Лекции по матлогу

Зайцев Вадим

2010-02-09

1 Секвенциальное исчисление предикатов

1.1 Алфавит:

1. $x_1, x_2 \dots$ - пропозициональные переменные
2. $c_1, c_2 \dots$ - константы
3. $P_1, P_2 \dots$ - предикаты
4. $f_1, f_2 \dots$ - функции
5. $\vee, \&, \to, \neg, \forall, \exists$
6. $\vdash$
7. '(', ')', ','
8. $=$

1.2 Аксиомы:

1. $\varphi \vdash \varphi$
2. $\vdash \forall x \quad (x = x)$
3. $\vdash \forall x \forall y \quad ((x = y) \to (y = x))$
4. $\vdash \forall x \forall y \forall z \quad (((x = y) \& (y = z)) \to (x = z))$
5. $(t_1 = q_1), (t_2 = q_2), \dots, (t_n = q_n), \varphi(t_1, \dots, t_n) \vdash \varphi(q_1, \dots, q_n)$

1.3 Правила вывода:

1) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}$

2) $\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$

3) $\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}{\Gamma \vdash \varphi}$

4) $\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\psi \vee \varphi)}$

5) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\psi \vee \varphi)}$

6) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \xi; \Gamma, \psi \vdash \xi; \Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}{\Gamma \vdash \xi}$

7) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}$

8) $\dfrac{\Gamma, \neg\psi \vdash}{\Gamma \vdash \psi}$

9) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash}$

10) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$

11) $\dfrac{\Gamma_1, \varphi, \psi, \Gamma_2 \vdash \xi}{\Gamma_1, \psi, \varphi, \Gamma_2 \vdash \xi}$

12) $\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}$

13) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi(t)}{\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x)}, x \notin FV\,(\Gamma)$

14) $\dfrac{\Gamma \vdash \forall x \varphi(x)}{\Gamma \vdash \varphi(t)}$

15) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi(t)}{\Gamma \vdash \exists x\, \varphi(x)}$

16) $\dfrac{\Gamma, \varphi(t) \vdash \psi}{\Gamma, \exists x\, \varphi(x) \vdash \psi}, x \notin Fv\,(\Gamma, \psi)$

1.4 Определения (из ИВ):

Док-во, дерево секвенций, дерево выводов, допустимое правило вывода, доказуемая секвенция.

1.5 Предоложение:

Секвенция доказуема $\Leftrightarrow$ когда существует дерево вывода, оканчивающееся на эту секвенцию.

1.6 Предложение:

Если секвенция логики предикатов получена подстановкой в доказуемую секвенцию логики высказываний вместо пропизициоальных переменных формул логики предикатов, то эта секвенция доказуема и в исчислении предикатов.

1.7 Предложение:

Правила вывода, допустимые в ИВ являются допустимыми в ИП.
Доказывается просто :)

1.8 Следующие правила вывод являются допустимыми:

1) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\varphi \,\&\, \xi) \vdash (\psi \,\&\, \xi)}$ 2) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \,\&\, \varphi) \vdash (\xi \,\&\, \psi)}$ 3) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\varphi \vee \xi) \vdash (\psi \vee \xi)}$

4) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \vee \varphi) \vdash (\xi \vee \psi)}$ 5) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\varphi \to \xi) \vdash (\psi \to \xi)}$ 6) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \to \varphi) \vdash (\xi \to \psi)}$

7) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\neg\psi \vdash \neg\varphi}$ 8) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\forall x\, \varphi \vdash \forall x\, \psi}$ 9) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\exists x\, \varphi \vdash \exists x\, \psi}$

1.9 Теорема о замене:

$\psi' = [\psi]^{\varphi}_{\varphi'}$, где $\varphi \equiv \varphi'$, то $\psi' \equiv \psi$

Док-во:

1. $\ln(\psi) = 0, \psi = \varphi$
2. $\ln(\psi) = n$
   $\forall \xi \ \ln(\xi) < n$ - теорема верна
   (a) $\psi = \psi_1 \,\&\, \psi_2 \quad \ln(\psi_1) < n, \ln(\psi_2) < n.$
      i. $\psi' = [\psi_1]^{\varphi'}_{\varphi} \,\&\, \psi_2$:
         $\psi_1' = [\psi_1]^{\varphi_1}_{\varphi}$
         $\psi_1' \equiv \psi_1$ по индукционному предположению. Отсюда следуют 2 пункта:
         $\psi_1 \vdash \psi_1'$ - доказуема. По (1.3.1) $(\psi_1 \,\&\, \psi_2) \vdash (\psi_1' \,\&\, \psi_2)$ - доказуема.
         $\psi_1' \vdash \psi_1$ - доказуема. По (1.3.1) $(\psi_1' \,\&\, \psi_2) \vdash (\psi_1 \,\&\, \psi_2)$ - доказуема.
         Получаем, что $(\psi_1 \,\&\, \psi_2) \equiv (\psi_1' \,\&\, \psi_2) \Rightarrow \psi \equiv \psi'$
      ii. $\psi' = \psi_1 \,\&$
         $mathfrak, [\psi_1]^{\varphi'}_{\varphi}$ - делается через (1.3.2).
   (b) $\psi = \psi_1 \vee \psi_2$ - с помощью (1.3.3) и (1.3.4).
   (c) $\psi = \psi_1 \to \psi_2$ - с помощью (1.3.5) и (1.3.6).
   (d) $\psi = \neg\psi_1$ - с помощью (1.3.7).
   (e) $\psi = \forall x\, \psi_1$
      $\psi' = \forall x\, [\psi_1]^{\varphi'}_{\varphi}, \quad \ln(\psi_1) = n - 1.$ Применяем мега-индукцию по кол-ву связок и кванторов.
      $\psi_1' = [\psi_1]^{\varphi'}_{\varphi}, \quad \psi_1' \equiv \psi 1$ - по индуктивном предположению.
      Используем (1.3.8):
      $$\frac{\psi_1 \vdash \psi_1'}{\forall x\, \psi_1 \vdash \forall x\, \psi_1'}, \quad \frac{\psi_1' \vdash \psi_1}{\forall x\, \psi_1' \vdash \forall x\, \psi_1}$$
      Прыгаем, радуемся и хлопаем ушами.
   (f) $\psi = \exists x\, \psi_1$ - доказывается аналогично предыдущему через (1.3.9).

1.10 Определение (Семантика исчисления предикатов):

1. $\Gamma \vdash \varphi$ - т.и.
   $\forall \mathfrak{A} \in K(\sigma(\Gamma, \varphi))$
   $\forall \gamma \colon FV(\Gamma, \varphi) \to |\mathfrak{A}|$
   $\exists \psi \in \Gamma : \mathfrak{A} \not\models \psi[\gamma]$ или $\mathfrak{A} \models \psi[\gamma]$

2. $\vdash \varphi$ - т.и.
   $\forall \mathfrak{A} \in K(\sigma(\varphi))$
   $\forall \gamma \colon FV(\Gamma, \varphi) \to |\mathfrak{A}|$
   $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$

3. $\Gamma \vdash$ - т.и.
   $\forall \mathfrak{A} \in K(\sigma(\Gamma))$
   $\forall \gamma \colon FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}|$
   $\exists \psi \in \Gamma : \mathfrak{A} \not\models \psi[\gamma]$

1.11 Замечания:

1. $\vdash \varphi$ - т.и. $\Leftrightarrow \varphi$ - т.и.

2. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash$ - т.и. $\Leftrightarrow (\varphi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \varphi_n)$ - т.и.

1.12 Теорема о корректности:

Если секвенция доказуема, то она тождественно истинна.