Лекции по матлогу

Зайцев Вадим

2010-03-16

0.0.1 Случай с равенством

$(t_1 = q_1)...(t_n = q_n) \vdash f(t_1...t_n) = f(q_1...q_n)$
$(t_1 = q_1)...(t_n = q_n) \quad [f(t_1...t_n) = f(x_1...x_n)]^{x_1...x_n}_{t_1...t_n} \vdash [f(t_1...t_n) = f(x_1...x_n)]^{x_1...x_n}_{q_1...q_n}$ - по аксиоме
$(t_1 = q_1)...(t_n = q_n) \quad (f(t_1...t_n) = f(t_1..t_n)) \vdash (f(t_1...t_n) = f(q_1...q_n)) \quad \vdash f(t_1...t_n) = f(t_1...t_n)$
- по правилу сечения тут что-то уходит

0.0.2 Лемма

$t \in T(\sigma') \quad FV(t) = \varnothing$
$\exists c \in C : (t = c) \in T'$

Доказательство. $\vdash (t = t) \Rightarrow \vdash [t = x]^x_t$
$\dfrac{\vdash [t = x]^x_t}{\vdash \exists x(t = x)}$
$T' \vdash \exists x(t = x)$
$\exists x(t = x) \in T' \Rightarrow \exists q \in C \quad (t = c) \in T'$ □

0.0.3 Опр.

$c, e \in C \quad c \sim e \Leftrightarrow (c = e) \in T'$

0.0.4 Пред.

$\sim$ - отношение эквивалентности:

1. $\forall c \in C \quad \vdash (c = c) \Rightarrow T' \vdash (c = c) \Rightarrow (c = c) \in T'$
2. $\forall c, e, \in C \quad (c \sim e) \Rightarrow (c = e) \in T'$ и $(c \sim e) \vdash (e = c) \Rightarrow T' \vdash (e = c) \Rightarrow (e = c) \in T'$
3. $\forall c, e, v \in C$
   $(c \sim e), (e \sim f) \Rightarrow (c = e) \in T', (e = f) \in T' \quad (c = e)(e = f) \vdash (c = f) \Rightarrow T' \vdash (c = f) \Rightarrow (c = f) \in T' \Rightarrow c \sim f$

0.0.5 asdf

1. $\forall P \in \sigma' \quad \forall c_1...c_n \in C$
   $\mathfrak{A}]vDashP([c_1]...[c_n]) \Leftrightarrow P(c_1...c_n) \in T'$
2. $\forall f \in \sigma' \quad \forall c_1...c_n \in C$
   $f^{\mathfrak{A}'}([c_1]...[c_n]) = [d]$, if $(f(c_1...c_n) = d) \in T'$
3. $\forall e \in \sigma' \quad e^{\mathfrak{A}'} = [c]$, if $(e = c) \in T'$

0.0.6 Лемма

$t \in T(\sigma') \quad FV(t) = \varnothing$
$\exists c \in C \quad t^{\mathfrak{A}'} = [c] \Leftrightarrow (t - c) \in T'$

Доказательство. по построению терма:

1. $t = e - const$ - всё получается, всё хорошо и т.п.

2. $t = f(q_1 ... q_n) \quad q_1...q_n \in T(\sigma'),\ FV(q_i) = \varnothing$
$\exists c_1...c_n$
$q_i^{\mathfrak{A}'} = [c_i] \Leftrightarrow (q_i = c_i) \in T'$
$(q_1 = c_1)...(q_n = c_n) \vdash f(q_1...q_n) = f(c_1...c_n)$
$\Rightarrow T' \vdash (f(q_1...q_n) = f(c_1...c_n)) \Rightarrow T' \vdash (t = f(c_1...c_n)) \Rightarrow (t = f(c_1...c_n)) \in T'.$
$\Rightarrow) \quad t^{\mathfrak{A}'} = [c]$
$t^{\mathfrak{A}'} = f^{\mathfrak{A}'}(q_1^{\mathfrak{A}'}...q_n^{\mathfrak{A}'}) = f^{\mathfrak{A}'}([c_1]...[c_n]) = [c]$
$\Rightarrow (f(c_1 \dots c_n) = c) \in T'$
$(t = f(c_1...c_n))(f(c_1...c_n) = c) \vdash (t = c)$
$T' \vdash (t = c) \Rightarrow (t = c) \in T'$
$\Leftarrow)(t = c) \in T'$
$(t = c)(t = f(c_1...c_n) \vdash (f(c_1...c_n) = c)$
$T' \vdash (f(c_1...c_n) = c)$
$(f(c_1..c_n) = c) \in T' \Rightarrow f^{\mathfrak{A}'}([c_1]...[c_n]) = [c] \Rightarrow f^{\mathfrak{A}'} = [c]$

$\square$

0.0.7 Следующая лемма

t, q - замкнутые термы
$\mathfrak{A}' \vDash (t = q) \Leftrightarrow (t = q) \in T'$

Доказательство. $\exists c, d \in C \quad (t = c) \in T' \quad (q = d) \in T'$
$\Rightarrow t^{\mathfrak{A}'} = [c] \quad q^{\mathfrak{A}'} = [d]$
$\mathfrak{A}' \vDash (t = q) \Leftrightarrow t^{\mathfrak{A}'} = q^{\mathfrak{A}'} \Leftrightarrow [c] = [d] \Leftrightarrow c \sim d \Leftrightarrow (c = d) \in T'$
$\Rightarrow) \quad \mathfrak{A}' \vDash (t = q) \Rightarrow (c = d) \in T' \Rightarrow (c = d)(t = c)(q = d) \vdash (t = q) \Rightarrow T' \vdash (t = q) \Rightarrow (t = q) \in T'$
$\Leftarrow)(t = q) \in T'$
$(t = q)(t = c)(q = d) \vdash (c = d) \Rightarrow T' \vdash (c = d) \Rightarrow (c = d) \in T'$
$\Rightarrow \mathfrak{A}' \vDash (t = q)$ $\square$

0.0.8 Очередная лемма

$P \in \sigma'$
$t_1 \dots t_n$ - зам. терм.
$\mathfrak{A}' \vDash$

$\exists c_1 \dots c_n \in C$
$(t_i = c_i) \in T'$
$t_i^{\mathfrak{A}'} = [c_i]$
$\mathfrak{A}' \vDash P(t_1^{\mathfrak{A}'}...t_n^{\mathfrak{A}'}) \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \vDash ([c_1]...[c_n]) \Leftrightarrow P(c_1...c_n) \in T'$
$\Rightarrow)(t_1 = c_1)...(t_n = c_n) \quad P(c_1...c_n) \vdash P(t_1...t_n) \Rightarrow T' \vdash P(t_1...t_n) \Rightarrow P(t_1...t_n) \in T'$
$\Leftarrow)P(t_1...t_n) \in T'$
$(t_1 = c_1)...(t_n = c_n)P(t_1...t_n) \vdash P(c_1...c_n) \Rightarrow T' \vdash P(c_1...c_n) \Rightarrow P(c_1...c_n) =\in T' \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathfrak{A}' \vDash P([c_1]...[c_n]) \Rightarrow \mathfrak{A}' \vDash P(t_1^{\mathfrak{A}'}...t_n^{\mathfrak{A}'})$

0.0.9 Последняя лемма

$\varphi = \varphi(t_1...t_n) \in S(\sigma')$
$t_1..t_n$ - замкнутый терм
$\mathfrak{A}' \vDash \varphi(t_1^{\mathfrak{A}'}...t_n^{\mathfrak{A}'}) \Leftrightarrow \varphi(t_1...t_n) \in T'$

Доказательство. $\varphi = (t = q) \quad \varphi = P(t_1...t_n)$ (3,4 леммы)
$\varphi = \xi_1 \& \xi_2$
$\mathfrak{A}' \vDash (\varphi_1 \& \varphi_2) \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \vDash \varphi_1$ и $\mathfrak{A}' \vDash \varphi_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \varphi_1 \in T'$ и $\varphi_2 \in T' \Leftrightarrow \varphi_1 \& \varphi_2 \in T'$
$\varphi = \varphi \vee \varphi$
$\varphi \neg \varphi_1 \quad \mathfrak{A}' \vDash \neg\varphi_1 \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \nvDash \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi \notin T' \Leftrightarrow$
$\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$
$\varphi = \exists x \psi(x) \quad \mathfrak{A}' \vDash \varphi \Leftrightarrow \exists c \in C \quad \mathfrak{A}' \vDash \psi([c])$ $\square$

0.0.10 Следствие

$\mathfrak{A}' \vDash T'$
$\Gamma' = T_0 \subseteq T' \Rightarrow \mathfrak{A}' \vDash \Gamma'$
$\Gamma' = [\Gamma]_D^X$
$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'|_\sigma \quad \gamma : X \to |\mathfrak{A}| \quad \gamma(x_i) = d_i^{\mathfrak{A}'}(= [c_i])$
$\mathfrak{A}' \vDash \Gamma[\gamma]$ что-то доказано.

0.0.11 Опр

$\Gamma \subseteq F(\sigma)$
Γ - совместна, если $\exists \mathfrak{A} \exists \gamma : \quad \mathfrak{A} \vDash \Gamma[\gamma]$
Γ - локально совместна, если $\vdash \Gamma_0 \subseteq \Gamma; \quad \Gamma_0$ - коечно, Γ_0 - совместна.

0.0.12 Теорема мальцева о компактности

Γ - совместна $\Leftrightarrow \Gamma$ - локально совместна.

Доказательство. $\Rightarrow$ очевидно.

$\Leftarrow$ Γ - локально совместна. Γ - несовместна. $\Rightarrow \Gamma \vdash$
$\exists \varphi_1 ... \varphi_n \in \Gamma$, $\varphi_1 ... \varphi_n \vdash$ - доказуемо.
$\Gamma_0 = \{\varphi_1 ... \varphi_n\} \subseteq \Gamma$
$\Rightarrow \exists \mathfrak{A}' \exists \gamma : \quad \mathfrak{A} \vDash \Gamma_0[\gamma] \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi_1[\gamma] ... \mathfrak{A} \vDash \varphi_n[\gamma] \Rightarrow \varphi_1 ... \varphi_n \vdash$ - не т.и.

$\square$