Лекции по матлогу

Зайцев Вадим

2010-04-06

0.1 Универсальные функции

$K = \{g \mid g : N^n \to N\}$
Ф-ия $f : N^{n+1} \to N$ является универсальной для класса K, если:

1. $\forall m \in \mathbb{N} \quad f(m, x_1, ..., x_n) \in K$
2. $\forall g(x_1, ..., x_n) \in K \quad \exists m \in \mathbb{N} : f(m, x_1, ..., x_n) = g(x_1, ..., x_n)$

$K = \{f(m, x_1, ..., x_n) \mid m \in \mathbb{N}\}$

0.1.1 Замечание

Класс K имеет универсальную ф-ию $\Leftrightarrow$ он конечен или счётен.

0.1.2 Определение

Класс всех частичных ф-ий не имеет УФ.

0.1.3 Следствие

ПРФ, ОРФ, ЧРФ имеют УФ.

0.1.4 Предложение

$h : N \to N$ взаимно-однозначна. $f(x_0, \overline{x})$ - УФ для K^n. $f(h(x_0), \overline{x})$ - УФ для K^n.

1. $\forall m \in \mathbb{N} \quad \overline{x}) = f(m', \overline{x}) = k^n$
2. $\forall g(\overline{x}) \in K^n \quad \exists m' : f(m', \overline{x}) = g(\overline{x}) \quad m = h^{-1}(m')$
   $f(m', \overline{x}) = f(h(m), \overline{x}) = g(\overline{x})$

0.1.5 Следствие

Если K^n имеет УФ, то K^n имеет конт. (континуум?) УФ.

0.1.6 Следствие

ПРФ^n,ОРФ^n,ЧРФ^n имеют конт. УФ.

0.1.7 Теорема

1. ПРФ^n не имеет У-ПРФ$^{n+1}$.
2. ОРФ^n не имеет У-ОРФ$^{n+1}$.
3. ОРФ^n не имеет У-ЧРФ$^{n+1}$.

Доказательство. От противного:

1. Предположим, что $f(x_0, \overline{x})$ - ПРФ$^{n+1}$ и УФ для ПРФ^n
   $f(x_1, ..., x_n) = f(x_1, x_1, ...x_n) + 1 \in$ ПРФ ^{n}
   $\exists m \in \mathbb{N} : f(m, x_1, ..., x_n) = g(x_1, ..., x_n)$
   $f(m, m, ..., m) = f(m, ..., m) = f(m, m, ..., m) + 1$. противоречие.
2. аналогично, только заменить ПРФ на ОРФ.

3. $f(x_0, \overline{x})$ - ЧРФ$^{n+1}$, УФ для ПРФ^n
   Тогда $\forall k_0, k_1, ..., k_m \in \mathbb{N} \quad f(k_0, k_1, ..., k_m) \in$ ОРФ^n
   $f(k_0, k_1, ..., k_n)$ - определена. $\Rightarrow f$ - ОРФ. Противоречие.

$\square$

0.1.8 Теорема

ЧРФ^n имеет У-ЧРФ$^{n+1}$.

Доказательство. $f(x_0, x_1, ..., x_n) = l(\mu y[|T^n(x_0, x_1, ..., x_n, l(y, r(y) - 1| = 0])$

1. $m \in \mathbb{N} : f(m, x_1, ..., x_n) \in$ ЧРФ^n.
2. $g(x_1, ...x_n) \in$ ЧРФ$^n \Rightarrow g(x_1, ..., x_n =??? \Rightarrow$ П - выч. $g(x)$.
   $a = \gamma(\Pi)$.
3. $g(x_1, ..., x_n)$ - не определена $\Rightarrow \forall z, f \in \mathbb{N} \quad T^n(a, x_1, ..., x_n, z, f) = 0$.
   $T^n(a, x_1, ..., x_n, z, f) = \begin{cases} 1, & a = \gamma(\Pi) \quad bq_1 1^{x_1+1}0...1^{x_n+1} \overset{\Pi}{\Rightarrow} ... \leq t \text{ шагов} \\ 0 \end{cases}$
4. $g(x_1, ..., x_n) = z$
   $\exists t : 0q_1 1^{x_1+1}0...1^{x_n+1}0 \overset{\Pi}{\Rightarrow} 0q_0 1^{z+1}0$
   $T^n(a, x_1, ...x_n, z, t) = 1$
   $\forall z', t' : T^n(a, x_1, ...x_n, z, t) = 1 \Rightarrow z' = z,\, t' \geq t$
   $y \leftrightharpoons c(z, t)\, y' \leftrightharpoons c(z', t') \quad y \leq y'$
   $y = \min\{y' \mid T^n(a, x_1, ...x_n, l(y'), r(y')) = 1\} \quad f(a, x_1, ...x_n) = z.$

$\square$

0.1.9 Определение

$\varphi^2(x_0, x_1) \leftrightharpoons l(\mu y[T^1(x_0, x_1, l(y), r(y) - 1) = 0])$

0.1.10 Следствие

φ^2 - УФ для ЧРФ^2.

0.1.11 Определение

$\varphi^{n+1}(x_0, x_1, ...x_n) \leftrightharpoons \varphi^2(x_0, c^n(x_1, ...x_n))$
$c(x, y) = z \quad l(z) = x,\, r(z) = y$
$c^n(x_1, ..., x_n) = z \quad c^n_\xi(z) = x_i...$

0.1.12 хрень

1. $\forall m \in \mathbb{N} \quad \varphi^{n+1}(m, x_1, ..., x_n) = \varphi^2(m, c^n(x_1, ..., x_n))$