Лекции по матлогу

Зайцев Вадим

2010-03-23

0.0.1 теорема Гёделя о полноте

φ - тождественно-истинна $\Leftrightarrow$ φ - доказуема.

Доказательство. (от противного):
Пусть φ - тождественно-истинна и недоказума.
$\dfrac{\neg\varphi \vdash}{\vdash \varphi}$
$\neg\varphi \vdash$ - доказумеа $\Rightarrow \vdash \varphi$ - доказуема $\Rightarrow \varphi$ - доказуема.
$\neg\varphi \vdash$ - не доказумеа $\Rightarrow \Gamma = \{\neg\varphi\} \nvdash \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\mathfrak{A} : \exists\gamma : \mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \neg\varphi[\gamma] \Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi[\gamma]$. Противоречие. φ - т.и. $\square$

0.0.2 Теорема Мальцева о расширении

Пусть $\Gamma \subseteq S(\sigma), \quad \exists\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \models \Gamma \quad ||\mathfrak{B}|| \geq 0$.
$\forall\lambda$ - кардинал $\exists\mathfrak{A} : ||A|| \geq \lambda$ и $\mathfrak{A} \models \Gamma$.
Если для мно-ва предложение γ существует бесконечная модель, то для неё существует модель сколь угодно большой мощности.

Доказательство.
$C - const \quad c \cap \sigma = \varnothing \quad ||C|| = \lambda$
$\Gamma' = \{\neg(c = d) \mid c, d \in C\}$
$\Gamma'' = \Gamma \cup \Gamma'$
Покажем Γ'' - совм. Для этого покажем, что Γ'' - локально совместна и воспользуемся теоремой Мальцева.
$\Gamma''_0 \subseteq \Gamma''$, Γ''_0 - конечное.
$\Gamma''_0 = \Gamma_0 \cup \Gamma', \quad \Gamma_0 \subseteq \Gamma, \Gamma'_0 \subseteq \Gamma$
$\mathfrak{B} \models \Gamma_0, \quad \sigma(\Gamma'_0) = \{c_1, ..., c_k\}$
$\mathfrak{B}$ - бесконечная, следовательно можно выделить конечное число чего-нибудь: $\exists b_1, ..., b_k \in |\mathfrak{B}| : b_i \neq b_j$
$\mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}\}^{\sigma'}, \quad \sigma' = \sigma \cup \{c_1, ..., c_k\}$
$c_i^{\mathfrak{B}'} = b_i$
$\begin{matrix} \mathfrak{B}' \models \Gamma'_0 \\ \mathfrak{B} \models \Gamma_0 \Rightarrow \mathfrak{B}' \models \Gamma_0 \end{matrix} \Rightarrow \mathfrak{B}' \models \Gamma''_0$
Γ''_0 - совместа $\Rightarrow \Gamma''$ - локально $\Rightarrow \Gamma''$ - совместна $\Rightarrow \exists\mathfrak{A}' : \mathfrak{A}' \models \Gamma''$.
$\Gamma = \mathfrak{A}' \setminus \sigma \quad \mathfrak{A} \models \Gamma \quad ||\mathfrak{A}|| \geq ||C|| = \lambda$. $\square$

0.0.3 Замечание

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$
$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$.

0.0.4 Замечание

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma), \quad \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ - конечны $\quad \Rightarrow \quad (\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A})$.

0.0.5 Следствие

Если $\mathfrak{B}$ - бесконечная модель, α - бесконенчый кардинал, то $\exists\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ и $||\mathfrak{A}|| \geq \alpha$.

Доказательство. $\Gamma = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.
$\mathfrak{A}$ - бесконечна, $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$
$\exists\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \Gamma$ и $||\mathfrak{A}|| \geq \alpha$
$\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{B}) \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. С точки зрения теории моделей, невозможно различать бесконечные модели. $\square$

0.0.6 Следствие (Теорема о нестандартной модели натуральных чисел)

Пусть $\mathfrak{N} =< N, \leq, \cdot, +, 0, 1 >$
$\exists \mathfrak{M} : \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N} \quad \exists c \in |\mathfrak{M}| : \forall n \in \mathbb{N} \quad c \geq \underbrace{1+1+...+1}_{n}$

Доказательство. $\Gamma \leftrightharpoons \mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \quad \sigma(\Gamma) = \{\leq, \cdot, +, 0, 1\} \quad \sigma' = \sigma(\Gamma) \cup \{c\}$.
$\varphi_n \leftrightharpoons (c \geq \underbrace{1+1+...+1}_{n}) \quad \Gamma' = \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
$\Gamma'' = \Gamma \cup \Gamma'$
$\Gamma''_0 \subseteq \Gamma''$ - конечно
$\Gamma''_0 = \Gamma_0 \cup \Gamma'_0$
Γ_0, Γ'_0 - конечн.
Γ'_0 - конечно, то $m \leftrightharpoons \max\{n \mid \varphi_n \in \Gamma'_0\}$
$\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}^{\sigma'} \quad c^{\mathfrak{M}} \leftrightharpoons m$.
Например, $\Gamma' = \{\varphi_1, \varphi_2, ...\} \quad \Gamma'_0 = \{\varphi_2, \varphi_5, \varphi_1 00\}$ - мы спокойно можем взять максимум.
$\mathfrak{N}' \vDash \Gamma'_0$. Например, $\Gamma'_0 = \{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_1 54\}$, $m = 154$. $\quad \varphi_2^{\mathfrak{N}'} = 154 \geq 1+1, \quad \varphi_5^{\mathfrak{N}'} = 154 \geq 1+1+1+1+1$
$\Gamma = \mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \Rightarrow \mathfrak{N} \vDash \Gamma$
$\Gamma_0 \subseteq \Gamma \Rightarrow \mathfrak{N} \vDash \Gamma_0$
$\left.\begin{matrix} \mathfrak{N}' \vDash \Gamma'_0 \\ \mathfrak{N} \vDash \Gamma_0 \Rightarrow \mathfrak{N}' \vDash \Gamma'_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathfrak{N}' \vDash \Gamma''_0 \quad \Gamma''_0$ - совместна $\Rightarrow \Gamma''$ - локально совместна $\Rightarrow \Gamma''$ - совместна. $\exists \mathfrak{M}' : \mathfrak{M}' \vDash$
$\Gamma'' = \Gamma \cup \Gamma' \quad \mathfrak{M} \vDash \Gamma$
$\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \setminus \sigma \quad \mathfrak{M} \vDash \Gamma \Rightarrow \mathfrak{M} \vDash \mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \Rightarrow \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ □

1 Исчсления Гильбертовского типа

1.1 Аксиомы

1...10 - аналогично.

1. $\forall x \varphi(x) \to [\varphi]^x_t$
2. $[\varphi]^x_t \to \exists x \varphi(x)$
3. $x = x$
4. $x = y \to ([\varphi]^z_x \to [\varphi]^z_y)$

1.2 Правила вывода

1. $\dfrac{\varphi, \varphi \to \xi}{\xi}$
2. $\dfrac{\varphi \to \xi}{\varphi \to \forall x \xi}$
3. $\dfrac{\xi \to \varphi}{\exists x \varphi \to \xi}, \quad x \notin \mathrm{FV}(\varphi)$

1.3 бла бла бла

1.3.1 Определение

Док-во ф-лы $\varphi \rhd \varphi$

1.3.2 Определение

Вывод ф-лы φ из мно-ва $\Gamma \quad \Gamma \rhd \varphi$

1.3.3 Замечание

φ - доказуема в $\quad \Rightarrow \quad \varphi = [\varphi]^{P_1 \ldots P_n}_{\varphi_1 \ldots \varphi_n}$ док-мы в ИПГТ.

1.3.4 Теорема о дедукции

$\Gamma \cup \{\varphi\} \rhd \varphi \Rightarrow \Gamma \rhd \varphi \to \xi$

1.3.5 Следствие

$\varphi_1 ... \varphi_n \rhd \varphi \quad \Rightarrow \quad \rhd(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to ...(\varphi_{n-1} \to \varphi_n)...)$

1.3.6 Теорема

Γ - конечно.

1. $\Gamma \rhd \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$ - доказуема
2. $\rhd \varphi \Leftrightarrow \varphi$ - доказумеа.