

$\Rightarrow$ для случая без равенства (т) о $\exists$ модели доказана.

(II) исчисление предикатов с равенством.

АКСИОМЫ РАВЕНСТВА $t,q,s,t_i,q_i\in T(\sigma_0)$. а) $\vdash(t=t)$; б) $(t=q)\vdash(q=t)$; в) $(t=q),(q=s)\vdash(t=s)$; г) $(t_1=q_1),\dots,(t_n=q_n)\vdash[s]^{x_1,\dots,x_n}_{t_1,\dots,t_n}=[s]^{x_1,\dots,x_n}_{q_1,\dots,q_n}$, $s(t_1,\dots,t_n)=s(q_1,\dots,q_n)$; д) $(t_1=q_1),\dots,(t_n=q_n)$, $[\varphi]^{x_1,\dots,x_n}_{t_1,\dots,t_n}\vdash[\varphi]^{x_1,\dots,x_n}_{q_1,\dots,q_n}$
$\varphi(x_1,\dots,x_n)\in F(\sigma_0)$, $\varphi(t_1,\dots,t_n)\vdash\varphi(q_1,\dots,q_n)$.

ЛЕММА $t\in T(\sigma')$, $FV(t)=\varnothing$. $\exists c\in C\mid(t=c)\in T'$!

Док-во:
$\vdash(t=t)\Leftrightarrow\vdash[t=x]^x_t$ $\dfrac{\vdash[t=x]^x_t}{\vdash\exists x\,(t=x)}\Rightarrow\vdash\exists x\,(t=x)$. $T'\vdash\exists x(t=x)\Rightarrow\exists x\,(t=x)\in T'\Rightarrow\exists c\in C\ (t=c)\in T'$!

опр. $c,e\in C$, $c\sim e$, если $(c=e)\in T'$!

ЛЕММА это отношение является отношением эквивалентности.

Док-во:
$c,e,s\in C$, а) $c\sim c$, $\vdash(c=c)\Rightarrow T'\vdash(c=c)\Rightarrow(c=c)\in T'$!
б) $c\sim e\Rightarrow(c=e)\in T'$ $(c=e)\vdash(e=c)\Rightarrow T'\vdash(e=c)\Rightarrow(e=c)\in T'\Rightarrow e\sim c$.
в) $(c\sim e),(e\sim s)\Rightarrow(c=e),(e=s)\in T'$. $(c=e),(e=s)\vdash(c=s)\Rightarrow T'\vdash(c=s)\Rightarrow(c=s)\in T'\Rightarrow c\sim s$.

опр. $\mathfrak{A}'\rightleftharpoons\langle A;\sigma'\rangle$, $A\rightleftharpoons C/_\sim=\{[c]_\sim\mid c\in C\}$. 1) $P^n\in\sigma'$ $c_1,\dots,c_n\in C$ $\mathfrak{A}'\models P([c_1],\dots,[c_n]):P(c_1,\dots,c_n)\in T'$;
2) $f^n\in\sigma'$ $d,c_1,\dots,c_n\in C$, тогда $f^{\mathfrak{A}'}([c_1],\dots,[c_n])\rightleftharpoons[d]$, если $(f(c_1,\dots,c_n)=d)\in T'$; 3) $\alpha\in\sigma'$, $c\in C$, $\alpha^{\mathfrak{A}'}\rightleftharpoons[c]$,
если $(d=c)\in T'$!

ЛЕММА определение корректно.

Док-во:
1) $c_1,\dots,c_n,d_1,\dots,d_n\in C$ $[c_i]=[d_i]$. $P(c_1,\dots,c_n)\in T'$, покажем $P(d_1,\dots,d_n)\in T'$! $\forall i\ c_i\sim d_i\Rightarrow$
$\forall i\ (c_i=d_i)\in T'$; $(c_1=d_1),\dots,(c_n=d_n)$, $P(c_1,\dots,c_n)\vdash P(d_1,\dots,d_n)\Rightarrow T'\vdash P(d_1,\dots,d_n)\Rightarrow P(d_1,\dots,d_n)\in T'$!
2) $c_1,\dots,c_n,d_1,\dots,d_n,c,d\in C$, $\forall i\ [c_i]=[d_i]$ $(f(c_1,\dots,c_n)=c)\in T'$, $(f(d_1,\dots,d_n)=d)\in T'$. Покажем, что
$[c]=[d]$. $\forall i\ c_i\sim d_i\Rightarrow\forall i\ (c_i=d_i)\in T'$; $(c_1=d_1),\dots,(c_n=d_n)\vdash(f(c_1,\dots,c_n)=f(d_1,\dots,d_n))\Rightarrow$
$T'\vdash(f(c_1,\dots,c_n)=f(d_1,\dots,d_n))\Rightarrow(f(\bar c)=f(\bar d))\in T'$. $(f(d_1,\dots,d_n)=d),(f(\bar c)=f(\bar d))\vdash(f(\bar c)=d)\Rightarrow$
$T'\vdash(f(\bar c)=d)$. $(f(\bar c)=c)\vdash(c=f(\bar c))\Rightarrow T'\vdash(c=f(\bar c))$; $(c=f(\bar c)),(f(\bar c)=d)\vdash(c=d)\Rightarrow T'\vdash(c=d)\Rightarrow(c=d)\in T'\Rightarrow$
$c\sim d$.

3) $d \in \sigma'$, $c, e \in C$, $(d=c), (d=e) \in T'$ $(c=d) \in T'$; $(c=d), (d=e) \vdash (c=e) \Rightarrow T' \vdash (c=e) \Rightarrow (c=e) \in T' \Rightarrow$
$c \sim e \Rightarrow [c]=[e]$.

ЛЕММА $t \in T(\sigma')$, $FV(t)=\varnothing$, $c \in C$. $t^{\mathfrak{A}'}=[c] \Leftrightarrow (t=c) \in T'$.

Док-во: индукция по построению терма.

1) $t=d$, $d \in \sigma'$, $d^{\mathfrak{A}'}=[c] \Leftrightarrow (d=c) \in T'$.

2) $t=f(q_1,\dots,q_n)$, $q_i \in T(\sigma')$, $FV(q_i)=\varnothing$. $\exists c_i \in C$ $(q_i=c_i) \in T' \Rightarrow q_i^{\mathfrak{A}'}=[c_i]$.
$(q_1=c_1),\dots,(q_n=c_n) \vdash (f(q_1,\dots,q_n)=f(c_1,\dots,c_n)) \Rightarrow T' \vdash (f(\bar q)=f(\bar c)) \Rightarrow (f(\bar q)=f(\bar c)) \in T'$, т.е.
$(t=f(c_1,\dots,c_n)) \in T'$.
$(\Rightarrow)$ $t^{\mathfrak{A}'}=[c]$, $t^{\mathfrak{A}'}=f^{\mathfrak{A}'}(q_1^{\mathfrak{A}'},\dots,q_n^{\mathfrak{A}'})=f^{\mathfrak{A}'}([c_1],\dots,[c_n]) \Rightarrow (f(c_1,\dots,c_n))^{\mathfrak{A}'}=f^{\mathfrak{A}'}([c_1],\dots,[c_n])=[c] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f(c_1,\dots,c_n)=c) \in T'$. $(t=f(c_1,\dots,c_n)), (f(c_1,\dots,c_n)=c) \vdash (t=c) \Rightarrow T' \vdash (t=c) \Rightarrow (t=c) \in T'$.
$(\Leftarrow)$ $(t=c) \in T'$ $(t=c), (t=f(\bar c)) \vdash (f(\bar c)=c) \in T' \Rightarrow T' \vdash (f(\bar c)=c) \Rightarrow (f(\bar c)=c) \in T' \Rightarrow f^{\mathfrak{A}'}([c_1],\dots,[c_n])=[c]$.
$q_i^{\mathfrak{A}'}=[c_i] \Rightarrow f^{\mathfrak{A}'}(q_1^{\mathfrak{A}'},\dots,q_n^{\mathfrak{A}'})=[c]$.

ЛЕММА $t, q \in T(\sigma')$, $FV(t)=FV(q)=\varnothing$, $\mathfrak{A}' \models (t=q) \Leftrightarrow (t=q) \in T'$.

Док-во: $\exists c, d$, $(t=c), (q=d) \in T' \Rightarrow t^{\mathfrak{A}'}=[c]$, $q^{\mathfrak{A}'}=[d]$. $\mathfrak{A}' \models (t=q) \Leftrightarrow (t^{\mathfrak{A}'}=q^{\mathfrak{A}'}) \Leftrightarrow [c]=[d] \Leftrightarrow c \sim d \Leftrightarrow (c=d) \in T'$.
$(\Rightarrow)$ Покажем, что $(c=d) \in T' \Leftrightarrow (t=q) \in T'$. $(c=d) \in T'$ $(c=d), (t=c), (q=d) \vdash (t=q) \Rightarrow T' \vdash (t=q) \Rightarrow$
$\Rightarrow (t=q) \in T'$.
$(\Leftarrow)$ $(t=q) \in T'$, $(t=q), (t=c), (q=d) \vdash (c=d) \Rightarrow T' \vdash (c=d) \Rightarrow (c=d) \in T'$.

ЛЕММА $P^n \in \sigma'$, $t_1,\dots,t_n \in T(\sigma')$ $\forall i \le n$ $FV(t_i)=\varnothing$, $\mathfrak{A}' \models P(t_1^{\mathfrak{A}'},\dots,t_n^{\mathfrak{A}'}) \Leftrightarrow P(t_1,\dots,t_n) \in T'$.

Док-во: $\exists c_1,\dots,c_n \in C$ $\forall i$ $(t_i=q_i) \in T' \Rightarrow t_i^{\mathfrak{A}'}=[c_i]$ $\mathfrak{A}' \models P(t_1^{\mathfrak{A}'},\dots,t_n^{\mathfrak{A}'}) \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models P([c_1],\dots,[c_n]) \Leftrightarrow P(c_1,\dots,c_n) \in T' \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(t_1,\dots,t_n) \in T'$.
$(\Rightarrow)$ $P(c_1,\dots,c_n) \in T'$ $(t_1=c_1),\dots,(t_n=c_n), P(c_1,\dots,c_n) \vdash P(t_1,\dots,t_n) \Rightarrow P(t_1,\dots,t_n) \in T'$.
$(\Leftarrow)$ $P(t_1,\dots,t_n) \in T'$ $(t_1=c_1),\dots,(t_n=c_n), P(t_1,\dots,t_n) \vdash P(c_1,\dots,c_n) \Rightarrow P(c_1,\dots,c_n) \in T'$.

ЛЕММА $\forall \varphi \in S(\sigma')$ $\mathfrak{A}' \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in T'$.

Док-во: индукцией по построению φ:

1) $\varphi=(t=q)$, $\varphi=P(t_1,\dots,t_n)$ – доказано.

2) $\varphi=(\varphi_1 \& \varphi_2)$, $\varphi=(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $\varphi=(\varphi_1 \to \varphi_2)$, $\varphi=\neg\varphi_1$ – по лемме Хенкина:
$\mathfrak{A}' \models (\varphi_1 \& \varphi_2) \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi_1$ и $\mathfrak{A}' \models \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 \in T'$ и $\varphi_2 \in T' \Leftrightarrow$ по лемме Хенкина $\Leftrightarrow (\varphi_1 \& \varphi_2) \in T'$.
$\mathfrak{A}' \models (\varphi_1 \vee \varphi_2) \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi_1$ или $\mathfrak{A}' \models \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 \in T'$ или $\varphi_2 \in T' \Leftrightarrow$ по лемме Хенкина $\Leftrightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2) \in T'$.
$\mathfrak{A}' \models (\varphi_1 \to \varphi_2) \Leftrightarrow$ если $\mathfrak{A}' \models \varphi_1$, то $\mathfrak{A}' \models \varphi_2 \Leftrightarrow$ если $\varphi_1 \in T'$, то $\varphi_2 \in T' \Leftrightarrow (\varphi_1 \to \varphi_2) \in T'$.
$\mathfrak{A}' \models \neg\varphi_1 \Leftrightarrow$ $\mathfrak{A}' \not\models \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_1 \notin T' \Leftrightarrow (\neg\varphi_1) \in T'$.
$\varphi=\exists x \psi(x)$. $\mathfrak{A}' \models \exists x \psi(x) \Leftrightarrow \exists c \in C$ $\mathfrak{A}' \models \psi([c]) \Leftrightarrow \exists c \in C$ $\mathfrak{A}' \models \psi(c^{\mathfrak{A}'}) \Leftrightarrow \exists c \in C$ $\mathfrak{A}' \models \psi(c) \Leftrightarrow$ по индукц
$\exists c \in C$ $\psi(c) \in T' \Leftrightarrow \exists c \in C$ $\psi(c) \in T' \Leftrightarrow \exists x \psi(x) \in T'$.
$\varphi=\forall x \psi(x)$. $\mathfrak{A}' \models \forall x \psi(x)$

СЛЕДСТВИЕ $\mathfrak{A}' \models T'$.

Док-во:
$\varphi \in T' \Rightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A}' \models T'$. $\mathfrak{A}' \in K(\sigma')$, $\mathfrak{A}' \models T'$, $T_0 \subseteq T'$, $T_0=\Gamma'=[\Gamma]^{x}_{\gamma(x)}$, $x \in FV(\Gamma)$, $\mathfrak{A}' \models \Gamma'$ $\gamma_0: FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}'|$
$\varphi \in T' \Rightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A}' \models T'$... $\forall \varphi(\bar x) \in \Gamma$ $\mathfrak{A}' \models \varphi(\gamma_0(x_1),\dots,\gamma_0(x_n))$, $\gamma(x_i)=d_i$.
$\mathfrak{A}'$, $\gamma(x)=d \in D$, $\gamma_0(x)=\gamma(x)$, $\gamma_0(x)=d^{\mathfrak{A}'}$, $\gamma(x) \in D$. $\varphi(d_1,\dots,d_n) \in \Gamma' \Rightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi(d_1,\dots,d_n) \Rightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi(d_1^{\mathfrak{A}'},\dots,d_n^{\mathfrak{A}'}) \Rightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi(\gamma_0(x_1),\dots,\gamma_0(x_n)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi[\gamma_0] \Rightarrow \mathfrak{A}' \models \Gamma[\gamma_0]$, $\Gamma \subseteq F(\sigma)$, $\mathfrak{A} \rightleftharpoons \mathfrak{A}' \upharpoonright \sigma$, $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma_0]$. ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА

Опр. 15 $\Gamma \subseteq F(\sigma)$, Γ – совместно, $\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma)$ $\exists \gamma: FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}|$ $\mid$ $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$. Γ – локально совместно, если $\forall$ конечного $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, Γ_0 – совместно.

ТЕОРЕМА 16. компактности Мальцева:
Множество формул Γ – совместно $\Leftrightarrow \Gamma$ – локально совместно.

Док-во:
$(\Rightarrow)$ Γ – совместно $\Rightarrow \exists \mathfrak{A}, \gamma$: $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$. конечное $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$: $\forall \varphi \in \Gamma$ $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma] \Rightarrow \forall \varphi \in \Gamma_0$ $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma] \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma_0[\gamma] \Rightarrow \Gamma_0$ – совместно $\Rightarrow \Gamma$ – локально совместно.
$(\Leftarrow)$ Γ – локально совместно, Γ – несовместно. Если $\Gamma \nvdash$, то $\exists \mathfrak{A}, \gamma$: $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$, т.е.
(ввиду т. о $\exists$ модели)

Γ – совместно. $\Gamma \vdash \Rightarrow \exists \varphi_1,\dots,\varphi_n \in \Gamma$: $\varphi_1,\dots,\varphi_n \vdash$ – доказуема $\Gamma_0=\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\} \Rightarrow \Gamma_0 \subseteq \Gamma$,
Γ_0 – конечно $\Rightarrow \exists \mathfrak{A}, \gamma$: $\mathfrak{A} \models \Gamma_0[\gamma] \Rightarrow \varphi_1,\dots,\varphi_n \vdash$ не т.и. $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow \Gamma$ – совместно.

ТЕОРЕМА 17. Гёделя о полноте:
Любая т.и. ф-ла доказуема.

Док-во: от противного:
φ – т.и., $\vdash\varphi$ – не доказуема $\dfrac{\neg\varphi\vdash}{\vdash\varphi}$; если $\neg\varphi\vdash$ – доказуема, то $\vdash\varphi$ доказуема $\Rightarrow$
φ – доказуема $\Rightarrow \neg\varphi$ – не доказуема; $\Gamma \rightleftharpoons \{\neg\varphi\} \Rightarrow \Gamma \nvdash \Rightarrow \exists \mathfrak{A} \in K(\sigma(\varphi))$, $\gamma: FV(\varphi) \to |\mathfrak{A}|$:
$\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$, $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\gamma] \Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi[\gamma]$. – противоречие $\Rightarrow \varphi$ – доказуема.

СЛЕДСТВИЕ 18. φ – доказуема $\Leftrightarrow \varphi$ – т.и.

Док-во:
$(\Rightarrow)$ φ – доказуема $\Rightarrow \vdash\varphi$ – доказуема $\Rightarrow \vdash\varphi$ – т.и. $\Rightarrow \varphi$ – т.и. (т. о корректности).
$(\Leftarrow)$ т. о полноте.

ТЕОРЕМА 19. S – доказуемо $\Leftrightarrow S$ – т.и.

Док-во:
$(\Rightarrow)$ т. о корректности.
$(\Leftarrow)$ аналогично для теоремы для СИВ.

ТЕОРЕМА 20. Мальцева о расширении:
$\Gamma \subseteq S(\sigma)$ $\exists$ бесконечная $\mathfrak{B} \models \Gamma$, α – кардинал, тогда $\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma)$: $\mathfrak{A} \models \Gamma$, $\|\mathfrak{A}\| \geq \alpha$. Если множество предложений имеет бесконечную модель, то оно имеет сколь угодно большую модель.

Док-во:
C – множество констант, $C \cap \sigma=\varnothing$, $\|C\|=\alpha$. $\Gamma' \rightleftharpoons \{\neg(c=d) \mid c, d \in C$, c, d – различные$\}$.
$\Gamma'' \rightleftharpoons \Gamma \cup \Gamma'$. Покажем, что Γ'' – локально совместна, $\Gamma_0'' \subseteq \Gamma''$, Γ_0'' – конечна, $\Gamma_0''=\Gamma_0 \cup \Gamma_0'$;
$\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, $\Gamma_0' \subseteq \Gamma'$, Γ_0', Γ_0 – конечны, $\mathfrak{B} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{B} \models \Gamma_0$. Пусть $\sigma(\Gamma_0')=\{c_1,\dots,c_n\}$, $\mathfrak{B}$ – бесконечна $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists b_1,\dots,b_n \in B \mid \forall i \neq j$ $b_i \neq b_j$. $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}' \in K(\sigma')$, $\sigma' \rightleftharpoons \sigma \cup \{c_1,\dots,c_n\}$. $\mathfrak{B}' \upharpoonright \sigma=\mathfrak{B}$. $c_i^{\mathfrak{B}'} \rightleftharpoons b_i \Rightarrow \mathfrak{B}' \models \Gamma_0$,
$\mathfrak{B}' \models \neg(c_i,\dots,c_j)$ при $i \neq j$, $i, j \leq n \Rightarrow \mathfrak{B}' \models \Gamma_0' \Rightarrow \mathfrak{B}' \models \Gamma_0'' \Rightarrow \Gamma_0''$ – совместно $\Rightarrow \Gamma''$ – локально совместно $\Rightarrow$
$\Rightarrow \Gamma''$ – совместно. $\sigma'' \rightleftharpoons \sigma \cup C \Rightarrow \exists \mathfrak{A}'' \in K(\sigma'')$ $\mathfrak{A}'' \models \Gamma''$. $\mathfrak{A} \rightleftharpoons \mathfrak{A}'' \upharpoonright \sigma$, $\mathfrak{A}'' \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma$; $D \rightleftharpoons \{c^{\mathfrak{A}''} \mid c \in C\}$
$\forall c, d \in C$, $c \neq d \Rightarrow c^{\mathfrak{A}''} \neq d^{\mathfrak{A}''}$, т.к. $\mathfrak{A}'' \models \Gamma'$. $\|D\|=\|C\|=\alpha$. $D \subseteq A=\|\mathfrak{A}''\|$, $\|A\| \geq \alpha$, $\|\mathfrak{A}\|=A$, $\|\mathfrak{A}\| \geq \alpha$.
Вывод: мы не можем различить бесконечные мощности.

СЛЕДСТВИЕ 21. $\mathfrak{A}$ – бесконечная, α – кардинал $\exists \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$: $\|\mathfrak{B}\| \geq \alpha$.

Док-во:
$\Gamma \rightleftharpoons Th\,\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \Gamma$, $\mathfrak{A}$ – бесконечна $\Rightarrow \exists \mathfrak{B} \models \Gamma$: $\|\mathfrak{B}\| \geq \alpha \Rightarrow \mathfrak{B} \models Th\,\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 22. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models Th\,\mathfrak{A}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 23. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $\mathfrak{A}$ – конечно, тогда $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 24. $\mathfrak{N} \rightleftharpoons \langle N; \leq, +, \cdot, 0, 1\rangle$ $\exists \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ $\exists c \in \mathfrak{M}$ $\forall n \in N$ $c \geq \underbrace{1+\dots+1}_{n\text{-раз}}$
О $\exists$ нестандартной модели натуральных чисел

Док-во:
$\Gamma \rightleftharpoons Th\,\mathfrak{N}$, $\sigma \rightleftharpoons \sigma(\mathfrak{N})=\langle\leq, +, \cdot, 0, 1\rangle$, $\sigma' \rightleftharpoons \sigma \cup \{c\}$, $\forall n \in N$ $\varphi_n \rightleftharpoons (c \geq \underbrace{1+\dots+1}_{n\text{-раз}})$, $\Gamma'' \rightleftharpoons \{\varphi_n \mid n \in N\}$,
$\Gamma' \rightleftharpoons \Gamma \cup \Gamma''$. Покажем, что Γ' – локально совместно,
$\Gamma_0' \subseteq \Gamma'$, Γ_0' – конечно. $\Gamma_0 \rightleftharpoons \Gamma_0' \cap \Gamma''$, $\Gamma_0'' \rightleftharpoons \Gamma_0' \cap \Gamma''$, Γ_0'' – конечно. $\exists m=\max\{n \mid \varphi_n \in \Gamma_0''\}$. $\mathfrak{N} \models \Gamma \Rightarrow$
$\mathfrak{N} \models \Gamma_0$. $\mathfrak{N}' \in K(\sigma')$: $\mathfrak{N}' \upharpoonright \sigma=\mathfrak{N}$, $c^{\mathfrak{N}'} \rightleftharpoons m \Rightarrow \forall n \leq m$ $c^{\mathfrak{N}'} \geq \underbrace{1+\dots+1}_{n\text{-раз}} \Rightarrow \forall n \leq m$. $\mathfrak{N}' \models \varphi_n \Rightarrow \mathfrak{N}' \models \Gamma_0''$, $\mathfrak{N}' \models \Gamma_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathfrak{N}' \models \Gamma_0' \Rightarrow \Gamma_0'$ – совместно $\Rightarrow \Gamma'$ – локально совместно $\Rightarrow$ (т. компактности Мальцева) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \Gamma'$ – совместна $\Rightarrow \exists \mathfrak{M}' \models \Gamma' \Rightarrow \mathfrak{M}' \models Th\,\mathfrak{N}$ $\forall n$ $\mathfrak{M}' \models \varphi_n \Rightarrow \forall n$ $c^{\mathfrak{M}'} \geq \underbrace{1+\dots+1}_{n\text{-раз}}$, $\mathfrak{M} \rightleftharpoons \mathfrak{M}' \upharpoonright \sigma$,
$c \rightleftharpoons c^{\mathfrak{M}'} \Rightarrow \mathfrak{M} \models Th\,\mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, $c \geq \underbrace{1+\dots+1}$

ЗАМЕЧАНИЕ 25. $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, в $\mathfrak{M}$ не $\exists$ наибольшего элемента. написать, что $\exists \sup \mathfrak{N}$ – можно $\Rightarrow$ в $\mathfrak{M}$ – можно.

Док-во:

Исчисление предикатов Гильбертовского типа. Теорема о дедукции. Теорема об эквивалентности гильбертовского и секвенциального исчислений предикатов.

Опр. 1 аксиомы:

1) $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$
2) $((\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \xi)) \to (\varphi \to \xi)))$
3) $((\varphi \& \psi) \to \varphi)$
4) $((\varphi \& \psi) \to \psi)$

5) $((\varphi\to\psi)\to((\varphi\to\xi)\to(\varphi\to(\psi\&\xi))))$
6) $(\varphi\to(\varphi\vee\psi))$
7) $(\psi\to(\varphi\vee\psi))$
8) $((\varphi\to\xi)\to((\psi\to\xi)\to((\varphi\vee\psi)\to\xi)))$
9) $((\varphi\to\psi)\to((\varphi\to\neg\psi)\to\neg\varphi))$
10) $(\neg\neg\varphi\to\varphi)$
11) $(\forall x\varphi\to[\varphi]^x_t)$, где t — терм.
12) $([\varphi]^x_t\to\exists x\varphi)$, t — терм.
13) $(x=x)$
14) $((x=y)\to([\varphi]^z_x\to[\varphi]^z_y))$

правиле вывода:

1) $\dfrac{\varphi,\ \varphi\to\psi}{\psi}$ 2) $\dfrac{\psi\to\varphi}{\psi\to\forall x\varphi}$ 3) $\dfrac{\varphi\to\psi}{\exists x\varphi\to\psi}$ (2),(3) $x\notin FV(\psi)$

опр. 2 Доказательством формулы φ наз. такая последовательность формул $\varphi_1,\dots,\varphi_n=\varphi$, $\forall i\le n$ φ_i — либо аксиома, либо получена из предыдущих однократным применением правила вывода. Если $\exists$ доказательство формулы φ, то формула φ наз. доказуемой ($\rhd\varphi$).

опр. 3 Выводом φ из множества формул Γ наз. последовательность $\varphi_1,\dots,\varphi_n=\varphi$ / $\forall i\le n$ φ_i — либо аксиома, либо $\varphi_i\in\Gamma$, либо она получена из предыдущего однократным применением правила вывода. Если $\exists$ вывод φ из Γ, то говорят, что φ выводима из Γ и обозначают $\Gamma\rhd\varphi$.

опр. 4 $\dfrac{\varphi_1,\dots,\varphi_n}{\psi}$ наз. допустимым правилом вывода, если оно не увеличивает множество доказуемых формул.

предложение 5. Следующие деревья — допустимые правила вывода:
а) $\dfrac{\varphi}{\forall x\varphi}$ б) $\dfrac{[\varphi]^x_t}{\exists x\varphi}$ в) $\dfrac{[\varphi]^x_t\to\psi}{\forall x\varphi\to\psi}$ г) $\dfrac{\psi\to[\varphi]^x_t}{\psi\to\exists x\varphi}$

замечание 6. Если φ доказуема в ИВРТ, а ψ получена из φ подстановкой $\psi=[\varphi]^{P_1,\dots,P_n}_{\varphi_1,\dots,\varphi_n}$, то ψ — доказуема в ИПРТ.

теорема 7. о дедукции:
$\Gamma\cup\{\varphi\}\rhd\psi$, то $\Gamma\rhd(\varphi\to\psi)$

следствие 8. $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}\rhd\psi$, то $\rhd(\varphi_1\to(\varphi_2\to(\dots(\varphi_n\to\psi)\dots)))$

теорема 9. Γ — конечно, тогда:
а) $\Gamma\rhd\varphi\Leftrightarrow\Gamma\vdash\varphi$ — доказуема в СИП.
б) $\rhd\varphi\Leftrightarrow\vdash\varphi$ — доказуемо.

Машины Тьюринга. Правильно вычислимые функции на машинах Тьюринга. Теорема о правильной вычислимости частично-рекурсивных функций. Кодировка машин Тьюринга. Теорема о нормальной форме Клини. Эквивалентность классов вычислимых функций. Тезис Чёрча.

предложение 1. Следующие функции являются ПВТ:
а) $O(x)=0$
б) $s(x)=x+1$
в) $I^n_m(x_1,\dots,x_n)=x_m$

А — перенос нуля, $Б^+, Б^-$ — правый, левый сдвиг, Г — удвоение, R — вычитание единицы, K_n — копирование, $Ц_n$ — циклический сдвиг, Л — ликвидация, S — прибавление 1.

предложение 2. $f, g_1,\dots,g_n$ — ПВТ, тогда $f(g_1(\bar x),\dots,g_n(\bar x))$ — ПВТ.

Док-во: $\bar x=(x_1,\dots,x_m)$ МТ вычисляет суперпозицию.

$q_1 0 1^{x_1+1}0\dots 0 1^{x_m+1}0 \xRightarrow{K_m} q_{i_1} 0 1^{x_1+1}0\dots 0 1^{x_m+1} 0 1^{x_1+1}0\dots 0 1^{x_m+1}0 \xRightarrow{(Б^+)^m}$

$\xRightarrow{} 0 1^{x_1+1}0\dots 0 1^{x_m+1} q_{i_2} 0 1^{x_1+1}0\dots 0 1^{x_m+1}0 \xRightarrow{G_1}$ F, $G_1,\dots,G_n$ — МТ вычисляющие: $f, g_1,\dots,g_n$

$\Rightarrow 0 1^{x_1+1}0\dots 0 1^{x_m+1} q_{i_3} 0 1^{g_1(\bar x)+1}0\dots \xRightarrow{(Б^-)^m\circ(Ц_{m+1})^m}$

$\Rightarrow q_{i_4} 0 1^{g_1(\bar x)+1} 0 1^{x_1+1} 0\dots 0 1^{x_m+1}0 \xRightarrow{Б^+\circ K_m\circ(Б^+)^m\circ G_2\circ(Б^-)^m\circ(Ц_{m+1})^m\circ Б^+}$

$\Rightarrow 0 1^{g_1(\bar x)+1} 0 1^{g_2(\bar x)+1} q_{i_5} 0 1^{x_1+1}0\dots 0 1^{x_m+1}0 \Rightarrow\dots\Rightarrow 0 1^{g_1(\bar x)+1} 0 1^{g_2(\bar x)+1} 0 1^{g_3(\bar x)+1} 0\dots$

$\dots 0 1^{g_n(\bar x)+1} 0\dots \xRightarrow{(Б^-)^{m-1}\circ F} q_0 0 1^{f(g_1(\bar x),\dots,g_n(\bar x))+1} 0$

$(K_m\circ(Б^+)^m\circ G_1\circ(Б^-)^m\circ(Ц_{m+1})^m\circ Б^+)\circ(K_m\circ(Б^+)^m\circ G_2\circ(Б^-)^m\circ(Ц_{m+1})^m\circ Б^+)\circ\dots\circ(K_m\circ(Б^+)^m\circ G_n\circ(Б^-)^m\circ(Ц_{m+1})^m\circ(Б^-)^{m-1}\circ F)$.

предложение 3. f из g, h — оператором примитивной рекурсии, g, h — ПВТ, тогда f ПВТ.

предложение 4. $f=\mu y[g(\bar x,y)=0]$, g — ПВТ, тогда f — ПВТ

теорема 5. ЧРФ $\subseteq$ ПВТ (индукцией по построению ЧРФ).

теорема 6. основная теорема арифметики:

$\forall n\in\mathbb N\ \exists!\ n=q_1^{k_1}\dots q_m^{k_m}$, где q_i — простые $q_1<\dots<q_m$, $k_i\neq 0$.

опр. 7 Номером кортежа $(a_1,\dots,a_n)$, $a_i\in\mathbb N$ возьмём $\gamma(a_1,\dots,a_n)\leftrightharpoons 2\cdot p_1^{a_1+1}\dots p_n^{a_n+1}$, p_i — i-ое простое число.

опр. 8 B — мн-во, $\chi_B(x)=\begin{cases}1, & x\in B\\ 0, & x\notin B\end{cases}$ — характеристическая ф-ция данного мн-ва.

предложение 9. $A_1\leftrightharpoons\{\gamma(s)\mid s\subseteq\{0,1\}^n\}$, χ_{A_1} — ПРФ.

предложение 10. Следующие функции являются ПРФ:

1) $L(n,a)=\begin{cases}\gamma(a\alpha), & \alpha\in\{0,1\}^*\ \gamma(\alpha)=n,\ a\in\{0,1\}\\ 0, & \text{в противном случае}\end{cases}$

2) $R(n,a)=\begin{cases}\gamma(\alpha a), & \alpha\in\{0,1\}^*\ \gamma(\alpha)=n,\ a\in\{0,1\}\\ 0, & \text{в противном случае}\end{cases}$ — дописываем элемент справа.

3) $L(n)=\begin{cases}2, & n=2=\gamma(\varnothing)\\ \gamma(\alpha), & a\alpha\in\{0,1\}^*,\ \gamma(a\alpha)=n\\ 0, & \text{в противном случае}\end{cases}$

4) $R(n)=\begin{cases}2, & n=2=\gamma(\varnothing)\\ \gamma(\alpha), & \alpha a\in\{0,1\}^*,\ \gamma(\alpha a)=n\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$ — выкидываем последний символ.

5) $x\,y=\begin{cases}\gamma(\alpha\beta), & x=\gamma(\alpha),\ y=\gamma(\beta);\ \alpha,\beta\in\{0,1\}^*\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$

6) $H(x)=\begin{cases}a+1, & x=\gamma(a\alpha),\ a\alpha\in\{0,1\}^*\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$ — первый символ.

7) $K(x)=\begin{cases}a+1, & x=\gamma(\alpha a),\ \alpha a\in\{0,1\}^*\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$ — последний символ.

опр. 11 $\gamma(\alpha q_i j\beta)=2^2\cdot 3^i\cdot 5^j\cdot 7^{\gamma(\alpha)}\cdot 11^{\gamma(\beta)}$ — номер машинного слова, j — то что сейчас на головке. если число делится на 4, то число-код слова. не 2 — число-код.

предложение 12. $A_2\leftrightharpoons\{\gamma(S)\mid S$ — машинное слово$\}$, χ_{A_2} — ПРФ.

опр. 13 $K_{ij}: q_i j\to q_s l\Delta$, $\Delta\in\{R, L, \varnothing\}$, $\delta=\begin{cases}1, & \Delta=\varnothing\\ 2, & \Delta=R\\ 3, & \Delta=L\end{cases}$
$\gamma(K_{ij})\leftrightharpoons P_c^{\sigma}(i,j)$, $\sigma=2^s\cdot 3^l\cdot 5^{\delta}$ $P_c(i,j)$ — канторовская нумерация.
Π — программа МТ, $\gamma(\Pi)\leftrightharpoons 2^3\cdot 3^n\cdot\prod_{K_{ij}\in\Pi}(K_{ij})$, $n=\max\{i\mid q_i$ — входящ. в $\Pi\}$.
Таким образом мы перенумеровали все программы.

опр. 14 1) $t(x,y)=\begin{cases}\gamma(\alpha' q_e a\beta'), & x=\gamma(\Pi),\ y=\gamma(\alpha q_i j\beta)\quad \alpha q_i j\beta\xrightarrow[\text{1 шаг}]{\Pi}\alpha' q_e a\beta'\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$

2) $T(x,y,z,t)=\begin{cases}1, & x=\gamma(\Pi),\ y=\gamma(\alpha q_i j\beta),\ \alpha q_i j\beta\xRightarrow[\le t\text{ шагов}]{\Pi}\alpha' q_0 0 1^{z+1} 0\beta'\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$

3) $T^n(a,x_1,\dots,x_n,z,t)=\begin{cases}1, & a=\gamma(\Pi),\ q_1 0 1^{x_1+1}0\dots 0 1^{x_n+1}0\xRightarrow[\le t\text{ шагов}]{\Pi}\alpha q_0 0 1^{z+1}0\beta\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$

предложение 15. t, T, T^n — являются ПРФ.

теорема 16. Клини:
Пусть $f(\bar x)$ — ВТ, $\exists$ ПРФ $g(\bar x,y)$: $f(\bar x)=l(\mu y[g(\bar x,y)=0])$, l — левая координата в канторовской нумерации.

Док-во:
$f(\bar x)$ — ВТ $a\leftrightharpoons\gamma(\Pi)$ если программа вычислима, то $\exists$ программа вычисляющая её.
$g(\bar x,y)=|T^n(a,\bar x,l(y),r(y))-1|$, т.к. T^n — ПРФ, то $g(\bar x,y)$ — ПРФ.
1) Пусть если $\bar x\mid f(\bar x)$ — не останавливается, т.е. начиная со слова $q_1 0 1^{x_1+1}0\dots 0 1^{x_n+1}0$ Π не останавливается.
начинаем вычислять $\forall z,t$ $T^n(a,\bar x,z,t)=0\Rightarrow\forall y\ T^n(a,\bar x,l(y),r(y))=0\Rightarrow\forall y\ g(\bar x,y)=1\neq 0$ — $f(\bar x)$ не опр.
ч.т.д.
2) $f(\bar x)\overset{\text{определена}}{=}z$; $q_1 0 1^{x_1+1}0\dots 0 1^{x_n+1}0\xRightarrow[\text{за } t\text{ шагов}]{\Pi}\alpha q_0 0 1^{z+1}0\beta$
$T^n(a,\bar x,z,t)=1$ $[\forall z_1,t_1\mid T^n(a,\bar x,z_1,t_1)=1\Rightarrow z_1=z,\ t_1\ge t]$. $y_0\leftrightharpoons c(z,t)$
$g(\bar x,y_0)=0$ если $\exists y'\mid g(\bar x,y')=0$, $y'=c(z_1,t_1)\mid T^n(a,x,z_1,t_1)=1$ $z_1=z$, $t_1\ge t\Rightarrow y\le y'$
$y'=c(z_1,t_1)=c(z,t_1)\ge c(z,t)=y_0\Rightarrow y_0$ — min
ввиду канторовской нумерации

DATE

$\mu y\,[g(\bar{x}, y) = 0] = y_0 \quad l(\mu y\,[g(\bar{x}, y) = 0]) = z = f(\bar{x})$ – ч.т.д.

Следствие 17. ВТ $\subseteq$ ЧРФ

Следствие 18. Если f – ЧРФ, то $\exists g$ – ПРФ $f(\bar{x}) = l(\mu y[g(\bar{x}, y) = 0])$

Док-во: Если f – ЧРФ, то она ПВТ $\Rightarrow f$ – ВТ $\Rightarrow$ Требуемое.

Следствие 19. ЧРФ = ВТ = ПВТ. (основная теорема о вычислимых функциях)

Док-во:

ЧРФ $\subseteq$ ПВТ, ПВТ $\subseteq$ ВТ, ВТ $\subseteq$ ЧРФ.

Следствие 20. ОРФ = всюду вычислимые ВТ (всюду определена) = всюду определённая ПВТ.

Тезис Черча.

Каждая интуитивно (т.е. если вы как-то можете формализованно записать функцию) вычислимая функция является ЧРФ и обратно.

Универсальные рекурсивные функции. Несуществование универсальной примитивно рекурсивной функции и универсальной общерекурсивной функции, существование универсальной частично рекурсивной функции.

Опр.1 K – мн-во (частичные) $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, тогда $f(x_0, \dots, x_n)$ наз. универсальной для класса K, если:

а) $\forall m \in \mathbb{N}$ $f(m, x_1, \dots, x_n) \in K$

б) $\forall g(x_1, \dots, x_n) \in K$ $\exists m \in \mathbb{N}$ $f(m, \bar{x}) = g(\bar{x})$. $K = \{f(m, x_1, \dots, x_n) \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Замечание 2. Класс K имеет универсальную функцию $\Leftrightarrow$ когда он счётен или конечен, т.е. имеется отображение "на" такое: $\lambda x_0 f(x_0, x_1, \dots, x_n) : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} K$

$(\Rightarrow)$ $m \in \mathbb{N} \xrightarrow{\lambda x_0 f(x_0, \bar{x})} f(m, x_1, \dots, x_n) \in K \Rightarrow \|K\| \leq \|\mathbb{N}\| \Rightarrow K$ – конечно или счётно.

$(\Leftarrow)$ K – конечно или счётно, то $\exists$ универсальная функция.

Следствие 3. Если класс K – континуален, то K не имеет универсальной функции.

Следствие 4. Класс всех $\{f$ (частичных) $: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}\}$ $\leq k^n$ не имеет универсальной ф-ции.

Следствие 5. ПРФ, ОРФ, ЧРФ имеют универсальную ф-цию.

Док-во:

ПРФ $\subseteq$ ОРФ $\subseteq$ ЧРФ. ПРФ $\subseteq$ ЧРФ $\Rightarrow$ $\|$ПРФ$\| \leq \|$ЧРФ$\|$, ЧРФ = ПВТ – счётно, т.к. A – счётно, $A^* \rightleftharpoons \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A, n \in \mathbb{N}\}$ – счётно $\Rightarrow$ ПРФ, ОРФ, ЧРФ – счётно $\Rightarrow \exists$ универсальные ф-ции.

Замечание 6. Пусть $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – взаимно однозначное, $f(x_0, \bar{x})$ – универсальная для K, тогда $g(x_0, \bar{x}) \rightleftharpoons f(h(x_0), \bar{x})$ – универсальная для K.

Док-во:

$\lambda x_0 g(x_0, \bar{x}) = h \circ \lambda x_0 f(x_0, \bar{x})$, $\mathbb{N} \xrightarrow{h} \mathbb{N} \xrightarrow{f} K$

Следствие 7. а) если K – счётно, то K имеет континуум различных универсальных ф-ций.

б) ПРФ, ЧРФ, ОРФ – имеют континуум универсальных функций.

Теорема 8. а) $\neg\exists$ ПРФ – универсальной для ПРФ^n.

б) $\neg\exists$ ОРФ – универсальной для ОРФ^n.

в) $\neg\exists$ ЧРФ – универсальной для ОРФ^n.

Док-во:

а) от противного: $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ – унив. ПРФ^n, метод диагонализации: $g(x_1, \dots, x_n) \rightleftharpoons f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_n) + 1$ – это ПРФ $\xRightarrow{g\text{ – универсальная}} \exists m \in \mathbb{N}\, f(m, \bar{x}) = g(\bar{x}) \Rightarrow f(m, m, \dots, m) = g(m, \dots, m) = f(m, m, \dots, m) + 1 \Rightarrow$ противоречие

определены, определена

б) аналогично.

в) f – ЧРФ, f – унив. для ОРФ^n, тогда рассмотрим набор $(k_0, k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$, $f(k_0, x_1, \dots, x_n) \in$ ОРФ$^n \Rightarrow f(k_0, k_1, \dots, k_n)$ – определена $\Rightarrow f$ – ОРФ $\Rightarrow$ из (б).

Теорема 9. ЧРФ^n имеет унив. ЧРФ.

Док-во:

K = ЧРФ^n, $f(x_0, \dots, x_n) \rightleftharpoons l(\mu y[\,|T^n(x_0, \dots, x_n, l(y), r(y)) - 1| = 0])$

а) $m \in \mathbb{N}$ $f(m, x_1, \dots, x_n)$ – ЧРФ $\Rightarrow f(m, \bar{x}) \in K$

б) $g(x_1, \dots, x_n) \in K$ – ЧРФ $\Rightarrow$ ПВТ, $\exists \Pi$ – вычисляющая g, $m \rightleftharpoons \gamma(\Pi)$.

1) если $g(k_1, \dots, k_n)$ – не определена, то Π не останавливается, т.е. $T^n(\dots) \neq 1 \Rightarrow f(m, k_1, \dots, k_n)$ – не определена.

2) $g(k_1, \dots, k_n) = a$ – определена $\Rightarrow \Pi$ за t шагов вычисляет $g(k_1, \dots, k_n) \Rightarrow T^n(m, k_1, \dots, k_n, a, t) = 1$, $y \rightleftharpoons c(a, t) \Rightarrow y - \min\{z \mid |T^n(m, \bar{k}, l(z), r(z)) - 1| = 0\} \Rightarrow f(m, \bar{k}) = l(y) = a$, $f(m, \bar{k}) = g(\bar{k}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ – унив. для ЧРФ^n.

Опр.10 Обозначим $\varphi^2(x_0, x_1) \rightleftharpoons l(\mu y[(|T^1(x_0, x_1, l(y), r(y)) - 1| = 0)])$.

Следствие 11. $\varphi^2(x_0, x_1)$ – ЧРФ, унив ЧРФ^1.

Опр.12 $\varphi^{n+1}(x_0, \dots, x_n) \rightleftharpoons \varphi^2(x_0, c^n(x_1, \dots, x_n))$.

Предложение 13. φ^{n+1} – унив. для ЧРФ^n.

Док-во: $n > 1$.

а) $m \in \mathbb{N}$ $\varphi^{n+1}(m, \bar{x}) = \varphi^2(m, c^n(\bar{x}))$ – ЧРФ $\in$ ЧРФ^n.

б) $g(x_1, \dots, x_n)$ – ЧРФ, $h(x) \rightleftharpoons g(c_1^n(x), \dots, c_n^n(x))$ – ЧРФ $\Rightarrow \exists m: \varphi^2(m, x) = h(x)$

$\varphi^{n+1}(m, x_1, \dots, x_n) = \varphi^2(m, c^n(x_1, \dots, x_n)) = h(c^n(x_1, \dots, x_n)) = g(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \varphi^{n+1}$ – для ЧРФ^n.

Опр.20 Клиниевские скобки.

$[x, y] \rightleftharpoons c(l(x), c(r(x), y))$

$[x_1, \dots, x_n] \rightleftharpoons [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n]$

$[k]_{21} \rightleftharpoons c(l(k), l(r(k)))$

$[k]_{22} \rightleftharpoons r(r(k))$

$[k]_{n1} \rightleftharpoons [[k]_{21}]_{n-1,1}$

$\vdots$

$[k]_{n,n-1} \rightleftharpoons [[k]_{21}]_{n-1,n-1}$

$[k]_{n,n} \rightleftharpoons [k]_{2,2}$

Предложение 21. Все функции из определения 20 – ПРФ.

Предложение 22. а) $[[x_1, \dots, x_n]]_{nl} = x_l$

б) $[[k]_{n1}, \dots, [k]_{nn}] = k$

в) $[\ ]: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ – взаимно однозначное.

Предложение 23. а) $[c(x_0, x_1), x_2] = c(x_0, c(x_1, x_2))$

б) $c^n(c(x_1, x_2), x_3, \dots, x_{n+1}) = c^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})$

в) $[x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_m], \dots, x_n]$, $m < n$.

Опр.24 Клиниевская универсальная ф-ция:

$k^2(x_0, x_1) \rightleftharpoons \varphi^2(l(x_0), c(r(x_0), x_1))$

$k^{n+1}(x_0, \dots, x_n) \rightleftharpoons k^n([x_0, x_1], x_2, \dots, x_n)$

Предложение 25. $k^n(c(x_0, x_1), x_2, \dots, x_n) = \varphi^{n+1}(x_0, \dots, x_n)$

Док-во:

$l([a_0, \dots, a_n]) = l([[a_0, \dots, a_{n-1}], a_n]) = l([a_0, \dots, a_{n-1}]) = \dots = l(a_0)$

$r([a_0, \dots, a_n]) = r([[a_0, \dots, a_{n-1}], a_n]) = c(r([a_0, \dots, a_{n-1}]), a_n) = \dots = c(c(\dots c(r(a_0), a_1), a_2 \dots), a_n) = c^{n+1}(r(a_0), a_1, \dots, a_n)$; $k^n(c(x_0, x_1), x_2, \dots, x_n) = k^2([[[c(x_0, x_1), x_2], \dots], x_n]) =$

$= \varphi^2(l([\dots[c(x_0, x_1), x_2], \dots, x_{n-1}]), c(r([\dots[c(x_0, x_1), x_2], \dots, x_{n-1}]), x_n)) =$

$= \varphi^2(l(c(x_0, x_1)), c(c^{n-1}(r(c(x_0, x_1)), x_2, \dots, x_{n-1}), x_n)) = \varphi^2(x_0, c(c^{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_n)) =$

$= \varphi^2(x_0, c^n(x_1, \dots, x_n)) = \varphi^{n+1}(x_0, \dots, x_n)$

Теорема 26. k^{n+1} – ЧРФ, унив. для ЧРФ^n.

а) k^{n+1} – ЧРФ $\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}\, k^{n+1}(m, x_1, \dots, x_n) \in$ ЧРФ^n.

б) $g(x_1, \dots, x_n) \in$ ЧРФ^n $f(y, x_1, \dots, x_n) \rightleftharpoons g(\bar{x}) = g(\bar{x}) + 0 \cdot y$;

$f(y, \bar{x}) \in$ ЧРФ$^{n+1} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{N}$ $\varphi^{n+2}(a, y, \bar{x}) = f(y, \bar{x})$; $k^{n+1}(c(a, y), x_1, \dots, x_n) = \varphi^{n+2}(a, y, \bar{x}) = f(y, \bar{x}) = g(\bar{x}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall k$ $m_k \rightleftharpoons c(a, k)$ $k^{n+1}(m_k, \bar{x}) = g(\bar{x})$. $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ $k^{n+1}(m_0, \bar{x}) = g(\bar{x}) \Rightarrow$ (б).

Следствие 27. $\forall g \in$ ЧРФ^n $\exists$ бесконечно много клиниевских номеров этой ф-ции m_k, $g(\bar{x}) = k^{n+1}(m_k, \bar{x})$.

Теорема 28. s-m-n – теорема:

$\forall m, n$ $\exists$ ПРФ $S_m^n(x_0, \dots, x_n) \mid k^{n+m+1}(x_0, \dots, x_{n+m}) = k^{m+1}(S_m^n(x_0, \dots, x_n), x_{n+1}, \dots, x_{m+n})$.

Док-во:

$S_m^n(x_0, \dots, x_n) \rightleftharpoons [x_0, \dots, x_n]$, $k^{n+m+1}(x_0, \dots, x_{n+m}) = k^{n+m}([x_0, x_1], \dots, x_{n+m}) =$

$= k^{n+m-1}([[x_0, x_1], x_2], \dots, x_{n+m}) = \dots = k^{m+1}([\dots[x_0, x_1], x_2] \dots x_n], x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = k^{m+1}([x_0, \dots, x_n], x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$.

Теорема 29. О неподвижной точке:

$\forall$ ЧРФ $h(x_1,\dots,x_{n+1})$ $\exists$ ПРФ $g(x_1,\dots,x_n) \mid k^2(h(x_1,\dots,x_n,g(x_1,\dots,x_n)),y) = k^2(g(x_1,\dots,x_n),y)$.

Док-во:

$k^2(h(x_1,\dots,x_n,[z,z,x_1,\dots,x_n]),y)$ – ЧРФ $\Rightarrow \exists a\in\mathbb{N} \mid k^2(\dots) = k^{n+3}(a,z,x_1,\dots,x_n,y)$

$g(x_1,\dots,x_n) \rightleftharpoons [a,a,x_1,\dots,x_n]$ – ПРФ, тогда $k^2(h(x_1,\dots,x_n,[a,a,x_1,\dots,x_n]),y) = k^{n+3}(a,a,x_1,\dots,x_n,y) =$
$= k^2([a,a,x_1,\dots,x_n],y) = k^2(g(\bar{x}),y) = k^2(h(\bar{x},g(\bar{x})),y)$.

Опр. 30 Обозначим через $\varkappa(n) \rightleftharpoons k^2(n,x)$. $\varkappa: \mathbb{N} \to$ ЧРФ^1 – клиниевская нумерация одноместных ЧРФ.

Следствие 31. $\forall$ ЧРФ h $\exists a\in\mathbb{N}$ $\varkappa(h(a)) = \varkappa(a)$. $\varkappa(n) \to \varkappa(h(n))$. ЧРФ$^1 \to$ ЧРФ^1, при такой перестановке $\exists$ ЧРФ $\ni$ ф-ция, которая всегда будет оставаться на месте.

Теорема 32. Т. Райса:

$A \subseteq$ ЧРФ^1, $A \neq \varnothing$, $A \neq$ ЧРФ^1, $B \rightleftharpoons \{n \mid \varkappa(n)\in A\}$ – не рекурсивно, т.е. $\chi_B(x) \rightleftharpoons \begin{cases} 0, & x\notin B \\ 1, & x\in B \end{cases}$ – не ЧРФ.

Док-во:

от противного:

χ_B – ЧРФ, A – не пусто $\Rightarrow B \neq \varnothing \Rightarrow \exists a\in B$, $A \neq$ ЧРФ$^1 \Rightarrow B \neq \mathbb{N} \Rightarrow \exists b \notin B$ $f(x) \rightleftharpoons b\cdot\chi_B(x) + a\cdot\overline{sg}\,\chi_B(x)$

по Т. о неподвижной точке $\exists n \mid \varkappa(n) = \varkappa(f(n))$. $\varkappa(n)\in A$?

1) $\varkappa(n)\in A \Rightarrow n\in B \Rightarrow f(n) = b\notin B \Rightarrow \varkappa(f(n))\notin A \Rightarrow \varkappa(n) = \varkappa(f(n))\notin A$ – противоречие.

2) $\varkappa(n)\notin A \Rightarrow n\notin B \Rightarrow f(n) = a\in B \Rightarrow \varkappa(f(n))\in A \Rightarrow \varkappa(n) = \varkappa(f(n))\in A$ – противоречие.

$\Rightarrow \chi_B$ – не ЧРФ. Никакое свойство программ не распознаваемо по её тексту алгоритмически.

Рекурсивные и рекурсивно-перечислимые множества. Операции над рекурсивными и рекурсивно-перечислимыми множествами. Теорема Поста. Теорема о проекции. Теорема об эквивалентных определениях рекурсивно-перечислимых множеств. Теорема о графике. Существование рекурсивно-перечислимого, но не рекурсивного множества. Неразрешимость проблемы остановки программы.

Опр. 1 $A \subseteq \mathbb{N}^k$ – рекурсивно (примитивно рекурсивно), если $\chi_A(x) \rightleftharpoons \begin{cases} 1, & x\in A \\ 0, & x\notin A \end{cases}$ – ОРФ (ПРФ).

Опр. 2 $A \subseteq \mathbb{N}^k$ – рекурсивно перечислимо, если $A = \varnothing$ либо $\exists$ ОРФ $f_1,\dots,f_k$: $A = \{(f_1(n),\dots,f_k(n)) \mid n\in\mathbb{N}\}$.

В частности: $A\subseteq\mathbb{N}$, $\exists f$ – ОРФ $\mid A = \rho f \rightleftharpoons \{f(n) \mid n\in\mathbb{N}\}$.

Замечание 3. $A\subseteq\mathbb{N}^k$, χ_A – ОРФ $\Leftrightarrow \chi_A$ – ЧРФ.

Предложение 4. $A,B\subseteq\mathbb{N}^k$, $C\subseteq\mathbb{N}^l$, A,B,C – рек. (прим. р.), тогда $A\cup B$, $A\cap B$, $\bar{A} \rightleftharpoons \mathbb{N}^k\setminus A$, $A\setminus B$, $A\times C$ – рек. (прим. р.).

Док-во:

χ_A, χ_B, χ_C – ОРФ (ПРФ), тогда:

$\chi_{(A\cup B)}(\bar{x}) = sg(\chi_A(\bar{x}) + \chi_B(\bar{x}))$ – ОРФ (ПРФ), $\chi_{(A\cap B)}(\bar{x}) = \chi_A(\bar{x})\cdot\chi_B(\bar{x})$ – ОРФ (ПРФ), $\chi_{\bar{A}}(\bar{x}) = \overline{sg}\,\chi_A(\bar{x})$ – ОРФ (ПРФ),

$\chi_{(A\setminus B)}(\bar{x}) = \chi_A(\bar{x})\cdot\overline{sg}\,\chi_B(\bar{x})$ – ОРФ (ПРФ), $\chi_{(A\times C)}(\bar{x},\bar{y}) = \chi_A(\bar{x})\cdot\chi_C(\bar{y})$ – ОРФ (ПРФ).

Следствие 5. $\mathfrak{A} \rightleftharpoons \langle \{A\subseteq\mathbb{N}^k \mid A$ – рек. (прим. р.)$\}, \cup, \cap, ^-, \varnothing, \mathbb{N}^k \rangle$ – булева алгебра, атомная, $\mathfrak{A}$(ПРМ) – подалгебра для $\mathfrak{A}$(РМ), они подалгебры $P(\mathbb{N}^k)$, они счётны.

Замечание 6. ПРМ $\subseteq$ РМ.

Предложение 7. $A\subseteq\mathbb{N}^k$, $B = \{c^k(\bar{x}) \mid \bar{x}\in A\} \subseteq\mathbb{N}$, A – РМ (ПРМ) $\Leftrightarrow B$ – РМ (ПРМ).

($\Rightarrow$) A – рекур. (ПРМ) $\Rightarrow \chi_A$ – ОРФ (ПРФ) $\chi_B(y) = \chi_A(c_1^k(y),\dots,c_k^k(y))$ – ОРФ (ПРФ) $\Rightarrow B$ – РМ (ПРМ).

($\Leftarrow$) B – рекур. (ПРМ) $\Rightarrow \chi_B$ – ОРФ (ПРФ) $\chi_A(\bar{x}) = \chi_B(c^k(\bar{x})) \Rightarrow \chi_A$ – ОРФ (ПРФ) $\Rightarrow A$ – РМ (ПРМ).

Опр. 8 Множество наз. разрешимым, если $\exists$ алгоритм ответа на вопрос: является ли данный объект его элементом или нет. Мн-во наз. перечислимым, если $\exists$ алгоритм перечисления всех его элементов.

Предложение 9. Любое разрешимое мн-во является рекурсивно перечислимым, т.е. $A\subseteq\mathbb{N}^k$, A – Р.М. $\Rightarrow A$ – Р.П.М.

Док-во:

1) $A = \varnothing \Rightarrow A$ – Р.П.М.; 2) $A \neq \varnothing \Rightarrow \exists (a_1,\dots,a_k)\in A$, χ_A – ОРФ, $f_1,\dots,f_k$: $f_i(n) \rightleftharpoons c_i^k(n)\cdot\chi_A(c_1^k(n),\dots,c_k^k(n)) + a_i \times$
$\times \overline{sg}\,\chi_A(c_1^k(n),\dots,c_k^k(n))$. $A = \{(f_1(n),\dots,f_k(n)) \mid n\in\mathbb{N}\}$.

Теорема 10. Т. Поста:

A – разр. мн-во $\Leftrightarrow A, \bar{A}$ – Р.П.М.

Док-во:

($\Rightarrow$) A – Р.М. $\Rightarrow \bar{A}$ – Р.М. $\Rightarrow A, \bar{A}$ – Р.П.М.

($\Leftarrow$) 1) $A = \varnothing \Rightarrow A$ – Р.М.; 2) $\bar{A} = \varnothing \Rightarrow A$ – Р.М.; 3) $\exists f_1,\dots,f_k, g_1,\dots,g_k$ – ОРФ, $A = \{(f_1(n),\dots,f_k(n)) \mid n\in\mathbb{N}\}$,
$\bar{A} = \{(g_1(n),\dots,g_k(n)) \mid n\in\mathbb{N}\}$. $\chi_A(x_1,\dots,x_k) = \overline{sg}\left(\sum_{j=1}^{k}\left| f_j\left(\mu y\left[\left(\sum_{i=1}^{k}|f_i(y)-x_i|\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}|g_i(y)-x_i|\right)=0\right]\right) - x_j\right|\right)$ –
– ОРФ $\Rightarrow A$ – Р.М.

Предложение 11. $A,B\subseteq\mathbb{N}^k$, $C\subseteq\mathbb{N}^l$, A,B,C – Р.П.М., тогда $(A\cup B)$, $(A\cap B)$, $(A\times C)$ – Р.П.М.

Док-во:

Теорема 12. Об эквивалентных определениях Р.П.М.

$A\subseteq\mathbb{N}$, тогда:

1) A – Р.П.М.
2) $\exists$ ЧРФ $f \mid A = \rho f$.
3) $A = \varnothing$ либо $\exists$ ПРФ $f \mid A = \rho f$.
4) $\exists$ П.Р.М. $B\subseteq\mathbb{N}^2 \mid A = \{x \mid \exists y\ (x,y)\in B\}$.
5) $\exists$ Р.М. $B\subseteq\mathbb{N}^2 \mid A = \{x \mid \exists y\ (x,y)\in B\}$.
6) $\exists$ ЧРФ $f \mid A = \delta f \rightleftharpoons \{x \mid f(x)$ – определена$\}$.

Док-во:

$(1\to 2)$ 1) $A = \varnothing$ $w(x) \rightleftharpoons \mu y(y+1=0)$, $A = \varnothing = \rho w$; 2) $A = \rho f$, f – ОРФ $\Rightarrow f$ – ЧРФ.

$(2\to 3)$ $A = \rho f$, f – ЧРФ, пусть $A\neq\varnothing$ $\exists a\in A$ g – ЧРФ $\exists$ ПРФ h: $g(z) = l(\mu y[h(z,y)=0])$
$x = c(y,z)$, $t(x) \rightleftharpoons \overline{sg}\,h(r(x),l(x))\cdot(sg \prod_{i=0}^{l(x)-1} h(r(x),i))$ – ПРФ, $f(x) \rightleftharpoons l(l(x))\cdot t(x) + a\cdot\overline{sg}(t(x))$ – ПРФ,

покажем, что $A = \rho f$:

1) $A \supseteq \rho f$. $b \rightleftharpoons f(n)$, покажем, что $b \in A$.

$t(n)=0$ $\quad b = a \in A$.

$t(n)=1$ $\quad y \rightleftharpoons l(n),\ z \rightleftharpoons r(n)$, y - минимален $\quad h(z,y)=0,\ g(z) = l(y) = l(l(n)) = f(n) \in A \ \mapsto\ \rho f \subseteq A$.

2) $A \subseteq \rho f$. $\quad b \in A \Rightarrow \exists z \in \mathbb{N}: g(z) = b = l(\mu y[h(z,y)=0]) \mapsto \exists y\ \forall p<y\ \ h(z,p) \neq 0,\ h(z,y)=0$.

$n \rightleftharpoons c(y,z) \Rightarrow t(n)=1 \Rightarrow f(n) = l(l(n)) = l(y) = b. \Rightarrow A \subseteq \rho f \ \mapsto\ A = \rho f$.

$(3 \to 4)$ $\quad A = \varnothing$ либо $A = \rho f$, f - ПРФ

$A = \varnothing$, $B \rightleftharpoons \varnothing \in \mathbb{N}^2$. $A = \{x \mid \exists y (x,y) \in \varnothing\}$

$A = \rho f, f$ - ПРФ. $B \rightleftharpoons \{(x,y) \mid f(y) = x\}$. $\chi_B(x,y) = \overline{sg}|f(y) - x|$ - ПРФ $\Rightarrow B$ - ПРМ. $A = \rho f = \{x \mid \exists y\ f(y) = x\} =$

$= \{x \mid \exists y\ (x,y) \in B\}$.

$(4 \to 5)$ $\quad A = \{x \mid \exists y\ (x,y) \in B\}$, B - ПРМ $\Rightarrow B$ - РМ.

$(5 \to 6)$ $\quad A = \{x \mid \exists y\ \ (x,y) \in B\}$, B - РМ.

$\exists f$ - ЧРФ: $A = \delta f$, $f \rightleftharpoons \mu y\,[\overline{sg}(\chi_B(x,y)) = 0]$, $x \in A \Leftrightarrow \exists y\ (x,y) \in B \Leftrightarrow \exists y: \chi_B(x,y) = 1 \Leftrightarrow \exists y: \overline{sg}\ \chi_B(x,y) = 0$

$\Leftrightarrow f(x)$ - определена $\Leftrightarrow x \in \delta f \ \mapsto\ A = \delta f$.

$(6 \to 2)$ $\quad A = \delta g$, g - ЧРФ, $f(x) \rightleftharpoons x + 0(g(x))$ - ЧРФ $\quad x \in A \Leftrightarrow x \in \delta g \Leftrightarrow g$ - определена $\Leftrightarrow f$ - определена $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x \in \rho f \ \mapsto\ A = \rho f$.

$(3 \to 1)$ $\quad A = \varnothing$ либо $A = \rho f$, f - ПРФ $\mapsto f$ - ОРФ $\Rightarrow A$ - РПМ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. $A \subseteq \mathbb{N}^k$ $\quad B = \{c^k(\bar{x}) \mid \bar{x} \in A\}$ $\quad A$ - РПМ $\Leftrightarrow B$ - РПМ.

СЛЕДСТВИЕ 14. $A \in \mathbb{N}^k$, A - РПМ $\Leftrightarrow \exists f$ - ЧРФ: $A = \delta f$.

Док-во: $\quad B = \{c^k(\bar{x}) \mid \bar{x} \in A\}$.

$(\Rightarrow)$ $\quad A$ - РПМ $\Rightarrow B$ - РПМ $\Rightarrow \exists h$ - ЧРФ $\mid B = \delta h$, $f(\bar{x}) \rightleftharpoons h(c^k(\bar{x}))$ - ЧРФ, $\bar{x} \in A \Leftrightarrow c^k(\bar{x}) \in B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c^k(\bar{x}) \in \delta h \Leftrightarrow h(c^k(\bar{x}))$ - определено $\Leftrightarrow f(\bar{x})$ - определено $\Leftrightarrow \bar{x} \in \delta f \ \mapsto\ A = \delta f$.

$(\Leftarrow)$ $\quad A = \delta f$, f - ЧРФ $\quad h(n) \rightleftharpoons f(c_1^k(n), \ldots, c_k^k(n)) \Rightarrow h$ - ЧРФ $\quad n \in B \Leftrightarrow (c_1^k(n), \ldots, c_k^k(n)) \in A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(c_1^k(n), \ldots, c_k^k(n))$ - определена $\Leftrightarrow n \in \delta h \mapsto B = \delta h \Rightarrow B$ - РПМ.

ТЕОРЕМА 15. $\quad k \in \mathbb{N}$, $\exists A \subseteq \mathbb{N}^k$: A - РПМ, A - не рекурсивна.

Док-во:

$k=1$: $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \rightleftharpoons \{c(x,y) \mid k^2(x,y)$ - определена$\}$ $\quad k^2(x,y)$ - ЧРФ $\Rightarrow \delta k^2$ - РПМ.

$A = \{c(x,y) \mid (x,y) \in \delta k^2\} \Rightarrow A$ - РПМ. От противного: пусть A - РМ $\Rightarrow \chi_A$ - ОРФ.

$\exists a$ $\quad k^2(a,x) = 0(x)$ $\quad \forall x\ k^2(a,x) = 0$ $\quad g(x,y) \rightleftharpoons k^2(x \cdot \chi_A(c(x,y)) + a \cdot \overline{sg}\,\chi_A(c(x,y)), y \cdot \chi_A(c(x,y)))$ - ЧРФ

это ОРФ, т.к. $x, y \in \mathbb{N}$:

1) $k^2(x,y)$ - определена $\Rightarrow c(x,y) \in A \Rightarrow \chi_A(c(x,y)) = 1 \Rightarrow g(x,y) = k^2(x,y)$ - определена.

2) $k^2(x,y)$ - не определена $\Rightarrow c(x,y) \notin A \Rightarrow \chi_A(c(x,y)) = 0 \Rightarrow g(x,y) = k^2(a,0) = 0$ - определена $\Rightarrow$

$\forall x, y$ $\quad g(x,y)$ - определена $\Rightarrow g$ - ОРФ^2.

а) $\forall n$ $\quad g(n,x)$ - ОРФ^1 $\Rightarrow g(n,x) \in$ ОРФ^1.

б) $h(x) \in$ ОРФ^1 $\Rightarrow \exists n \mid k^2(n,x) = h(x) \Rightarrow \forall x$ $\quad k^2(n,x)$ - определена $\Rightarrow \forall g(n,x) = k^2(n,x) - h(x)$.

$\mapsto$ противоречие $\mapsto A$ - не Р.М.

$k>1$: $\quad C \rightleftharpoons \{c_1^k(n), \ldots, c_k^k(n) \mid n \in A\}$, A - РПМ $\Rightarrow C$ - РПМ, если C - РМ, то A - РМ $\Rightarrow C$ - не Р.М.

ЗАМЕЧАНИЕ 16. $\quad A \rightleftharpoons \delta k^{l}(x_1, \ldots, x_l)$ - РПМ, но не РМ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. $\quad A \subseteq \mathbb{N}^k$ - эквивалентно:

1) A - РПМ.
2) $A = \delta f$, f - ЧРФ.
3) $\exists B$ - ПРМ, $A = \{\bar{x} \mid \exists y\ (\bar{x}, y) \in B\}$, $B \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$.
4) $\exists B$ - РМ, $B \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$, $A = \{\bar{x} \mid \exists y\ (\bar{x}, y) \in B\}$.

Док-во:

$(1 \to 3)$ $\quad A$ - РПМ, $C \rightleftharpoons \{c(\bar{x}) \mid \bar{x} \in A\} \Rightarrow C$ - РПМ $\Rightarrow \exists D$ - ПРМ, $D \subseteq \mathbb{N}^2$ $\quad C = \{n \mid \exists y\ (n,y) \in D\}$.

$B \rightleftharpoons \{(\bar{x}, y) \mid (c^k(\bar{x}), y) \in D\}$, $\chi_B(\bar{x}, y) = \chi_D(c^k(\bar{x}), y)$ - ПРФ $\Rightarrow B$ - ПРМ.

$\bar{x} \in A \Leftrightarrow c^k(\bar{x}) \in C \Leftrightarrow \exists y\ (c^k(\bar{x}), y) \in D \Leftrightarrow \exists y\ \ (\bar{x}, y) \in B \ \mapsto\ A = \{\bar{x} \mid \exists y (\bar{x}, y) \in B\}$.

DATE

ТЕОРЕМА 18. $\quad$ Функция f - ЧРФ $\Leftrightarrow G_f \rightleftharpoons \{(\bar{x}, y) \mid f(\bar{x}) = y\}$ - РПМ.

Док-во:

$(\Rightarrow)$ $\quad f$ - ЧРФ, $g(\bar{x}, y) \rightleftharpoons \mu y_1(|f(\bar{x}) - y_1| = 0)$ - ЧРФ $\quad (\bar{x}, y) \in \delta g \Leftrightarrow |f(\bar{x}) - y| = 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) = y \Leftrightarrow (\bar{x}, y) \in G_f \mapsto$

$\mapsto G_f = \delta g \mapsto G_f$ - РПМ.

$(\Leftarrow)$ $\quad \exists$ р.м. A: $G_f = \{(\bar{x}, y) \mid \exists z\ (\bar{x}, y, z) \in A\}$ $\quad f(\bar{x}) \overset{?}{=} l(\mu t[\overline{sg}\ \chi_A(\bar{x}, l(t), r(t)) = 0])$ - ЧРФ

1) $f(\bar{x})$ - определена $\Rightarrow \exists y\ f(\bar{x}) = y \Rightarrow (\bar{x}, y) \in G_f \Rightarrow \exists z\ \ (\bar{x}, y, z) \in A \Rightarrow \exists t = c(y,z): (\bar{x}, l(t), r(t)) \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{sg}\ \chi_A(\bar{x}, l(t), r(t)) = 0$, t - min $\ \overline{sg}\ \chi_A(\bar{x}, l(t), r(t)) = 0 \Rightarrow (\bar{x}, l(t), r(t)) \in A \Rightarrow (\bar{x}, l(t)) \in G_f \Rightarrow f(\bar{x}) = l(t)$.

2) f - не определена $\Rightarrow$ если $\overline{sg}\ \chi_A(\bar{x}, l(t), r(t)) = 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = l(t)$ - не возможно $\Rightarrow \neg\exists t \Rightarrow$

$\Rightarrow$ правая часть не определена.

ТЕОРЕМА 19. $\quad A$ - РПМ $\Leftrightarrow \chi_A^*$ - ЧРФ.

Док-во:

$(\Rightarrow)$ $\quad A$ - РПМ $\quad \exists f$ - ЧРФ: $A = \delta f$, тогда $\chi_A^*(\bar{x}) = S(0(f(\bar{x})))$ - ЧРФ $\quad \chi_A^*(\bar{x}) = 1 \Leftrightarrow \bar{x} \in A = \delta f \Leftrightarrow f(\bar{x})$ - опред.

$(\Leftarrow)$ $\quad \chi_A^*$ - ЧРФ, тогда $A = \delta \chi_A^* \Rightarrow A$ - РПМ.

ТЕОРЕМА 20. $\quad$ О составном определении.

$A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{N}^k$, $\quad A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $\ A_1, \ldots, A_n$ - РПМ, $g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_k)$ - ЧРФ,

$$f(x_1, \ldots, x_k) \rightleftharpoons \begin{cases} g_1(\bar{x}), & \bar{x} \in A_1 \\ \vdots & \\ g_n(\bar{x}), & \bar{x} \in A_n \\ \text{не определена} & \text{- иначе} \end{cases}$$

Тогда f - ЧРФ. $\quad A_1, \ldots, A_n$ - РПМ $\Rightarrow \exists B_1, \ldots, B_n$ - РМ:

$\forall i\ A_i = \{\bar{x} \mid \exists y\ \ (\bar{x}, y) \in B_i\} \Rightarrow \forall i\ \ \chi_{B_i}$ - ОРФ.

Док-во:

а) $h(\bar{x}) \rightleftharpoons \mu y\,[(\underbrace{\bigwedge \overline{sg}\ \chi_{B_i}(\bar{x}, y)}_{*}) = 0]$ - ЧРФ, $f(\bar{x}) = g_1(\bar{x}) \cdot \chi_{B_1}(\bar{x}, h(\bar{x})) + \ldots + g_n(\bar{x}) \cdot \chi_{B_n}(\bar{x}, h(\bar{x}))$ - ЧРФ.

1) $\forall i\, g_i$ - ОРФ $\quad \exists i\ \bar{x} \in A: \exists y: (\bar{x}, y) \in B_i \quad \forall j \neq i\ \ \neg\exists y\ (\bar{x}, y) \in B_j \Rightarrow \exists \min y \mid (*) = 0 \quad h(\bar{x}) = y$

$\chi_{B_i}(\bar{x}, h(\bar{x})) = 1$, $\forall j \neq i\ \ \chi_{B_j}(\bar{x}, h(\bar{x})) = 0 \Rightarrow$ правая часть $= g_i(\bar{x})$ и $f(x) = g_i(\bar{x})$.

2) $\forall i\ \ \bar{x} \notin A_i \Rightarrow f(\bar{x})$ - не определена. $\forall y\ \forall i\ \ \chi_{B_i}(\bar{x}, y) = 0 \Rightarrow (*) = 1 \Rightarrow h(\bar{x})$ - не определена $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ правая часть не определена.

б) не все g_i - ОРФ, $g_1(\bar{x}), \ldots, g_l(\bar{x})$ - определены для некоторых $\bar{x}$. $\ g_i\ \exists(a_1^i, \ldots, a_k^i): g_i(\bar{a}^i)$ - определена. $\ f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{k} g_i(x_1 \cdot \chi_{B_i}(\bar{x}) + a_1^i \cdot \overline{sg}\,\chi_{B_i}(\bar{x}), \ldots, x_k \cdot \chi_{B_i}(\bar{x}) + a_k^i \cdot \overline{sg}\,\chi_{B_i}(\bar{x})) \cdot \chi_{B_i}(\bar{x})$.

Так же необходимо проверить корректность данной функции.

$$f(x) = \sum_{i=1} \left(g_i(x_1 \chi_{B_i}(\bar{x}, h(\bar{x})) + a_1^i \chi_{B_i}(\bar{x}, h(\bar{x})), \ldots, x_k \chi_{B_i}(\bar{x}, h(\bar{x})) + \bar{a}_k^i \chi_{B_i}(\bar{x}, h(\bar{x}))\right) \cdot \chi_{B_i}(\bar{x}, h(\bar{x}))$$

Алгоритмически разрешимые и неразрешимые проблемы. Формальная арифметика Пеано. Гёделевская нумерация. Представимость рекурсивных функций в арифметике Пеано. Теорема Гёделя о неполноте. Разрешимые и неразрешимые теории. Теорема Чёрча о неразрешимости логики предикатов. Теорема Гёделя о неразрешимости арифметики.

опр.1 $\quad \Sigma_0 \rightleftharpoons \langle <^2, +^2, *^2, S^1, 0 \rangle$ - сигнатура арифметики Пеано. $T(\Sigma_0)$ - множество термов Σ_0, $F(\Sigma_0)$ - мн-во формул Σ_0, $S(\Sigma_0)$ - мн-во предложений Σ_0. В качестве переменных берутся только $v_i, i \in \mathbb{N}$.

опр.2 $\quad$ Гёделевская нумерация термов и формул Σ_0.

1) $\gamma(0) \rightleftharpoons c(0,1)$
$\quad \gamma(v_i) \rightleftharpoons c(1,i)$
2) $\gamma(S(t)) \rightleftharpoons c(2, \gamma(t))$
3) $\gamma(t+q) \rightleftharpoons c(3, c(\gamma(t), \gamma(q)))$
4) $\gamma(t*q) \rightleftharpoons c(4, c(\gamma(t), \gamma(q)))$
5) $\gamma(t=q) \rightleftharpoons c(5, c(\gamma(t), \gamma(q)))$
6) $\gamma(t<q) \rightleftharpoons c(6, c(\gamma(t), \gamma(q)))$
7) $\gamma(\varphi \wedge \psi) \rightleftharpoons c(7, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$
8) $\gamma(\varphi \vee \psi) \rightleftharpoons c(8, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$
9) $\gamma(\varphi \to \psi) \rightleftharpoons c(9, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$
10) $\gamma(\neg\varphi) \rightleftharpoons c(10, \gamma(\varphi))$
11) $\gamma(\exists v_i\, \varphi) \rightleftharpoons c(11, c(i, \gamma(\varphi)))$
12) $\gamma(\forall v_i\, \varphi) \rightleftharpoons c(12, c(i, \gamma(\varphi)))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $\quad \gamma(T(\Sigma_0)) \rightleftharpoons \{\gamma(t) \mid t \in T(\Sigma_0)\}$, $\gamma(F(\Sigma_0)) \rightleftharpoons \{\gamma(\varphi) \mid \varphi \in F(\Sigma_0)\}$, $\gamma(S(\Sigma_0)) \rightleftharpoons \{\gamma(\varphi) \mid \varphi \in S(\Sigma_0)\}$ - ПРМ.

Док-во:

Строится схема примитивной рекурсии.

опр.4 $X \subseteq T(\Sigma_0) \cup F(\Sigma_0)$, будем говорить, что X - разрешимо, если $\gamma(X) \rightleftharpoons \{\gamma(p) \mid p \in X\}$ - РМ, X - перечислимо, если множество $\gamma(X)$ - РПМ.

предложение 5. $\forall n \exists x = p_0^{a_0} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$, $ex(0, x) = a_0, \ldots, ex(n, x) = a_n$.

опр.6 $\Pi_{\Sigma_0} \rightleftharpoons \{\varphi \in F(\Sigma_0) \mid \varphi$ - т.и.$\}$

предложение 7. Π_{Σ_0} - перечислимо.

Док-во:

$\gamma(\Pi_{\Sigma_0})$ - РПМ, $f(x,n,y) \rightleftharpoons \begin{cases} y, & ex(n,x) = y \quad \gamma^{-1}(ex(0,x)), \ldots, \gamma^{-1}(ex(n,x)) \text{ - последовательность формул из } F(\Sigma_0) \text{ является доказательством.} \\ \gamma(v_0 = v_0) & \text{- иначе.} \end{cases}$

Покажем, что $\rho f = \gamma(\Pi_{\Sigma_0})$

а) $\rho f \subseteq \gamma(\Pi_{\Sigma_0})$, $f(x,n,y) = y$. $y \neq \gamma(v_0 = v_0)$. $\varphi_0, \ldots, \varphi_n \in F(\Sigma_0)$, $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ - доказательство, $ex(0,x) = \gamma(\varphi_0), \ldots, ex(n,x) = \gamma(\varphi_n)$. $y = ex(n,x) = \gamma(\varphi_n) \Rightarrow \varphi_n$ - доказуемо $\Rightarrow \varphi_n$ - т.и.
$y = \gamma(\varphi_n) \Rightarrow f(x,n,y) = y \in \gamma(\Pi_{\Sigma_0})$.

б) $\rho f \supseteq \gamma(\Pi_{\Sigma_0})$, $\varphi \in \Pi_{\Sigma_0} \Rightarrow \exists n: \varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$ - доказательство. $x \rightleftharpoons p_0^{\gamma(\varphi_0)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\gamma(\varphi_n)} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x,n,y) = y = \gamma(\varphi) \Rightarrow \gamma(\varphi) \in \rho f \Rightarrow \gamma(\Pi_{\Sigma_0}) = \rho f$.

лемма 8. f из предложение выше - ОРФ.

следствие 9. Множество $\{\varphi \mid \varphi \in S(\Sigma_0), \varphi$ - т.и.$\}$ - перечислимо.

Док-во:

Покажем, что $\gamma(\Pi_{\Sigma_0} \cap S(\Sigma_0))$ - РПМ.

предложение 10.

а) $A \subseteq F(\Sigma_0)$, A - конечно (разрешимо) $A' \rightleftharpoons \{\varphi \in F(\Sigma_0) \mid A \vartriangleright \varphi\}$ - перечислимо.

б) $A \subseteq S(\Sigma_0)$, A - конечно (разрешимо) $A'' \rightleftharpoons \{\varphi \in S(\Sigma_0) \mid A \vartriangleright \varphi\}$ - перечислимо.

Док-во:

а) $\gamma(A')$ - РПМ, $f(x,n,y) \rightleftharpoons \begin{cases} y, & ex(n,x) = y \quad \gamma^{-1}(ex(0,x)), \ldots, \gamma^{-1}(ex(n,x)) \text{ - последовательность формул из } F(\Sigma_0) \text{ является доказательством из } A. \\ \gamma(v_0 = v_0) & \text{- иначе.} \end{cases}$

б) $\gamma(A'')$ - РПМ, $f(x,n,y) \rightleftharpoons \begin{cases} y, & ex(n,x) = y \quad \gamma^{-1}(ex(0,x)), \ldots, \gamma^{-1}(ex(n,x)) \text{ - посл-ть предложений из } A \text{ является док-вом.} \\ \gamma(v_0 = v_0) & \text{- иначе.} \end{cases}$

неверно, надо исправить

предложение 11.

Док-во:

а) $\gamma(A')$ - РПМ, A - перечислимо $\Rightarrow \gamma(A)$ - РПМ $\Rightarrow \exists$ ОРФ $h: \gamma(A) = \rho h$, $A_m \rightleftharpoons \{h(0), \ldots, h(m)\}$,
$f(x,n,y,m) \rightleftharpoons \begin{cases} y, & ex(n,x) = y \\ & \gamma^{-1}(ex(0,x)), \ldots, \gamma^{-1}(ex(n,x)) \text{ - посл-ть формул из } F(\Sigma_0), \text{ являющаяся доказательством из } A_m. \\ \gamma(v_0 = v_0) & \text{- иначе.} \end{cases}$
$A \vartriangleright \varphi$ $\exists$ док-во $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$ из A $\exists m$ $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ - доказательство из A_m, т.к.
$A = \bigcup_k A_k \Rightarrow \rho f = A'$

Теорема 12. $T \subseteq S(\Sigma_0)$, T - полная перечислимая теория, то T - разрешимая.

Док-во:

$T \subseteq S(\Sigma_0)$, T - полная, перечислимая

1) $T \vdash$ $\Rightarrow T = S(\Sigma_0)$, $\gamma(T) = \gamma(S(\Sigma_0))$ - ПРМ $\Rightarrow T$ - разрешима.

2) $T \nvdash$ $M \rightleftharpoons \gamma(T)$. Покажем, что M - Р.М. M - РПМ, т.к. T - перечислимо. $\exists$ ОРФ $f: M = \rho f$
$\chi_M(x) = \overline{sg} \mid f(\mu y [\chi_{\gamma(S(\Sigma_0))}(x) \cdot |f(y) - x| \cdot |f(y) - c(10,x)| = 0]) - x \mid$

1) $x \notin \gamma(S(\Sigma_0))$ $\chi_M(x) \equiv 0$ $\overline{sg} |f(0) - x| = 0$, т.к. $x \notin M \Rightarrow f(0) \neq x$.

2) $x \in \gamma(S(\Sigma_0)) \Rightarrow \exists \varphi \in S(\Sigma_0): x = \gamma(\varphi)$

а) $\varphi \in T \Rightarrow x = \gamma(\varphi) \in M \Rightarrow \exists n: f(n) = x$.
$\neg\varphi \notin T \Rightarrow \gamma(\neg\varphi) = c(10,x) \notin M \Rightarrow \forall k$ $f(k) \neq c(10,x) \Rightarrow \exists \min k: f(k) = x \Rightarrow \chi_M(x) = 1$.

б) $\varphi \notin T$ $x = \gamma(\varphi) \notin M$ $\neg\varphi \in T \Rightarrow \gamma(\neg\varphi) = c(10,x) \in M \Rightarrow \exists n$ $f(n) = c(10,x)$ $\forall k$ $f(k) \neq x \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \min k: f(k) = c(10,x)$ $\chi_M(x) = 0$ $\overline{sg} |f(k) - x| = 0 \Rightarrow M$ - Р.М. $\Rightarrow T$ - разрешима.

опр. 13 Формальная Арифметика Пеано (A_0 - название).

1) $\forall v_0 \neg(S(v_0) = 0)$

2) $\forall v_0 \forall v_1 ((S(v_0) = S(v_1)) \to (v_0 = v_1))$

3) $\forall v_0 (v_0 + 0 = v_0)$

4) $\forall v_0 \forall v_1 (v_0 + S(v_1) = S(v_0 + v_1))$

5) $\forall v_0 (v_0 * 0 = 0)$

6) $\forall v_0 \forall v_1 (v_0 * S(v_1) = ((v_0 * v_1) + v_0))$

7) $\forall v_0 \neg(v_0 < 0)$

8) $\forall v_0 \forall v_1 ((v_0 < S(v_1)) \to ((v_0 < v_1) \vee (v_0 = v_1)))$

9) $\forall v_0 \forall v_1 (((v_0 < v_1) \vee (v_0 = v_1)) \to (v_0 < S(v_1)))$

10) $\forall v_0 \forall v_1 ((\neg v_0 = v_1) \to ((v_0 < v_1) \vee (v_1 < v_0)))$

опр. 14 $\underline{0} \rightleftharpoons 0$, $\underline{1} \rightleftharpoons S(\underline{0}), \ldots, \underline{n+1} \rightleftharpoons S(\underline{n})$, т.е. $\underline{n} \rightleftharpoons \underbrace{S \ldots S}(0)$

опр. 15 $f: \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{N}$, f представима в A_0, если $\exists \varphi(\overset{n-\text{поз}}{v_0, \ldots, v_k}) \in F(\Sigma_0): \forall n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.
$f(n_0, \ldots, n_{k-1}) = n_k$, то $A_0 \vdash \varphi(\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_k})$, $f(n_0, \ldots, n_{k-1}) \neq n_k$, то $A_0 \vdash \neg\varphi(\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_k})$.

теорема 16. Каждая ОРФ представима в A_0.

Док-во: индукцией по построению ОРФ (используем утверждение, что любая ОРФ может быть получена только из ОРФ).

1) а) $O(v_0)$ $\varphi(v_0, v_1) \rightleftharpoons (v_1 = 0)$

б) $S(v_0)$ $\varphi(v_0, v_1) \rightleftharpoons (v_1 = S(v_0))$

в) $I_m^n(x_1, \ldots, x_n)$ $\varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n) \rightleftharpoons (v_n = v_{m-1})$

2) а) суперпозиция: $f(v_0, \ldots, v_{n-1}) = h(g_1(\bar{v}), \ldots, g_k(\bar{v}))$, φ_i - представляет g_i, ψ - представляет h.
$\xi(v_0, \ldots, v_n) \rightleftharpoons \exists v_{N+1}, \ldots, \exists v_{N+k} (\varphi_1(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_{N+1}) \& \ldots \& \varphi_k(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_{N+k}) \& \psi(v_{N+1}, \ldots, v_{N+k}, v_n))$
$N \rightleftharpoons \max\{l \mid v_l$ входит в $\varphi_1 \& \ldots \& \varphi_k \& \psi\}$.

б) примитивная рекурсия: $f(v_0, \ldots, v_{n-1}, 0) = g(v_0, \ldots, v_{n-1})$, $f(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n + 1) = h(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n, f(v_0, \ldots, v_{n-1}))$. φ - представляет g, ψ - представляет h,
$\xi(v_0, \ldots, v_{n+1}) \rightleftharpoons \exists v_{N+1}: v_{N+1} = p_0^{f(\bar{v}, 0)} \cdot \ldots \cdot p_{v_n}^{f(\bar{v}, v_n)}$ $N \rightleftharpoons \max\{l \mid v_l$ - входит в $\varphi \& \ldots \& \psi\}$.
Тогда $\xi(v_0, \ldots, v_{n+1}) \rightleftharpoons \exists v_{N+1}$ $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}, ex(0, v_{N+1})) \& \forall v_{N+2} ((v_{N+2} < v_N) \to$
$\to (\psi(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_{N+2}, ex(v_{N+2}, v_{N+1}), ex(v_{N+2} + 1, v_{N+1})) \& (v_{n+1} = ex(v_n, v_{N+1}))$.

в) минимизация: $f(v_0, \ldots, v_{n-1}) = \mu v_{N+1} [g(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_{n+1}) = 0]$, φ - представляет g.
$\xi(v_0, \ldots, v_n) = \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n, 0) \& (\forall v_{N+1})((v_{N+1} < v_n) \to \neg\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_{N+1}, 0))$.

теорема 17. Гёделя о неразрешимости:

Система аксиом A_0 наследственно неразрешима, т.е. любая содержащая её непротиворечивая теория является неразрешимой. $T \subseteq S(\Sigma_0)$, T - теория, $T \nvdash$, $A_0 \subseteq T$, тогда T - ~~непротиворечива~~ не разрешима.

Док-во:

Пусть T - разрешима, $M \rightleftharpoons \gamma(T) \Rightarrow M$ - РМ, χ_M - ОРФ, $f(x,y) \rightleftharpoons \begin{cases} \gamma[\gamma^{-1}(x)]_{\underline{y}}^{v_0}, & \text{если } x \in \gamma(F(\Sigma_0)). \\ 0, & x \notin \gamma(F(\Sigma_0)). \end{cases}$
f - всюду определена, $\gamma(F(\Sigma_0))$ - ПРМ, f - ПРФ.
$g(x,y) \rightleftharpoons \chi_M(f(x,y))$ - ОРФ, $g(v_0, v_1)$ - представима в A_0.
$\exists \varphi(v_0, v_1, v_2)$ - представляющая $g(v_0, v_1)$, $n \rightleftharpoons \gamma(\varphi(v_0, v_0, 0))$
$f(n,y) = \gamma([\varphi(v_0, v_0, 0)]_{\underline{y}}^{v_0}) = \gamma(\varphi(\underline{y}, \underline{y}, 0))$
$f(n,n) = \gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0))$, $g(n,n) = \chi_M(f(n,n)) = ?$

1) $g(n,n) = \chi_M(f(n,n)) = 1 \Rightarrow g(n,n) \neq 0 \Rightarrow A_0 \vdash \neg\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)$ $A_0 \subseteq T \Rightarrow T \vdash \neg\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \neg\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \in T$, $T \nvdash \Rightarrow \varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \notin T \Rightarrow \gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)) \notin M$. $\chi_M(\gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0))) = 0$
$\chi_M(f(n,n)) = 1 \Rightarrow$ противоречие.

2) $g(n,n) = \chi_M(f(n,n)) = 0$. $\chi_M(\gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0))) = 0 \Rightarrow \gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)) \notin M \Rightarrow \varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \notin T \Rightarrow$
$T \nvdash \varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)$, $A_0 \subseteq T \Rightarrow A_0 \nvdash \varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)$, $g(n,n) \neq 0$ - противоречие.

$\Rightarrow M$ - не рекурсивно $\Rightarrow T$ неразрешимо.

теорема 18. Чёрча о неразрешимости:

Множество теорем ИП$_{\Sigma_0}$ - неразрешимо.

Док-во:

$T \rightleftharpoons \{\varphi \in S(\Sigma_0) \mid \vdash \varphi\}$. Пусть T - разрешимо, $\psi \rightleftharpoons \underset{\varphi \in A_0}{\&} \varphi = \varphi_1 \& \ldots \& \varphi_{10}$
$T_0 \rightleftharpoons \{\varphi \in S(\Sigma_0) \mid A_0 \vdash \varphi\} = \{\varphi \in S(\Sigma_0) \mid \psi \vdash \varphi\}$ T_0 - теория.
$\mathfrak{A} \rightleftharpoons \langle \mathbb{N}; <, +, *, S, 0 \rangle$ $\mathfrak{A} \models A_0 \Rightarrow \mathfrak{A} \models T_0 \Rightarrow T_0 \nvdash$, $A_0 \subseteq T_0 \Rightarrow T_0$ - неразрешимо.
$S(x) \rightleftharpoons x + 1$ $\varphi \in T_0 \Leftrightarrow A_0 \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi \vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash (\psi \to \varphi) \Leftrightarrow (\psi \to \varphi) \in T$.
$m = \gamma(\psi)$, $\chi_{\gamma(T_0)}(n) = \chi_{\gamma(T)}(c(9, c(m,n)))$. $n = \gamma(\varphi) \Leftrightarrow c(9, c(m,n)) = \gamma(\psi \to \varphi)$, если

$\chi_\gamma(T)$ — ОРФ, но $\chi_\gamma(T_0)$ — ОРФ — противоречие $\Rightarrow$ T-неразрешима.

следствие 19. $\sigma \supseteq \Sigma_0$, то и $ИП_\sigma$ — неразрешимо.

теорема 20. Гёделя о неполноте:
$T \subseteq S(\Sigma_0)$, T — теория, $A_0 \subseteq T$, T — перечислима, $T \nvdash$. Тогда T — не полно. Система A_0 не имеет непротиворечивых перечислимых пополнений.

Док-во:
$A_0 \subseteq T$, $T \nvdash$, T — перечислимо. Пусть T — полна, T — теория $\Rightarrow$ T — разрешима — противоречие $\Rightarrow$ T не полно.

следствие 21. $B \rightleftharpoons \{\gamma(\varphi) \mid A_0 \vdash \varphi\}$, B — РПМ, но РМ. A_0 — конечно $\Rightarrow$ B — РПМ.
$B = \gamma(\{\varphi \mid A_0 \vdash \varphi\}) \Rightarrow B - \neg РМ$.

Аксиоматизируемые классы. Теория класса и класс теории. Конечно аксиоматизируемые классы. Характеризация классов, замкнутых относительно подмоделей и расширений. Интерполяционная теорема Крейга и её следствие. Явная и неявная определимость. Теорема Бета об определимости.

опр. 1 $K_\sigma \rightleftharpoons \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ — модель сигнатуры $\sigma\}$, $K \subseteq K_\sigma$ $Th K \rightleftharpoons \{\varphi \in S(\sigma) \mid \forall \mathfrak{A} \in K\ \mathfrak{A} \models \varphi\} =$
$= \{\varphi \in S(\sigma) \mid K \models \varphi\}$ — теория класса K. $K \models \varphi$: $\forall \mathfrak{A} \in K\ \mathfrak{A} \models \varphi$.

опр. 2 $\Gamma \subseteq S(\sigma)$, σ — фикс. $K(\Gamma) \rightleftharpoons K_\sigma(\Gamma) \rightleftharpoons \{\mathfrak{A} \in K_\sigma \mid \mathfrak{A} \models \Gamma\} \rightleftharpoons \{\mathfrak{A} \in K_\sigma \mid \forall \varphi \in \Gamma\ \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

опр. 3 $K \subseteq K_\sigma$, класс наз. аксиоматизируемым в σ, если $\exists \Gamma \subseteq S(\sigma): K = K(\Gamma)$.

предложение 4. $K \subseteq K_\sigma$, тогда $K \in K(Th(K))$.

Док-во:
$\mathfrak{A} \in K$, покажем, что $\mathfrak{A} \in K(Th(K))$: $K(Th(K)) = \{\mathfrak{B} \in K_\sigma \mid \mathfrak{B} \models Th K\}$, $\mathfrak{A} \in K \subseteq K_\sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \in K_\sigma$.
Покажем, что $\mathfrak{A} \models Th K$: $\varphi \in Th K = \{\varphi \mid \forall \mathfrak{B} \in K\ \mathfrak{B} \models \varphi\}$ $\mathfrak{A} \in K \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models Th K \Rightarrow \mathfrak{A} \in K(Th(K)) \Rightarrow$
$\Rightarrow K \subseteq K(Th(K))$.

предложение 5. $K = K(\Gamma)$, тогда $\Gamma \subseteq Th K$.

Док-во:
$\varphi \in \Gamma$, покажем, что $\varphi \in Th K$. $\mathfrak{A} \in K = K(\Gamma) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \varphi \in Th K \Rightarrow \Gamma \subseteq Th K$.

предложение 6. K — аксиоматизируем $\Leftrightarrow K = K(Th(K))$.

Док-во:
(⇒) K — аксиоматизируем, $\exists \Gamma \subseteq S(\sigma): K = K(\Gamma)$. Покажем, что $K = K(Th(K))$. (предл. выше) $K \subseteq K(Th(K))$.
Покажем, что $K(Th(K)) \subseteq K$. Пусть $\mathfrak{A} \in K(Th(K)) \Rightarrow \mathfrak{A} \models Th(K)$, $K = K(\Gamma) \Rightarrow \Gamma \subseteq Th K \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma \Rightarrow$
$\mathfrak{A} \in K(\Gamma) = K \Rightarrow K(Th(K)) \subseteq K \Rightarrow K = K(Th(K))$.
(⇐) $K = K(Th(K))$, $Th(K) \subseteq S(\sigma) \Rightarrow$ K — аксиом.

следствие 7. $\forall$ аксиоматизируемого класса $\exists$ наибольшее по включению мн-во аксиом — это, в точности, $Th(K)$.

предложение 8. Аксиоматизируемый класс замкнут относительно элементарной эквивалентности. K — аксиоматизируемый, $\mathfrak{A} \in K$, $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B} \in K$.

Док-во:
$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \in K$, $K = K(\sigma) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma$, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Rightarrow \forall \varphi\ \mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{B} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{B} \in K$.

предложение 9. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq S(\sigma)$, $K_1, K_2 \subseteq K_\sigma$.
а) $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \Rightarrow K(\Gamma_2) \in K(\Gamma_1)$.
б) $K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow Th K_2 \subseteq Th K_1$.

Док-во:
а) $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$. Покажем, что $K(\Gamma_2) \in K(\Gamma_1)$: $\mathfrak{A} \in K(\Gamma_2) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma_2 \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma_1 \Rightarrow \mathfrak{A} \in K(\Gamma_1) \Rightarrow K(\Gamma_2) \subseteq K(\Gamma_1)$.
б) $K_1 \subseteq K_2$. Покажем, что $Th K_2 \subseteq Th K_1$: $\varphi \in Th K_2 \Rightarrow K_2 \models \varphi$, т.е. $\forall \mathfrak{A} \in K_2\ \mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \forall \mathfrak{A} \in K_1$
$\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow K_1 \models \varphi \Rightarrow \varphi \in Th K_1 \Rightarrow Th K_2 \subseteq Th K_1$.

замечание 10. В общем случае не верно:
а) $K = K(Th(K))$.
б) $\Gamma = Th(K(\Gamma))$.

DATE

Док-во:
а) $K \rightleftharpoons \{\mathfrak{N} \rightleftharpoons \langle \mathbb{N}; \cdot, +, 0, 1 \rangle\}$ $\exists \mathfrak{M} \models Th\,\mathfrak{N}$ $\|\mathfrak{M}\| \geq$ континуум $\Rightarrow \mathfrak{M} \not\cong \mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{M} \notin K$.
$Th K = Th\,\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} \models Th\,\mathfrak{N} = Th K \Rightarrow \mathfrak{M} \in K(Th(K)) \Rightarrow \mathfrak{M} \in K(Th(K)) \setminus K \Rightarrow K \neq K(Th(K))$.
б) $\Gamma \rightleftharpoons \varnothing$, σ — фиксированная. $K(\Gamma) = K_\sigma(\varnothing) = K_\sigma$. $Th(K_\sigma) = \{\varphi \in S_\sigma \mid \varphi$ — т.и.$\} \neq \varnothing$. $Th K_\sigma \neq \varnothing$, т.к. $\forall x (x = x) \in Th K_\sigma \Rightarrow Th(K(\Gamma)) \neq \Gamma$.

следствие 11. не каждый класс аксиоматизируем.

предложение 12. $\Gamma = Th K(\Gamma) \Leftrightarrow \Gamma$ — теория.

Док-во:
(⇒) $\Gamma = Th(K(\Gamma)) \Rightarrow \Gamma$ — теория.
(⇐) Γ — теория, покажем, что $\Gamma = Th(K(\Gamma))$; $\Gamma \subseteq Th(K(\Gamma))$, покажем, что $Th(K(\Gamma)) \subseteq \Gamma$.
от противного: пусть $\exists \varphi \in Th K(\Gamma) : \varphi \notin \Gamma$, Γ — теория $\Rightarrow \Gamma \nvdash \varphi \Rightarrow \Gamma, \neg\varphi \nvdash$ по (т) о $\exists$ модели $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \mathfrak{A} \in K_\sigma : \mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \in K(\Gamma)$, $\mathfrak{A} \models \neg\varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi \Rightarrow \varphi \notin Th K(\Gamma)$ — противоречие $\Rightarrow$
$\Rightarrow Th K(\Gamma) \subseteq \Gamma \Rightarrow$ они равны, т.е. $Th K(\Gamma) = \Gamma$.

следствие 13. Отображение $K \to Th K$, $T \to K(T)$ — взаимно обратные, устанавливающие взаимно однозначное соответствие между аксиоматизируемыми классами и теориями.

опр. 14 класс K наз. конечно аксиоматизируемым, если $\exists$ конечное $\Gamma : K = K(\Gamma)$.

замечание 15. K — конечно аксиоматизируем $\Leftrightarrow \exists \varphi \in S(\sigma) : K = K(\{\varphi\})$.

Док-во:
(⇒) $\Gamma = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, $K = K(\Gamma)$, $\varphi \rightleftharpoons \psi_1 \& \dots \& \psi_n$. Тогда $K = K(\{\varphi\})$.
(⇐) очевидно.

предложение 16. Если $K = K(\{\varphi\})$, то $\bar{K} \rightleftharpoons K_\sigma \setminus K = K(\neg\varphi)$.

Док-во:
$\bar{K} = K_\sigma \setminus K = \{\mathfrak{A} \in K_\sigma \mid \mathfrak{A} \notin K\} = \{\mathfrak{A} \in K_\sigma \mid \mathfrak{A} \not\models \varphi\} = \{\mathfrak{A} \in K_\sigma \mid \mathfrak{A} \models \neg\varphi\} = K_\sigma(\{\neg\varphi\}) = K(\{\neg\varphi\})$.

следствие 17. класс K — конечно аксиоматизируем $\Leftrightarrow \bar{K}$ — конечно аксиоматизируем.

теорема 18. $K \subseteq K_\sigma$, K — конечно аксиоматизируем $\Leftrightarrow K, \bar{K}$ — аксиоматизируемы.
(⇒) K — конечно аксиоматизируем $\Rightarrow \bar{K}$ — конечно аксиоматизируем $\Rightarrow K, \bar{K}$ — аксиомат.
(⇐) $\bar{K}, \bar{K}$ — аксиоматизируемы, $K = K(\Gamma)$, $\bar{K} = K(\Delta)$, $\Gamma, \Delta \subseteq S(\sigma)$. Допустим, что $\Gamma \cup \Delta \nvdash \Rightarrow$
$\exists \mathfrak{A} \in K_\sigma : \mathfrak{A} \models \Gamma \cup \Delta \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \in K$ $\mathfrak{A} \models \Delta \Rightarrow \mathfrak{A} \in \bar{K} = K_\sigma \setminus K$ — противоречие $\Rightarrow \Gamma \cup \Delta \vdash \Rightarrow \exists$
конечное $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, конечное $\Delta_0 \subseteq \Delta$: $\Gamma_0, \Delta_0 \vdash$ — доказуемо. Покажем, что $K = K(\Gamma_0)$.
1) $K \subseteq K(\Gamma_0)$ $\mathfrak{A} \in K = K(\Gamma)$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma_0 \Rightarrow \mathfrak{A} \in K(\Gamma_0) \Rightarrow K \subseteq K(\Gamma_0)$.
2) $\mathfrak{A} \in K(\Gamma_0) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma_0$, пусть $\mathfrak{A} \notin K$, $\mathfrak{A} \in K_\sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \in \bar{K}$, $\bar{K} = K(\Delta) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Delta \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Delta_0 \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma_0 \cup \Delta_0$
$\Rightarrow \mathfrak{A} \in K \Rightarrow K(\Gamma_0) \subseteq K \Rightarrow K = K(\Gamma_0)$, Γ_0 — конечно $\Rightarrow$ K — конечно аксиоматизируем.

OFFICE COLLECTION