Математический анализ. Лекции.

Кренделев Сергей Федорович

2009г.

Оглавление

Глава 1

Интегралы, зависящие от параметра

1.1 Основные определения

Определение 1.1.1 *Пусть* $f : \langle a, b\rangle \times U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, U *открыто в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда* f *можно записать в виде:* $f(x, \overline{\alpha})$, $x \in \langle a, b\rangle$, $\overline{\alpha} \in U \subset \mathbb{R}^n$. $f(x, \overline{\alpha})$, $f_{\overline{\alpha}}(x)$ *- функции, зависящие от параметра* $\overline{\alpha}$.

Определение 1.1.2 *(равномерное стремление)*

Пусть $f(x, \overline{\alpha})$ *- функция, зависящая от параметра. Пусть* $\overline{\alpha}_0 \in U$. *Будем говорить, что* $f(x, \overline{\alpha})$ *равномерно стремится к* $f(x, \overline{\alpha}_0)$ *на* $\langle a, b\rangle$, *при* $\overline{\alpha} \to \overline{\alpha}_0$ *в смысле* $\mathbb{R}^n$ $(\|\overline{\alpha} - \overline{\alpha}_0\|_n \to 0)$ *если:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \mid \|\overline{\alpha} - \overline{\alpha}_0\| < \delta \ \Rightarrow\ \|f(x, \overline{\alpha}) - f(x, \overline{\alpha}_0)\|_m < \varepsilon,\ \forall x \in \langle a, b\rangle$$

. Обозначение: $f(x, \overline{\alpha}) \rightrightarrows f(x, \overline{\alpha}_0)$ *при* $\overline{\alpha} \to \overline{\alpha}_0$.

Определение 1.1.3 *(интегрла, зависящего от параметра)*

Будем рассматривать функции при $m = 1$ *на* $[a, b]$. *Рассмотрим выражение:*

$$F(\overline{\alpha}) = \int\limits_a^b f(x, \overline{\alpha})\, dx \qquad (*)$$

Будем называть $F(\overline{\alpha})$ *интегралом, зависящим от параметра при условии, что* $F(\overline{\alpha})$ *определено.*

Лемма 1.1.4 *(о предельном переходе в интеграле, зависящем от параметра)*

Пусть $f(x,\overline{\alpha}) \rightrightarrows f(x,\overline{\alpha}_0)$ *на* $[a,b]$. *Тогда* $F(\overline{\alpha}) \to F(\overline{\alpha}_0)$ *при* $\overline{\alpha} \to \overline{\alpha}_0$. *Это означает, что*

$$\lim_{\overline{\alpha}\to\overline{\alpha}_0} F(\overline{\alpha}) = \lim_{\overline{\alpha}\to\overline{\alpha}_0} \int\limits_a^b f(x,\overline{\alpha})\,dx = \int\limits_a^b \lim_{\overline{\alpha}\to\overline{\alpha}_0} f(x,\overline{\alpha})\,dx = F(\overline{\alpha}_0)$$

$\square$ **Доказательство.** Пусть $\varepsilon > 0,\ \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|b-a|}$. Рассмотрим:

$$|F(\overline{\alpha}) - F(\overline{\alpha}_0)| = |\int\limits_a^b f(x,\overline{\alpha})\,dx - \int\limits_a^b f(x,\overline{\alpha}_0\,dx| =$$

$$= |\int\limits_a^b [f(x,\overline{\alpha}) - f(x,\overline{\alpha}_0]\ dx| \leqslant \int\limits_a^b |f(x,\overline{\alpha}) - f(x,\overline{\alpha}_0)|\,dx.$$

Так как $f(x,\overline{\alpha}_0) \rightrightarrows f(x,\overline{\alpha}_0)$ при $\overline{\alpha} \to \overline{\alpha}_0$ выберем $\delta > 0\ \mid |f(x,\overline{\alpha}) - f(x,\overline{\alpha}_0)| < \varepsilon_1,\ \forall x \in [a,b]$
Это возможно в силу равномерной сходимости.

Пусть $\overline{\alpha} \mid \|\overline{\alpha} - \overline{\alpha}_0\|_n < \delta$

$$|F(\overline{\alpha}) - F(\overline{\alpha}_0)| \leqslant \int\limits_a^b \varepsilon_1\,dx = \varepsilon_1 \cdot |b-a| = \varepsilon$$

Получили:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \mid \|\overline{\alpha} - \overline{\alpha}_0\|_n < \delta \Rightarrow |F(\overline{\alpha}) - F(\overline{\alpha}_0)| < \varepsilon$$

Это означает, что $\exists \lim_{\overline{\alpha}\to\overline{\alpha}_0} F(\overline{\alpha}) = F(\overline{\alpha}_0)$. $\blacksquare$

Теорема 1.1.5 *(о непрерывности интеграла, зависящего от параметра)*

Пусть $f(x,\overline{\alpha})$ *непрерывная функция от* $(n+1)$ *переменного в области* $[a,b] \times U,\ U \subset \mathbb{R}^n$ *- открыто.*

Тогда $F(\overline{\alpha})$ *непрерывна на* U.

$\square$ **Доказательство.**

Пусть $\overline{\alpha}_0 \in U,\ \overline{\alpha}_0$ - произвольное. Тогда, в силу открытости множества $U\quad \exists B_\delta(\overline{\alpha}_0) \subset U\ \Rightarrow\ \exists I^n \subset B_\delta(\overline{\alpha}_0),\quad \overline{\alpha}_0 \in I^n$. I^n - замкнутый.

Рассмотрим $I^{n+1} \subset [a,b] \times I^n$. I^{n+1} - замкнутое и ограниченное $\Rightarrow$ компактное.

$f(x,\overline{\alpha})$ по условию непрерывна на I^{n+1}. Следовательно, по теореме Вейерштрасса она равномерно-непрерывна. $\Rightarrow$ при $\overline{\alpha} \to \overline{\alpha}_0\quad f(x,\overline{\alpha}) \rightrightarrows f(x,\overline{\alpha}_0)$.

По лемме отсюда следует, что $F(\overline{\alpha}) \to F(\overline{\alpha}_0)$ при $\overline{\alpha} \to \overline{\alpha}_0$. Отсюда следует, что $F(\overline{\alpha})$ непрерывна в точке $\overline{\alpha}_0$.

$\overline{\alpha}_0$ выбиралась произвольно в U. Следовательно, $F(\overline{\alpha})$ непрерывна на U. $\blacksquare$

Условие теоремы не является необходимым и достаточным.

1.2 Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра

Теорема 1.2.1 *(о дифференцируемости интеграла, зависящего от параметра)*
Пусть $f(x, \overline{\alpha}) : [a, b] \times U- > \mathbb{R}$. $f(x, \overline{\alpha})$ *непрерывна как фнукция* $(n+1)$ *аргумента.*

Предположим, что в точке $\overline{\alpha}_0$ *существует частная производная* $\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}(\overline{\alpha}_0)$ *для некоторого* i. *Причем* $\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$ *непрерывна в окрестности точки* $\overline{\alpha}_0$. *Тогда*

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_i}(\overline{\alpha}_0) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}(x, \overline{\alpha}_0)\, dx$$

□ **Доказательство.**

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_{0_i}}(\overline{\alpha}_0) = \lim_{\tau \to \alpha_{0_i}} \frac{F(\alpha_{0_1}, \ldots, \alpha_{0_{i-1}}, \tau, \alpha_{0_{i+1}}, \ldots, \alpha_{0_n}) - F(\overline{\alpha}_0)}{\tau - \alpha_{0_i}} =$$

$$= \frac{1}{\tau - \alpha_{0_i}} \left[\int\limits_a^b [f(x, \alpha_{0_1}, \ldots, \alpha_{0_{i-1}}, \tau, \alpha_{0_{i+1}}, \ldots, \alpha_{0_n}) - f(x, \overline{\alpha}_0)]\, dx \right] =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{[f(x, \alpha_{0_1}, \ldots, \alpha_{0_{i-1}}, \tau, \alpha_{0_{i+1}}, \ldots, \alpha_{0_n}) - f(x, \overline{\alpha}_0)]}{\tau - \alpha_{0_i}}\, dx =$$

$=$ так как $\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}(\overline{\alpha}_0)$ - непрерывна, то по теореме о предельном переходе $=$

$$= \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}(x, \overline{\alpha}_0) dx$$

■

Пример 1.2.2 *(типичное приложение)*

$$I(10) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(100 - \sin^2 x)\, dx$$

$$I(t) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t^2 - \sin^2 x)\, dx$$

$\ln(t^2 - \sin^2 x)$ *очевидно непрерывная на множестве* $(1, \infty) \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\ln(t^2 - \sin^2 x)\right) = \frac{2t}{t^2 - \sin^2 t} \quad \textit{непрерывна на } (1, \infty) \times [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$I'(t) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t}{t^2 - \sin^2 x}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

$$I(t) = \int \frac{\pi}{\sqrt{t^2 - 1}}\, dt = \pi \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) + C$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t^2 - \sin^2 x)\, dx = \pi \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) + C$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t^2 - \sin^2 x)\, dx - \pi \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) = C \quad \forall t > 1 \quad C = ?$$

$$C = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(t^2 \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 x}{t^2}\right)\right) dx - \pi \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\ln t^2 + \ln\left(1 - \frac{\sin^2}{t^2}\right)\right) dx -$$

$$- \pi \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln t^2\, dx + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 - \frac{\sin^2}{t^2}\right) dx - \pi \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 2 \ln t - \pi \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 - \frac{\sin^2}{t^2}\right) dx = \pi \cdot \ln \frac{t}{t + \sqrt{t^2 - 1}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 - \frac{\sin^2}{t^2}\right) dx$$

$$\lim_{t \to \infty} \pi \cdot \ln \frac{t}{t + \sqrt{t^2 - 1}} = \lim_{t \to \infty} \pi \cdot \ln \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}} = \pi \ln \frac{1}{2} = -\pi \ln 2$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1-\frac{\sin^2}{t^2}\right)dx = \left[\frac{1}{t}=\tau\right] = \lim_{\tau\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1-\tau^2\sin^2\right)dx =$$

$$= \langle ln\big(1-\tau^2\sin^2\big) \textit{ непрерывна как функция двух переменных на интервале } [0,\tau_0]\times[0,\frac{\pi}{2}]\rangle =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\tau\to 0} ln\big(1-\tau^2\sin^2\big)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1)\,dx = 0 \Rightarrow C = -\pi\ln 2$$

$$\Rightarrow I(t) = \pi\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right) - \pi\ln 2 = \pi\ln\frac{t+\sqrt{t^2-1}}{2}$$

$$I(10) = \pi\ln\frac{10+\sqrt{99}}{2}$$

Теорема 1.2.3 *(формула Ньютона-Лейбница)*

Пусть дано множество $[a,b]\times[c,d]$*.* $f(x,t)$ *определена на множестве* $[a,b]\times[c,d]$*. Предположим, что даны две функции* $\phi(t)$ *и* $\psi(t)$*, определенные на* $[c,d]$*. Введем* $F(t) = \int\limits_{\phi(t)}^{\psi(t)} f(x,t)\,dx \ \forall t \in [c,d]$ $[\phi(t),\psi(t)] \subset [a,b]$*. При условии, что* $\phi(t) \leqslant \psi(t)$*.* $\phi(t)$*,* $\psi(t)$ *непрерывны на* $[c,d]$ *и дифференцируемы на* (c,d)*,* $f(x,t)$ *непрерывна на* $[a,b]\times[c,d]$*. Тогда:*

$$\boxed{\frac{dF}{dt}(t_0) = \int_{\phi(t_0)}^{\psi(t_0)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,dx + \psi'(t_0)\cdot f(\psi(t_0),t_0) - \phi'(t_0)\cdot f(\phi(t_0),t_0)}$$

Эта формула называется формулой Ньютона-Лейбница.

□ **Доказательство.**

$$\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}=\frac{1}{t-t_0}\left(\int\limits_{\phi(t)}^{\psi(t)} f(x,t)\,dx-\int\limits_{\phi(t_0)}^{\psi(t_0)} f(x,t_0)\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{t-t_0}\cdot\left(\int\limits_{\phi(t)}^{\phi(t_0)} f(x,t)\,dx+\int\limits_{\phi(t_0)}^{\psi(t_0)} f(x,t)\,dx+\int\limits_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} f(x,t)\,dx-\int\limits_{\phi(t_0)}^{\psi(t_0)} f(x,t_0)\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{t-t_0}\cdot\int\limits_{\phi(t_0)}^{\psi(t_0)} (f(x,t)-f(x,t_0))\,dx+\frac{1}{t-t_0}\cdot\int\limits_{\phi(t)}^{\phi(t_0)} f(x,t)\,dx+\frac{1}{t-t_0}\cdot\int\limits_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} f(x,t)\,dx=$$

$$=I_1+I_2+I_3$$

$$I_1=\int\limits_{\phi(t_0)}^{\psi(t_0)} \frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}\,dx\Rightarrow\lim_{t\to t_0} I_1=\int\limits_{\phi(t)}^{\psi(t)}\lim_{t\to t_0}\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}\,dx=$$

$$=\int\limits_{\phi(t)}^{\psi(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,dx$$

$$\left|I_3-\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}f(\psi(t_0),t_0)\right|=\left|\frac{1}{t-t_0}\cdot\int\limits_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} f(x,t)\,dx-\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}f(\psi(t_0),t_0)\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{t-t_0}\cdot\int\limits_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} f(x,t)\,dx-\frac{1}{t-t_0}\cdot\int\limits_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} f(\psi(t_0),t_0)\,dx\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{t-t_0}\cdot\int\limits_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} (f(x,t)-f(\psi(t_0),t_0))\,dx\right|$$

Так как $\psi(t)\to\psi(t_0)$ при $t\to t_0$ то $\forall\varepsilon\ \exists\delta>0\ |\ |t-t_0|<\delta\Rightarrow|f(x,t)-f(\psi(t_0),t)|<\varepsilon$.

Тогда:

$$\left|I_3 - \frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0} f(\psi(t_0), t_0)\right| \leqslant \frac{1}{|t-t_0|} \cdot \int\limits_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} |f(x,t) - f(\psi(t_0), t_0)|\, dx$$

$$\leqslant \frac{1}{|t-t_0|} \cdot \int\limits_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} \varepsilon\, dx = \frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0} \cdot \varepsilon \leqslant \varepsilon \cdot M$$

где M - такое число, что $\left|\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}\right| \leqslant M$ при $|t-t_0| < \delta$. M существует, так как функция ψ дифференцируема в t_0.

$$\Rightarrow \exists \lim_{t\to t_0} \left(I_3 - \frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0} f(\psi(t_0), t_0)\right) = 0$$

$$\lim_{t\to t_0} I_3 = \lim_{t\to t_0} \frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0} f(\psi(t_0), t_0) = \psi'(t_0) \cdot f(\psi(t_0), t_0)$$

I_2 - аналогично. ■

Пример 1.2.4 *(типичное приложение)*

$$F(x) = \int\limits_a^b |x-y| \cdot v(y)\, dy$$

$v(y)$ непрерывна на $[a,b]$.

$$F''(x) = ?$$

$$|x-y| = \begin{cases} x-y, & x \geqslant y \\ -(x-y), & x < y \end{cases}$$

$$F(x) = \int\limits_a^x (x-y) \cdot v(y)\, dy - \int\limits_x^b (x-y) \cdot v(y)\, dy \quad [\textit{интеграл по } dy \Rightarrow y < x]$$

$$F'(x) = \int\limits_a^x v(y)\, dy + 1 \cdot ((x-x) \cdot v(x)) - 0 \cdot (a-y) \cdot v(a) - \int\limits_x^b v(y)\, dy = \int\limits_a^x v(y)\, dy - \int\limits_x^b v(y)\, dy$$

$$F''(x) = 0 + 1 \cdot v(x) - 0 + 1 \cdot v(x) = 2 \cdot v(x)$$

1.3 Интегрирование интегралов, зависящих от параметра

Теорема 1.3.1 *Пусть на множестве* $[a, b] \times [c, d]$ *задана непрерывная функция* $f(x, y)$.

Тогда определены две функции:

$$F(x) = \int\limits_c^d f(x, y)\, dy$$

$$\varPhi(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx$$

Такие, что $F(x)$ *- интегрируема на* $[a, b]$, $\varPhi(y)$ *интегрируема на* $[c, d]$. *Причем*

$$\int\limits_a^b F(x)\, dx = \int\limits_c^d \varPhi(y)\, dy$$

Обычно это равенство записывают в виде:

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)\, dx \right) dy =$$
$$= \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

□ **Доказательство.**

В силу теорем о предельном переходе и о непрерывности интегралов, зависящих от параметра $F(x),\ \varPhi(y)$ - непрерывны на $[a, b]$и $[c, d]$соответственно. Следовательно $F(x),\ \varPhi(y)$ интегрируемы по Риману $\Rightarrow \int\limits_a^b F(x)\, dx$ и $\int\limits_c^d \varPhi(y)\, dy$

определены. Введем

$$\phi(t) = \int\limits_c^t \int\limits_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\psi(t) = \int\limits_a^b \int\limits_c^t f(x,y)\,dy\,dx$$

$$\phi(c) = 0 \quad \psi(c) = 0$$

$$\phi'(t) = \left(\int\limits_c^t \varPhi(y)\,dy\right)' = \varPhi(t) = \int\limits_a^b f(x,t)\,dx$$

$$\psi'(t) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^t f(x,y)\,dy\right)' dx = \int\limits_a^b f(x,t)\,dx$$

$$\Rightarrow \psi'(t) = \phi'(t)$$

$$\Rightarrow (\phi(t) - \psi(t))' = 0 \Rightarrow \phi(t) - \psi(t) = const \quad \phi(c) - \psi(c) = 0$$

$$\Rightarrow const = 0 \quad \Rightarrow \phi(t) = \psi(t)$$

$$\Rightarrow lim_{t\to d}\phi(t) = lim_{t\to d}\psi(t)$$

$$\phi(d) = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right) dy \quad \psi(d) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$$

■

Пример 1.3.2 *(типичный) Пусть* $\alpha > 0, \beta > 0$*. Вычислим* $\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{\ln x}\,dx$*.*

$$\int\limits_\alpha^\beta x^y\,dy = \left.\frac{x^y}{\ln x}\right|_\alpha^\beta = \frac{x^\alpha - x^\beta}{\ln x}$$

$$\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{\ln x}\,dx = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_\alpha^\beta x^y\,dy\right) dx = \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_0^1 x^y\,dx\right) dy =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \left(\left.\frac{x^{y+1}}{y+1}\right|_0^1\right) dy = \int\limits_\alpha^\beta \frac{dy}{y+1} = \ln(1+y)|_\alpha^\beta =$$

$$= \ln(|1+\beta|) - \ln(1-\alpha) = \ln\frac{1+\beta}{1-\alpha}$$

1.4 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Определение 1.4.1 *(несобственного интеграла, зависящего от параметра)*

$$\lim_{t\to w}\int\limits_a^t f(x,\alpha)\,dx = \int\limits_a^w f(x,\alpha)\,dx \quad \alpha\in A\subset\bar{\mathbb{R}}$$

Если предел существует, то он называется несобственным интегралом, зависящим от параметра. Обозначим:

$$F(\alpha)=\int\limits_a^w f(x,\alpha)\,dx \quad \alpha\in A$$

Определение 1.4.2 *(равномерная сходимость несобственного интеграла)*
Пусть $F(\alpha)=\int\limits_a^w f(x,\alpha)\,dx \quad \alpha\in A\subset\bar{\mathbb{R}}$. *Будем говорить, что несобственный интеграл равномерно сходится на* A*, если*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists B \mid \forall p\in[B,w) \quad \left|\int\limits_p^w f(x,\alpha)\,dx\right|<\varepsilon\ \forall\alpha\in A$$

.

Теорема 1.4.3 *(о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра) .*
Пусть

$$F(\alpha)=\int\limits_a^w f(\alpha,x)\,dx \qquad (*)$$

$f(\alpha,x)$ *непрерывна на* $[c,d]\times[a,w)$*, интеграл равномерно сходится на* $[c,d]$*.*
Тогда
$F(\alpha)$ *непрерывна на* $[c,d]$*.*

□ **Доказательство.** Пусть $\varepsilon>0$ произвольно. В силу равномерной сходимости (*)

$$\exists B \ \mid\ \forall p>B\left|\int\limits_p^w f(\alpha,x)\,dx\right|<\varepsilon\ \ \forall\alpha\in[c,d]$$

Рассмотрим функцию $G(\alpha, q) = \int\limits_a^q f(\alpha, x)\, dx$. Так как (*) существует $\forall \alpha \in [c, d]$, то

$$\exists \lim_{q \to w} G(\alpha, q) = \lim_{q \to w} \int\limits_a^q f(\alpha, x)\, dx = G(\alpha, w) = F(\alpha)$$

Нужно доказать непрерывность G.

Пусть $q > B$. Рассмотрим

$$|G(\alpha, w) - G(\alpha, q)| = \left| \int\limits_a^w f(\alpha, x)\, dx - \int\limits_a^q f(\alpha, x)\, dx \right| =$$

$$= \left| \int\limits_q^w f(\alpha, x)\, dx \right| \leqslant \varepsilon \ \text{ так как } q > B \ \ \forall \alpha \in [c, d] \text{ в силу равномерной сходимости.}$$

$$|G(\alpha, w) - G(\alpha, q)| \leqslant \varepsilon \quad \forall \alpha \in [c, d] \ \ (q > B)$$

Следовательно $G(\alpha, q)$ имеет равномерное стремление к $G(\alpha, w)$. То есть $G(\alpha, q) \rightrightarrows G(\alpha, w)$ при $q \to w$. $G(\alpha, q)$ - непрерывная функция. Это следует из теоремы о непрерывности интеграла, зависящего от параметра. Следовательно $G(\alpha, w)$ непрерывна. ■

Теорема 1.4.4 *(дифференцируемость несобственного интеграла, зависящего от параметра) .*
Пусть

$$F(\alpha) = \int\limits_a^w f(\alpha, x)\, dx \qquad (*)$$

.
Пусть
$f(\alpha, x)$ непрерывна на $(c, d) \times [a, w)$. Если $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)$ - непрерывна на $(c, d) \times [a, w)$, $\int\limits_a^w \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\, dx$ сходится равномерно,
Тогда
$F(\alpha)$ дифференцируема на (c, d)и имеет место:

$$\boxed{\frac{dF}{d\alpha}(\alpha) = \int\limits_a^w \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\, dx \qquad (**)}$$

□ **Доказательство.** Введем $F(\alpha, p) = \int\limits_a^p f(\alpha, x)\, dx$. Тогда по теореме об обычном интеграле существует

$$\frac{dF}{d\alpha}(\alpha, p) = \int\limits_a^p \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\, dx$$

В силу равномерной сходимости интеграла (**) получаем, что

$$\frac{dF}{d\alpha}(\alpha, p) \rightrightarrows \frac{dF}{d\alpha}(\alpha, w) \;\; \forall \alpha \in (c, d)$$

Откуда получаем требуемое. ■

Теорема 1.4.5 *(об интегрируемости несобственного интеграла, зависящего от параметра) .*
Пусть
$f(x, y)$ непрерывна на $[a, w) \times [c, d]$. Пусть $\Phi(y) = \int\limits_a^w f(x, y)\, dx$ сходится равномерно на $[c, d]$. $F(x) = \int\limits_c^d f(x, y)\, dy$ определена и интегрируема на $[c, d]$.
Тогда

$$\int\limits_a^w F(x)\, dx = \int\limits_c^d \Phi(y)\, dy$$

□ **Доказательство.** Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы для собственных интегралов. ■

1.5 Критерии равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра

$$F(\alpha) = \int\limits_a^w f(\alpha, x)\, dx \quad \alpha \in A \qquad (*)$$

Теорема 1.5.1 *(критерий Коши)*

Для того, чтобы (*) равномерно сходился на множестве A необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists B \in [a, w) \mid \ \forall\gamma, \beta \ \mid [\gamma, \beta] \subset [B, w) \qquad \left|\int\limits_{\gamma}^{\beta} f(\alpha, x)\, dx\right| < \varepsilon \ \ \forall\alpha \in A$$

□ **Доказательство.**

Необходимость

Пусть (*) сходится равномерно на A. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists B \in [a, w) \mid \ \forall\gamma \in [B, w)$

$\left|\int\limits_{\gamma}^{w} f(\alpha, x)\, dx\right| < \dfrac{\varepsilon}{2} \ \ \forall\alpha \in A$ пусть $\beta > \gamma$.

$$\left|\int\limits_{\gamma}^{\beta} f(\alpha, x)\, dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{\gamma}^{w} f(\alpha, x)\, dx - \int\limits_{\beta}^{w} f(\alpha, x)\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{\gamma}^{w} f(\alpha, x)\, dx\right| + \left|\int\limits_{\beta}^{w} f(\alpha, x)\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Необходимость доказана.

Достаточность

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда в силу выполнения критерия Коши $\exists B \in [a, w) \quad \mid \quad \forall\gamma, \beta \in [B, w) \ \left|\int\limits_{\gamma}^{\beta} f(\alpha, x)\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ для $\forall\alpha \in A$. $\quad \Rightarrow$

Существует предел

$$\lim_{\beta\to w} \left|\int\limits_{\gamma}^{\beta} f(\alpha, x)\, dx\right| = \left|\int\limits_{\gamma}^{w} f(\alpha, x)\, dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall\alpha \in A$$

Это и есть равномерная сходимость. ■

Теорема 1.5.2 *(критерий Вейерштрасса)*

Пусть (*). Предположим, что $\exists H(x)$ такая, что

$$1)\ |f(\alpha, x)| \leqslant H(X) \quad \forall\alpha \in A;$$

$$2)\ \int\limits_{a}^{w} H(X)\, dx \quad \textit{сходится}$$

Тогда (*) сходится равномерно на A.

□ **Доказательство.**

Очевидно следует из критерия Коши. ■

Теорема 1.5.3 *(критерий Абеля-Дирихле)* .
Пусть

$$F(y) = \int\limits_a^w f(x,y) \cdot g(x,y)\,dx \quad y \in [c,d]$$

1) $f(x,y),\ g(x,y),\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ *непрерывны на* $[a,w) \times [c,d]$*;*

2)$H(x,y) = \int\limits_a^x f(t,y)\,dt$

$H(a,y) = 0 \quad \forall y \in [c,d]$

$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = f(x,y)$

Предположим, что $H(x,y)$ *удовлетворяет следующему условию:*

$$\exists c > 0 \ \mid \ |H(x,y)| \leqslant c \ \ \forall x,y \in [a,w) \times [c,d]$$

3) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \leqslant 0 \ \ \forall x,y \in [a,w) \times [c,d]$

4) Существует функция $\psi(x) \quad \mid \ \lim_{x\to w} \psi(x) = 0$ *и*

$|g(x,y)| \leqslant \psi(x) \ \ \forall x,y \in [a,w) \times [c,d]$

Тогда

несобственный интеграл $F(y) = \int\limits_a^w f(x,y) \cdot g(x,y)\,dx$ *имеет смысл и равномерно сходится.*

□ **Доказательство.**

Очевидно, что $\forall y \in [c,d]$ фиксированного, выполнено условие сходимости Абеля-Дирихле. Следовательно, интеграл определен.
Пусть $\varepsilon > 0$. Из условия 4 следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists a^1 \in [a,w) \quad \mid \ \ |\psi(x)| < \frac{\varepsilon}{2c} \ \ \forall x \in [a^1, w)$$

где c берется из пункта 2.

Пусть $\xi \in [a^1, w)$ произвольно.

$$\int\limits_{\xi}^{w} f(x,y)g(x,y)\,dx = \int\limits_{\xi}^{w} \frac{\partial H}{\partial x}(x,y)\cdot g(x,y)\,dx =$$

$$= H(x,y)g(x,y)|_{\xi}^{w} - \int\limits_{\xi}^{w} H(x,y)\cdot\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dx = -H(\xi,y)\cdot g(\xi,y) -$$

$$-\int\limits_{\xi}^{w} H(x,y)\cdot\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dx$$

$$\left|\int\limits_{\xi}^{w} f(x,y)\cdot g(x,y)\,dx\right| \leqslant |H(\xi,y)\cdot g(\xi,y)| + \left|\int\limits_{\xi}^{w} H(x,y)\cdot\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant |H(x,y)|\cdot|g(x,y)| + \int\limits_{\xi}^{w} |H(x,y)|\cdot\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c\cdot\psi(\xi) + c\cdot\int\limits_{\xi}^{w}\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c\cdot\frac{\varepsilon}{2c} - c\cdot\int\limits_{\xi}^{w}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dx = c\cdot\frac{\varepsilon}{2c} - c\cdot g(w,y) + c\cdot g(\xi,y) \leqslant c\cdot\frac{\varepsilon}{2c} + c\cdot\frac{\varepsilon}{2c} = \varepsilon$$

Получили:

$$\left|\int\limits_{\xi}^{w} fg\,dx\right| \leqslant \varepsilon \quad \forall y \in [c,d]$$

что означает равномерную сходимость. ■

1.6 Эйлеровы интегралы. (Гамма и Бета функции)

Определение 1.6.1 *(Гамма-функции)*

$$\Gamma(x) = \int\limits_{0}^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \qquad x > 0$$

Определение 1.6.2 *(Бета-функции)*

$$\beta(x, y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(t-1)^{y-1}\, dt \qquad x > 0,\ y > 0$$

Теорема 1.6.3 *(связь между Гамма и Бета функциями)*

$$\boxed{\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}}$$

□ **Доказательство.**
Без доказательства. ■

Теорема 1.6.4 *(свойства Гамма-функции)*
1) $\Gamma(x)$ *определена* $\forall x > 0$*;*
2) $\Gamma(x) > 0\ \ \forall x$ *из области определения;*
3) $\Gamma(1) = 1$*;*
4) $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$*;*
5) $\Gamma(n) = (n-1)!$*;*
6) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$*;*
7) (Формула дополнения)

$$\forall x \in (0, 1) \quad \Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

□ **Доказательство.**
1. $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dt = \int\limits_0^1 t^{x-1}e^{-t}\, dt + \int\limits_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dt$
Введем $G(\alpha) = \int\limits_\alpha^1 t^{x-1}e^{-t}\, dt \quad 0 < e^{-t} < 1.$

$$G(\alpha) \leqslant \int\limits_\alpha^1 t^{x-1}\, dt = \left.\frac{t^x}{x}\right|_\alpha^1 = 1/x - \alpha^x/x < 1/x$$

Если $\alpha_1 < \alpha_2$, то $G(\alpha_1) > G(\alpha_2) \quad \Rightarrow \quad G(\alpha)$ - монотонная по α функция, и при этом, ограниченная. Отсюда следует, что

$$\exists \lim_{\alpha \to 0} G(\alpha) = lim_{\alpha\to 0} \int\limits_\alpha^1 t^{x-1}e^{-t}\, dt = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dt$$

Очевидно, что $\forall x\ \exists p \quad |\ t^{x-1}e^{-t} < 1/t^2\ \ \forall t > p$

$$\int\limits_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = \int\limits_1^p t^{x-1}e^{-t}\,dt + \int\limits_p^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

$\int\limits_p^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ сходится по признаку Вейерштрасса, т.к. $|t^{x-1}e^{-t}| < 1/t^2$, а $\int\limits_p^\infty 1/t^2\,dt$ - сходится. Тогда сходится и исходный интеграл. Следовательно $\Gamma(x)$ определен.

2. $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt.$

$t^{x-1}\cdot e^{-t} > 0\ \ \forall x > 0$. По свойству монотонности интеграла $\Gamma(x) > 0$.

3. $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\,dt = 1.$

4. $\Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty t^x e^{-t}\,dt.$

Пусть $0 < \alpha < \beta$ - произвольные числа. Возьмем $\int\limits_\alpha^\beta t^x e^{-t}\,dt$ по частям.

$$\int\limits_\alpha^\beta t^x e^{-t}\,dt = -e^{-t}t^x\Big|_\alpha^\beta + x\cdot\int\limits_\alpha^\beta t^{x-1}e^{-t}\,dt =$$

перейдем к пределу при $\alpha \to 0$

$$= -e^{-\beta}\beta^x + e^{-\alpha}\alpha^x + x\cdot\int\limits_\alpha^\beta t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

$$\int\limits_0^\beta t^x e^{-t}\,dt = -e^{-\beta}\beta^x + x\cdot\int\limits_0^\beta t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

устремим $\beta \to \infty$

$$\int\limits_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = x\cdot\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \quad \Rightarrow \Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$$

5.

$$\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2 \cdot \Gamma(1) = 2$$

действуя по индукции получим

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

6.

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(1/2) = \int\limits_0^\infty t^{-1/2} e^{-t}\, dt =$$

замена: $t = x^2 \;\; dt = 2x\, dx$

$$= 2\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\, dx \quad \text{Интеграл Эйлера-Пуассона}$$

$$\Gamma(1/2) = 2I$$

$$I^2 = \left(\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\, dx\right)^2 = \left(\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\, dx\right) \cdot \left(\int\limits_0^\infty e^{-y^2}\, dy\right) =$$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

замена: $y = xz \;\; dy = xdz$

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-y^2}\, dy = \int\limits_0^\infty e^{-x^2z^2} x\, dz \quad \Rightarrow$$

$$I^2 = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\, dx \int\limits_0^\infty e^{-x^2z^2} x\, dz = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty x e^{-x^2(1+z^2)}\, dx\, dz$$

замена: $w = -x^2(1+z^2) \;\; dz = 2x(1+z^2)\, dx$

$$\int\limits_0^\infty x e^{-x^2(1+z^2)}\, dx = -1/2 \int\limits_0^{-\infty} \frac{e^w}{1+z^2}\, dw = \frac{1}{2(1+z^2)} \int\limits_{-\infty}^0 e^w\, dw = \frac{1}{2(1+z^2)}$$

$$I^2 = \int\limits_0^\infty \frac{1}{2(1+z^2)}\, dz = 1/2\, \mathrm{arctg}(z)|_0^\pi = \pi/4$$

$$\Rightarrow \quad I = \sqrt{\pi}/2 \text{ Интеграл Эйлера-Пуассона}$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

7. Без доказательства. ■

Глава 2

Интегрирование функций многих переменных

2.1 Повторные интегралы

$$I^n = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \quad a_i < b_i, \;\; i = 1..n$$

Определение 2.1.1 *(частичного интеграла) Пусть $f : I^n \to \mathbb{R}$. Частичным интегралом называется выражение:*

$$I_i f = \int\limits_{a_i}^{b_i} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots x_n)\, dt = H_i(x_1, \ldots x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \ldots x_n)$$

Функция $H_i(x_1, \ldots x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \ldots x_n)$ определена на интервале
$[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_{i-1}, b_{i-2}] \times \widehat{[a_i, b_i]} \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \ldots \times [a_n, b_n] = I^{n-1}$

Определение 2.1.2 *(повторного интеграла) Пусть дан набор целых чисел $i_1, i_2, \ldots i_n$. Определены интегралы $I_{i_j} f$. Выражение $I_{i_1} I_{i_2} \ldots I_{i_n} f$ называется повторным интегралом.*

Следовательно, существует $n!$ повторных интегралов. Ниоткуда не следует, что они равны между собой.

Определение 2.1.3 *Будем говорить, что существует кратный интеграл от функции f по I^n если все $n!$ повторных интегралов совпадают.*

В этом случае интеграл записывается так:

$$\int\limits_{I^n} f(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

Теорема 2.1.4 *(о кратном интеграле) .*
Пусть
$f : I^n \to \mathbb{R}$, f *- непрерывна на* I^n.
Тогда
существует $\int\limits_{I^n} f(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$

□ **Доказательство.**

Поскольку f - непрерывна, отсюда следует, что $\forall i = 1..n\ f(x_1, \ldots x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots x_n)$ непрерывна на $[a_i, b_i]$. Следовательно существует $I_i f$. Надо доказать, что $\forall i, j \quad | \; i \neq j \quad I_i I_j f = I_j I_i f$. Это следует из теоремы об интегрировании функций, зависящих от параметра. ■

2.2 Интеграл Римана в $\mathbb{R}^n$

2.2.1 обозначения

$\overline{I^n} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ - замкнутый паралеллепипед.

$I^n = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ - открытый параллелепипед (n-интервал).

$\hat{I}^n = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \ldots \times \langle a_n, b_n \rangle$

$S(I^n) = |b_1 - a_1| \times |b_2 - a_2| \times \ldots \times |b_n - a_n|$ - n-мерный объем I^n.

$diam(I^n) = \sup_{x,y \in I^n} \|x - y\|_n$ -диаметр.

Лемма 2.2.1 *(о пересечении n-интервалов) .*
Пусть
$\hat{I}^n, \;\; \hat{J}^n$ *- два n-интервала.*
Тогда
$\hat{I}^n \cap \hat{J}^n$ *- так же n-интервал.*

□ **Доказательство.**

Пусть $\hat{I}^n = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \ldots \times \langle a_n, b_n \rangle$, $\hat{J}^n = \langle c_1, d_1 \rangle \times \langle c_2, d_2 \rangle \times \ldots \times \langle c_n, d_n \rangle$.
$\hat{I}^n \cap \hat{J}^n = \langle p_1, q_1 \rangle \times \langle p_2, q_2 \rangle \times \ldots \times \langle p_n, q_n \rangle$, где
$p_i = max(a_i, c_i)$
$q_i = max(b_i, d_i)$ ■

Определение 2.2.2 *Разбиением* I^n *называется набор n-мерных интервалов* $J_1^n, \;\; J_2^n \ldots J_k^n$ *таких, что:*

$$J_i^n \cap J_j^n = \varnothing \quad \forall i \neq j$$

$$\bigcup_{l=1}^{k} J_l^n = I^n$$

Разбиение будем обозначать $\xi(I^n)$.

Определение 2.2.3 *Пусть даны два разбиения одного интервала:*
$\xi = I_1^n, \dots I_k^n$
$\eta = J_1^n, \dots J_m^n$
Тогда

$$\xi \oplus \eta = I_i^n \cap I_j^n, \;\; \forall i = 1..k, \;\; \forall j = 1..m$$

Определение 2.2.4 *Пусть даны два разбиения ξ, η. Будем говорить, что η - продолжение разбиения ξ, если:*

$$\forall I_j^n \in \xi \quad \exists J_i^n \;\mid\; I_j^n \subseteq J_i^n$$

Теорема 2.2.5 *(свойства разбиения) .*
Пусть
ξ, η - два разбиения I^n.
Тогда
1. $S(I^n) = \sum_{j=1}^{k} S(I_j^n) = \sum_{j=1}^{n} S(J_j^n)$
2. *$\xi \oplus \eta$ - продолжение разбиения ξ и продолжение разбиения η.*

□ **Доказательство.**Следует из определения. ■

2.3 Ступенчатые функции

Определение 2.3.1 *Пусть $f : I^n \to \mathbb{R}$. f называется ступенчатой, если существует разбиение ξ n-мерного интервала I^n, что $\forall I_i^n \subset \xi$ имеет место $f(x) = c_i \;\; \forall x \in I^n$.*

Лемма 2.3.2 *Пусть f - ступенчатая функция для разбиения ξ.*
Тогда если η - продолжение разбиения ξ, то f - ступенчатая функция для η.

□ **Доказательство.**Очевидно из представления ступенчатой функции.■

Лемма 2.3.3 *.*
Пусть
f, g - две ступенчатые функции на I^n.
Тогда

1)$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda f$ *- ступенчатая функция;*
2)$f + g$ *- ступенчатая функция;*
3)$f \cdot g$ *- ступенчатая функция;* 4)$f \neq 0$ *на* $I^n \quad \Rightarrow \quad 1/f$ *- ступенчатая функкция.*

□ **Доказательство.**

1. Пусть f - ступенчатая функция. Это означает, что существует разбиение $\xi \quad | \quad f(x) = c_i, \forall x \in I_i^n \in \xi$.
Рассмотрим λf. Возьмем разбиение ξ. $\lambda f(x) = \lambda c_i \;\; \forall x \in I_i^n \in \xi$.

2. Пусть $f,\ g$ - ступенчатые. Пусть ξ - разбиение для f. η - разбиение для g. Возьмем разбиение $\xi \oplus \eta$. Это продолжение разбиения $\xi \quad \Rightarrow \quad f$ - ступенчатая на $\xi \oplus \eta$. Аналогично, $\xi \oplus \eta$ - продолжение разбиения $\eta \quad \Rightarrow \quad g$ - сьупенчатая на $\xi \oplus \eta$. Следовательно, $f + g$ - ступенчатая функция на $\xi \oplus \eta$.

3, 4.Аналогично. ■

2.4 Интегрирование ступенчатых функций

.
Пусть
$f : I^n \to \mathbb{R}$ - ступенчатая функция.
Тогда
существует разбиение $\xi = I_1^n, I_2^n, \ldots I_k^n \quad | \quad \forall x \in I^n \;\; f(x) = c_i$.

Определим:

$$\int\limits_{I^n} f(x)\, dx = \int\limits_{I^n} f(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \sum_{i=1}^{k} c_i S(I_i^n)$$

Назовем это выражение интегралом от ступенчатой функции.

Лемма 2.4.1 *Интеграл от ступенчатой функции не зависит от разбиения.*

□ **Доказательство.**

Следует из свойств разбиения.■

Лемма 2.4.2 *(свойства интегралов от ступенчатых функций).*
Пусть f, g - ступенчатые функции.
1) $\int\limits_{I^n} \lambda f(x)\, dx = \lambda \int\limits_{I^n} f(x)\, dx$ *- однородность;*
2) $\int\limits_{I^n} (f(x) + g(x))\, dx = \int\limits_{I^n} f(x)\, dx + \int\limits_{I^n} g(x)\, dx$ *- линейность;*
3) *Пусть* $f(x) \leqslant g(x)$. *Тогда* $\int\limits_{I^n} f(x)\, dx \leqslant \int\limits_{I^n} g(x)\, dx$ *- монотонность.*

.

2.5 Верхние и нижние суммы

Определение 2.5.1 .
Пусть
$f : I^n \to \mathbb{R}$ и f ограничена. Пусть $\phi(x)$ - ступенчатая функция на $I^n \ | \ \phi(x) \geqslant f(x) \ \forall x \in I^n$.
Тогда

$$\Sigma^*(f) = \int\limits_{I^n} \phi(x)\, dx$$

называется верхней суммой. .
Пусть
$\psi(x)$ - ступенчатая функция на $I^n \mid \psi(x) \leqslant f(x) \ \forall x \in I^n$.
Тогда

$$\Sigma_* = \int\limits_{I^n} \psi(x)\, dx$$

называется нижней суммой.

Важное замечание. Так как f - ограничена, то $\exists M \mid |f(x)| \leqslant M \ \ \forall x \in I^n$. Следовательно, если взять функцию $\phi(x) = M$, то очевидно, что $f(x) \leqslant \phi(x)$.

Тогда $\Sigma^*(f) \leqslant \int\limits_{I^n} \phi(x)\, dx = M \cdot S(I^n)$.

Аналогично $\Sigma_*(f) \geqslant -M \cdot S(I^n)$.

Поскольку $\psi(x) \leqslant f(x) \leqslant \phi(x) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{I^n} \psi(x)\, dx \leqslant \int\limits_{I^n} \phi(x)\, dx$ - из свойств монотонности. Отсюда следует, что $\Sigma_*(f) \leqslant \Sigma^*(f)$.

Свойство верхних и нижних сумм:

$$-M \cdot S(I^n) \leqslant \Sigma_*(f) \leqslant \Sigma^*(f) \leqslant M \cdot S(I^n)$$

Определение 2.5.2 *(Верхний и нижний интегралы)* .
Пусть
f ограничена на I^n, ϕ, ψ - ступенчатые функции.
Тогда
определим

$$J^*(f) = \inf_{\phi \mid \phi \geqslant f} \Sigma^*(f)$$

$J^*(f)$ называется верхним интегралом функции f. Аналогично:

$$J_*(f) = \sup_{\psi \mid \psi \leqslant f} \Sigma_*(f)$$

$J_*(f)$ называется нижним интегралом функции f.

Верхний и нижний интегралы для ограниченной функции существуют всегда.

Лемма 2.5.3 .
Пусть
f - ступенчатая функция на I^n
Тогда
$J^*(f) = J_*(f) = \int\limits_{I^n} f(x)\,dx$

□ **Доказательство.**Очевидно. ■

Лемма 2.5.4 *(свойства верхних и нижних интегралов)*

$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\Sigma^*(f), \;\; \Sigma_*(f) \mid$

$$J^*(f) \leqslant \Sigma^*(f) \leqslant J^*(f) + \varepsilon$$
$$J_*(f) \geqslant \Sigma_*(f) \geqslant J_*(f) - \varepsilon$$

□ **Доказательство.**Очевидно, в силу определений sup и inf. ■

Определение 2.5.5 *(Интегрируемости по Риману)* .
Пусть
$f : I^n \to \mathbb{R}$, $\;f$ ограничена. f называется интегрируемой по Риману, если

$$J^*(f) = J_*(f) = \int\limits_{I^n} f(x)\,dx$$

Теорема 2.5.6 *(Дарбу. Критерий интегрируемости по Риману.)*
Пусть $f : I^n \to \mathbb{R}$. f ограничена. f интегрируема тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\Sigma^*(f), \; \Sigma_*(f) \quad | \quad 0 \leqslant \Sigma^*(f) - \Sigma_*(f) \leqslant \varepsilon \qquad (*)$$

□ **Доказательство.**Пусть f интегрируема по Риману. Тогда $J^*(f) = J_*(f)$. По лемме 2 существуют ступенчатые функции, такие что

$$\begin{cases} J^*(f) \leqslant \Sigma^*(f) \leqslant J^*(f) + \varepsilon/2 \\ J_*(f) - \varepsilon/2 \leqslant \Sigma_*(f) \leqslant J_*(f) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \Sigma^*(f) \leqslant J^*(f) + \varepsilon/2 \\ \Sigma_*(f) \geqslant J_*(f) - \varepsilon/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \Sigma^*(f) \leqslant J^*(f) + \varepsilon/2 \\ -\Sigma_*(f) - \leqslant J_*(f) + \varepsilon/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma^*(f) - \Sigma_*(f) \leqslant J^*(f) - J_*(f) + \varepsilon = \varepsilon$$

Следовательно критерий Дарбу выполняется.

Обратно: Пусть (*) выполнено, но $J^*(f) \neq J_*(f)$. По построению

$$J^*(f) - J_*(f) \geqslant 0 \quad \Rightarrow J^*(f) - J_*(f) > 0$$

Так как верхний и нижний интеграл не совпадают.
Учитываем, что $\Sigma^*(f) - \Sigma_*(f) \geqslant J^*(f) - J_*(f)$. Получили, что $\Sigma^*(f) - \Sigma_*(f) > 0$, а это противоречит (*). ■

Следствие 2.5.7 *(свойства интеграла Римана)* .
Пусть
f, g интегрируемы по Риману, $\lambda \in \mathbb{R}$
Тогда
1) *λf интегрируема по Риману:*

$$\int\limits_{I^n} \lambda f(x)\, dx = \lambda \cdot \int\limits_{I^n} f(x)\, dx$$

2) *$f + g$ интегрируема по Риману:*

$$\int\limits_{I^n} (f+g)\, dx = \int\limits_{I^n} f(x)\, dx + \int\limits_{I^n} g(x)\, dx$$

3) *$f \leqslant g$ на I^n* $\quad \Rightarrow$

$$\int\limits_{I^n} f(x)\, dx \leqslant \int\limits_{I^n} g(x)\, dx$$

4) *Пусть $I^n = I_1^n \cup I_2^n$, $\; I_1^n \cap I_2^n = \varnothing$. Тогда:*

$$\int\limits_{I^n} f(x)\, dx = \int\limits_{I_1^n} f(x)\, dx + \int\limits_{I_2^n} f(x)\, dx$$

Теорема 2.5.8 *(об интегрируемости непрерывной функции)* .
Пусть
I^n - замкнутый интервал. $f : I^n \to \mathbb{R}$. f непрерывна на I^n.
Тогда
f интегрируема по Риману на I^n.

Замечание. I^n - замкнут и ограничен, а это значит, что компактно. f непрерывна на компактном множестве, следовательно равномерно-непрерывна по теореме Вейерштрасса.

$\square$ **Доказательство.**

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. $S = S(I^n)$ - объем I^n. $\varepsilon_1 = \varepsilon / S$.
Так как f - равномерно-непрерывна, то

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; | \;\; \forall x_1, x_2 \;\; | \;\; \|x_1 - x_2\|_n < \delta \;\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \;\varepsilon_1$$

Существует разбиение $\xi \;\; | \; \|\xi\| < \delta$. Пусть $I^n_k \subset \xi$. Тогда обозначим:

$$\alpha_k = \min_{x \in I^n_k} f(x) \qquad \beta_k = \max_{x \in I^n_k} f(x) \qquad |\alpha_k - \beta_k| \leqslant \varepsilon_1$$

По теореме Вейерштрасса о максимуме и минимуме $\alpha_k, \; \beta_k$ существуют. Очевидно, что $\alpha_k \leqslant \beta_k$. Тем самым мы построили две ступенчатые функции $\phi(x), \; \psi(x) \;\; | \; \phi \leqslant f \leqslant \psi$ на I^n.

$$\Sigma^*(f) = \int\limits_{I^n} \psi(x)\, dx \qquad \Sigma_*(f) = \int\limits_{I^n} \phi(x)\, dx$$

$$\Sigma^*(f) - \Sigma_*(f) = \int\limits_{I^n} \psi(x)\, dx - \int\limits_{I^n} \phi(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{I^n} (\psi(x) - \phi(x))\, dx < \int\limits_{I^n} \varepsilon_1\, dx = \varepsilon_1 \cdot S = \varepsilon$$

$\forall \varepsilon_1 > 0$ найдется пара ступенчатых функций, что

$$\Sigma^*(f) - \Sigma_*(f) < \varepsilon$$

Согласно критерию Дарбу f интегрируема по Риману. $\blacksquare$

Определение 2.5.9 *(графика функции)*
Пусть $I^n = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$

Предположим, что задана функция $x_i = f(x_1, \dots x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \dots x_n)$, *определенная на интервале* $I^{n-1} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{i-1}, b_{i-2}] \times \widehat{[a_i, b_i]} \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \dots \times [a_n, b_n]$

$$C = \{(x_1, \dots x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \dots x_n), f(x_1, \dots x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \dots x_n)\}, \qquad C \subseteq I^n$$

Назовем это множество точек графиком функции. Очевидно, что перенумеровав координаты, можно считать, что график имеет вид:

$$x_n = f(x_1, x_2, \dots x_{n-1})$$

Теорема 2.5.10 *(свойства графика функции)* .
Пусть
$f : I^{n-1} \to \mathbb{R}$. *Пусть* f *непрерывна на замкнутом интервале* I^{n-1}. *Пусть* C *- график функции в* I^n
Тогда
$\forall \varepsilon > 0 \exists$ *разбиение* ξ n*-интервала, такое что:*

$$\sum_{I_k^n \in \xi | I_k^n \cap C \neq \varnothing} S(I_k^n) \leqslant \varepsilon \cdot S(I^{n-1})$$

□ **Доказательство.**

Так как f непрерывна на I^{n-1}, то она равномерно-непрерывна на I^{n-1}. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда

$$\exists \delta > 0 \;\; \forall \overline{x}_1, \overline{x}_2 \in I^{n-1} \;\; | \; \|\overline{x}_1 - \overline{x}_2\|_{n-1} \leqslant \delta \;\; \Rightarrow \;\; |f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_2)| < \varepsilon$$

Очевидно, что существует разбиение ξ интервала I^{n-1} такое, что $\|\xi\|_{n-1} < \delta$. Пусть $I_k^{n-1} \in \xi$. Тогда оюозначим:

$$a_k = \min f(x) \qquad b_k = \max f(x) \qquad |b_k - a_k| \leqslant \varepsilon$$

$a_k, \; b_k$ существуют в силу теоремы Вейерштрасса о максимуме и минимуме. Построим разбиение $I_k^n = I_k^{n-1} \times [b_k, a_k]$.

$$I_k^n \cap C \neq \varnothing \qquad S(I_k^n) = S(I_k^{n-1} \times |b_k - a_k|$$

Тогда

$$\sum_{I_k^n \in \xi | I_k^n \cap C \neq \varnothing} S(I_k^n) = \sum_k S(I_k^{n-1}) \cdot |b_k - a_k| \leqslant \varepsilon \cdot \sum_k S(I_k^{n-1}) = \varepsilon \cdot S * (I^{n-1})$$

■

Определение 2.5.11 *Функция $f : I^n \to \mathbb{R}$ называется кусочно-непрерывной, если существует набор $c_1,\ c_2, \dots c_k$ - графиков непрерывных функций, такой что $\forall x \in I^n \setminus (\bigcup_j c_j)$, f непрерывна в точке x.*

Теорема 2.5.12 *(об интегрируемости по Риману кусочно-непрерывных ограниченных функций) .*
Пусть
$f : I^n \to \mathbb{R}$, f ограничена и кусочно-непрерывна.
Тогда
f интегрируема по Риману.

□ **Доказательство.**
Согласно условиям существуют графики $c_1,\ c_2 \dots c_k$. Для каждого c_i построим разбиение ξ_i, так, чтобы выполнялось условие теоремы о свостве графика.
Пусть η - некоторое разбиение $I^n \ \mid\ \|\eta\|_n < \delta$.
Очевидно, что $w = \xi_1 \oplus \xi_2 \oplus \dots \oplus \xi_k\ oplus \eta$ является разбиением, причем w является продолжением ξ_i и η.
Если $I^n_k \in w$, тогда согласно теореме выше

$$\sum_{I^n_k | I^n_k \cap (\cup c_i) \neq \varnothing} S(I^n_k) \leqslant \varepsilon S(I^{n-1})$$

Если $I^n_k \cap (c_1 \cup c_2 \dots) \neq \varnothing$, тогда f интегрируема, так как она непрервына.
Отсюда получаем, что $\Sigma^*(f) - \Sigma_*(f) < \varepsilon$. ■

Определение 2.5.13 *(отмеченного разбиения)*
Пусть I^n. ξ - разбиение I^n. Разбиение называется отмеченным, если $\forall I^n_k \in \xi$ указана точка $\eta_k \in I^n_k$.

Определение 2.5.14 *(Интеграла по Риману)*
Пусть ξ - отмеченное разбиение. $f : I^n \to \mathbb{R}$ - ограниченная функция. Тогда определим сумму Римана для отмеченного разбиения для функции f:

$$\Sigma(f, \xi) = \sum_k f(\eta_k) \cdot S(I^n_k)$$

Очевидно, что $\Sigma_*(f) \leqslant \Sigma(f, \xi) \leqslant \Sigma^*(f)$.

Определение 2.5.15 *(функции, интегрируемой по Риману)*
Ограниченная f интегрируема по Риману на I^n если существует L, такое что $\forall \varepsilon$ существует отмеченное разбиение ξ такое что

$$|L - \Sigma(f, \xi)| < \varepsilon$$

L называется интегралом Римана.

Обозначение: $L = \int\limits_{I^n} f(x)\,dx$

2.6 Связь кратных и повторных интегралов

Теорема 2.6.1 *(Связь кратных и повторных интегралов) .*
Пусть
$f : I^n \to \mathbb{R}$. f ограничена и кусочно-непрерывна.
Тогда
для всякого набора $i_1, i_2, \dots i_n$ имеет место:

$$\int\limits_{I^n} f(x)\,dx = \int\limits_{a_{i1}}^{b_{i1}} dx_{i1} \int\limits_{a_{i2}}^{b_{i2}} dx_{i2} \dots \int\limits_{a_{in}}^{b_{in}} f(x_1, x_2, \dots x_n)\,dx_{in} \qquad (*)$$

□ **Доказательство.**

Пусть $\Phi(x_1, x_2, \dots x_n)$ - ступенчатая функция. Тогда утверждение (*) очевидно.
То есть для любой ступенчатой функции

$$\int\limits_{a_{ik}}^{b_{ik}} dx_{ik} \int\limits_{a_{im}}^{b_{im}} \Phi(x_1, x_2, \dots x_n)\,dx_{im} = \int\limits_{a_{im}}^{b_{im}} dx_{im} \int\limits_{a_{ik}}^{b_{ik}} \Phi(x_1, x_2, \dots x_n)\,dx_{ik}$$

Пусть ϕ, ψ - две ступенчатые функции, такие что

$$\phi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$$

Из свойств монотонности интеграла

$$\int\limits_{a_{in}}^{b_{in}} \phi(x)\,dx_{in} \leqslant \int\limits_{a_{in}}^{b_{in}} f(x)\,dx_{in} \leqslant \int\limits_{a_{in}}^{b_{in}} \psi(x)\,dx_{in}$$

Далее по индукции:

$$\Sigma_*(f) = \int\limits_{I^n} \phi(x)\,dx = \int\limits_{a_{i1}}^{b_{i1}} dx_{i1} \int\limits_{a_{i2}}^{b_{i2}} dx_{i2} \dots \int\limits_{a_{in}}^{b_{in}} \phi(x)\,dx_{in} \leqslant \int\limits_{a_{i1}}^{b_{i1}} dx_{i1} \int\limits_{a_{i2}}^{b_{i2}} dx_{i2} \dots \int\limits_{a_{in}}^{b_{in}} f(x)\,dx_{in} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{a_{i1}}^{b_{i1}} dx_{i1} \int\limits_{a_{i2}}^{b_{i2}} dx_{i2} \dots \int\limits_{a_{in}}^{b_{in}} \psi(x)\,dx_{in} = \int\limits_{I^n} \psi(x)\,dx = \Sigma^*(f)$$

Так как f интегрируема по Риману, то $\Sigma^*(f) - \Sigma_*(f) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$, то (*) верно.
■

2.7 Интегрирование по "произвольным"областям

Определение 2.7.1 *Пусть D - ограниченная область. $\exists R \mid \quad D \subset B_R(0), \quad D$ открыто. Это означает, что $\forall x \in D \quad \exists \varepsilon > 0 \quad | \quad B_\varepsilon(x) \subset D$. То есть, область - ограниченное открытое множество.*

Определение 2.7.2 *Замыканием области D назовем $D \cup \{$все предельные точки $D\}$.*
Обозначение: $\overline{D}$

Определение 2.7.3 *$\overline{D} \setminus D = \partial D$ - граница области.*

Определение 2.7.4 *Характеристическая функция области:*

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in D; \\ 0, & \text{если } x \notin D. \end{cases}$$

Свойства характеристических функций:
Пусть $D_1,\ D_2,\ \chi_{D1}(x),\ \chi_{D2}(x)$.
Тогда:
1) $\chi_{D1}(x) \cdot \chi_{D2}(x) = \chi_{D1 \cap D2}(x)$
2) $D_1 \cap D2 = \varnothing \ \Rightarrow \ \ \chi_{D1}(x) + \chi_{D2}(x) = \chi_{D1 \cup D2}(x)$

Определение 2.7.5 *(Измеримости множества по Жордану)*
Пусть D - ограниченное множество, $D \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $\exists I^n \mid \ D \subset I^n$. Будем говорить, что D измеримо по Жордану, если его характеристическая функция интегрируема по Риману в I^n. При этом выражение: $\int\limits_{I^n} \chi_D(x)\,dx$ называется мерой Жордана области D.

Определение 2.7.6 *(функции, интегрируемой по Риману на области D)*
Пусть D - область. Пусть $D \subset I^n, \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что f интегрируема по Риману в D, если функция $\chi_D(x) \cdot f(x)$ интегрируема по Риману в I^n. В этом случае интеграл Римана функции f обозначим:

$$\int\limits_D f(x)\,dx = \int\limits_{I^n} \chi_D(x) f(x)\,dx$$

Свойства интегралов:
Пусть $f,\ g$ интегрируемы в D, тогда:

1) $\int\limits_D (f(x)+g(x))\,dx = \int\limits_D f(x)\,dx + \int\limits_D g(x)\,dx$ - линейность;

2) $\int\limits_D \lambda f(x)\,dx = \lambda \int\limits_D f(x)\,dx$ - однородность;

3) $f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in D \ \Rightarrow \ \int\limits_D f(x)\,dx \leqslant \int\limits_D g(x)\,dx$ - монотонность;

4) $D_1 \cap D_2 = \varnothing \ \Rightarrow \ \int\limits_{D1\cup D2} f(x)\,dx = \int\limits_{D1} f(x)\,dx + \int\limits_{D2} f(x)\,dx$ - аддитивность по областям.

$\square$ **Доказательство.** Все свойства следуют из свойств характеристических функций.

4. Пусть $I^n \mid \ D_1 \cup D_2 \subset I^n$. Тогда:

$$\int\limits_{D1\cup D2} f(x)\,dx = \int\limits_{I^n} \chi_{D1\cup D2}(x) f(x)\,dx = \int\limits_{I^n} (\chi_{D1} + \chi_{D2}(x) f(x)\,dx =$$

$$= \text{В силу линейности интеграла Римана} =$$

$$= \int\limits_{I^n} \chi_{D1}(x) f(x)\,dx + \int\limits_{I^n} \chi_{D2}(x) f(x)\,dx = \int\limits_{D1} f(x)\,dx + \int\limits_{D2} f(x)\,dx$$

$\blacksquare$

2.8 Замена переменных в интеграле Римана

Теорема 2.8.1 *(о замене переменных) .*
Пусть
f интегрируема в области D. Так что $\int\limits_D f(x)\,dx$ определен.
Предположим, что существует область Ω и взаимнооднозначное отображение на ней $\phi : \Omega \to D,\ x = \phi(y) \ \mid \ \phi$ - дифференцируема на Ω. $det(D_y\phi) \neq 0\ \forall y \in \Omega$.
Граница $\partial\Omega$ отображением ϕ переводится в ∂D.
Тогда

$$\boxed{\int\limits_D f(x)\,dx = \int\limits_\Omega f(\phi(y)) \cdot |det(D_y\phi|\,dy}$$

Данная формула называется формулой замены переменных в интеграле Римана.

□ **Доказательство.**
Без доказательства. ■

Пример 2.8.2 *Пусть область* G *ограничена кривой* $x^{2/\lambda} + y^{2/\mu} = 1$
$2/\lambda > 0,\ 2/\mu > 0,\ x, y > 0$
Найти площадь G.
$S(G) = \iint\limits_G 1 \cdot\, dx\, dy$
Замена переменных: $x = u^\lambda,\ y = v^\mu$

$$x^{2/\lambda} + y^{2/\mu} = 1 \qquad u^2 + v^2 = 1$$

Граница переходит в границу. Матрица Якоби:

$$\begin{pmatrix} \lambda u^{\lambda-1} & 0 \\ 0 & \mu v^{\mu-1} \end{pmatrix}$$

Детерминант равен нулю в точке (0,0), но она не находится внутри области.

$$S(G) = \lambda\mu \iint\limits_\Omega u^{\lambda-1} v^{\mu-1}\, du\, dv$$

Замена: $u = r\cos\phi\ \ v = r\sin\phi$
Граница переходит в границу. Матрица Якоби:

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}$$

Детерминант равен 0 в точке (0,0), которая находится вне области.

$$S(G) = \lambda\mu \int\limits_{I^n} r^{\lambda-1}\cos^{\lambda-1}\phi r^{\mu-1}\sin^{\mu-1}\phi r\,dr\,d\phi =$$

$$= \lambda\mu \int\limits_0^{\pi/2} d\phi \int\limits_0^1 \cos^{\lambda-1}\phi\sin^{\mu-1}\phi r^{\lambda+\mu-1}\,dr =$$

$$= \lambda\mu \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{\lambda-1}\phi\sin^{\mu-1}\phi\cdot \left.\frac{r^{\lambda+\mu}}{\lambda+\mu}\right|_0^1 d\phi =$$

$$= \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{\lambda-1}\phi\sin^{\mu-1}\phi\,d\phi =$$

$$\textit{замена: } t = \sin\phi^2 \quad dt = 2\sin\phi\cos\phi\,d\phi =$$

$$= \frac{\lambda\mu}{2(\lambda+\mu)} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{\lambda-2}\phi\sin^{\mu-2}\phi 2\sin\phi\cos\phi\,d\phi =$$

$$= \frac{\lambda\mu}{2(\lambda+\mu)} \int\limits_0^{1} (1-t)^{\lambda/2-1}t^{\mu/2-1}\,dt = \frac{\lambda\mu}{2(\lambda+\mu)}\beta(\lambda/2,\mu/2)$$

2.9 Интегрирование на многообразиях

2.9.1 Криволинейный интеграл первого рода

l - одномерное аналитическое многообразие в $\mathbb{R}^n$. Синоним - кривая.
Будем рассматривать только параметризованные кривые.
Это означает, сто существует отображение $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\quad l = \phi([a,b])$.
То есть l описывается следующими уравнениями:

$$l = \begin{cases} x_1 = \phi_1(t) \\ x_2 = \phi_2(t) \\ \vdots \\ x_n = \phi_n(t) \end{cases}$$

ϕ - параметризация кривой l.
Обозначим: $A = \phi(a)$ - начало кривой, $B = \phi(b)$ - конец кривой.
Если $A = B$ будем говорить, что кривая замкнута.

Определение 2.9.1 *(эквивалентной параметризации)*

Пусть l - кривая. $\phi : [a,b] \to l$, $\psi : [c,d] \to l$ - две параметризации. Будем говорить, что параметризация $\phi \sim \psi$, если существует такое отображение $\mu : [c,d] \to [a,b]$, такое что μ взаимнооднозначно и дифференцируемо на (c,d), $\mu'(t) > 0$ на (c,d) со свойством: $\phi \circ \mu = \psi$ на $[c,d]$.

Определение 2.9.2 *Разбиением ξ называется упорядоченный набор точек $(M_0, M_1, \dots M_N)$, таких что $M_0 = A$, $M_N = B$. При этом $M_i < M_{i+1}$ если $M_i = \phi(t_i)$, $M_{i+1} = \phi(t_{i+1})$ где $t_{i+1} > t_i$.*

Обозначим через

$$\triangle S_k = \rho(M_k, M_{k+1} \qquad \|\xi\| = \sup_k \triangle S_k = \max_k \triangle S_k$$

Пусть $f : l \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что f - непрерывна на l, если $(f \circ \phi)(t)$ - непрерывна на $[a,b]$.

Определение 2.9.3 *(Суммы Римана)*

Для любого разбиения ξ определим:

$$S(\xi, f) = \sum_{i=0}^{N-1} f(M_i)\rho(M_i, M_{i+1})$$

Определение 2.9.4 *Будем говорить, что функция $f : l \to \mathbb{R}$ интегрируема на кривой l, если существует число $L \mid \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid \ \|\xi\| < \delta \Rightarrow |L - S(\xi, f)| < \varepsilon$. В этом случае L называется криволинейным интегралом первого рода от функции f по кривой l.*

Обозначение:

$$L = \int\limits_A^B f(S)\, dS = \int\limits_l f(S)\, dS$$

Если $f \equiv 1$ на l, то $\int\limits_l f(s)\, ds$ - длина кривой.

Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Рассмотрим отрезок $[a,b]$. Пусть в $[a,b]$ есть точки $a = t_0 < t_1 \dots < t_N = b$.

$$M_k = (\phi_1(t_k), \phi_2(t_k), \dots \phi_n(t_k)) \quad M_{k+1} = (\phi_1(t_{k+1}), \phi_2(t_{k+1}), \dots \phi_n(t_{k+1}))$$

$$\rho(M_k, M_{k+1}) = \sqrt{(\phi_1(t_{k+1}) - \phi_1(t_k))^2 + (\phi_2(t_{k+1}) - \phi_2(t_k))^2 + \ldots + (\phi_n(t_{k+1}) - \phi_n(t_k))^2}$$

Предположим, что ϕ - нерерывная дифференцируемая функция. Потребуем:

$$\phi_1'(t)^2 + \phi_2'(t)^2 + \ldots + \phi_n'(t)^2 > p > 0 \quad \forall t \in (a, b)$$

Из формулы Лагранжа следует, что $\phi_i(t_{k+1}) - \phi_i(t_k) = \phi_i'(\theta_i) \cdot (t_{k+1} - t_k)$
$\forall i = 1, 2, \ldots n, \;\; \theta_i \in [t_k, t_{k+1}]$.

$$\triangle S_k = \rho(M_k, M_{k+1}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \phi_i'^2(t_k) \cdot (t_{k+1} - t_k)^2} -$$

$$- \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \phi_i'^2(t_k) \cdot (t_{k+1} - t_k)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \phi_i'^2(\theta_i) \cdot (t_{k+1} - t_k)^2}$$

Рассмотрим следующее выражение:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \phi_i'^2(\theta_i)(t_{k+1} - t_k)^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \phi_i'^2(t_k) \cdot (t_{k+1} - t_k)^2} =$$

$$= (t_{k+1} - t_k) \cdot \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \phi_i'^2(\theta_i)} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \phi_i'^2(t_k)} \right] =$$

$$= (t_{k+1} - t_k) \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \phi_i'^2(\theta_i) - \sum_{i=1}^{n} \phi_i'^2(t_k)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \phi_i'^2(\theta_i)} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \phi_i'^2(t_k)}} =$$

$$= (t_{k+1} - t_k) \cdot \frac{\|\phi'(\theta_i)\|^2 - \|\phi'(t_k)\|^2}{\|\phi'(\theta_i)\| + \|\phi'(t_k)\|}$$

Вспомним про условие: $\phi_1'^2(t) + \phi_2'^2(t) + \ldots + \phi_n'^2(t) > p$

Это означает, что: $\|\phi'(t)\| > \sqrt{p}$

$$\Rightarrow \|\phi'(\theta_i)\| + \|\phi'(t_k)\| > 2\sqrt{p}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|\phi'(\theta_i)\| + \|\phi'(t_k)\|} < \frac{1}{2\sqrt{p}}$$

Так как $\phi'(t)$ непрерывна на $[a, b]$, то она равномерно-непрерывна. То есть $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \; \forall x, y \mid \; |x - y| < \delta \;\Rightarrow\; \|\phi'(x) - \phi'(y)\| < \varepsilon$.
Выберем $t_k \mid \; |t_{k+1} - t_k| < \delta$. $\theta_i \in [t_k, t_{k+1}] \Rightarrow \; |\theta_i - t_k| < \delta \;\Rightarrow \|\phi'(\theta_i) - \phi'(t_k)\| < \varepsilon$.

$$\phi_i'(\theta_i) - \phi_i'(t_k) \leqslant \sqrt{(\phi_i'(\theta_i) - \phi_i'(t_k))^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\phi_i'(\theta_i) - \phi_i'(t_k))^2} \leqslant$$

$$\leqslant \|\phi'(\theta_i) - \phi'(t_k)\| < \varepsilon$$

По теореме Вейерштрасса $\phi'(t) \leqslant M_1$. Тогда:

$$\|\phi'(\theta_i)\|^2 - \|\phi'(t_k)\|^2 = \phi_1'^2(\theta_i) - \phi_1'^2(t_k) + \phi_2'^2(\theta_i) - \phi_2'^2(t_k) + \ldots \phi_n'^2(\theta_i) - \phi_n'^2(t_k) =$$
$$= (\phi_1'(\theta_i) + \phi_1'(t_k)) \cdot (\phi_1'(\theta_i) - \phi_1'(t_k)) + (\phi_2'(\theta_i) + \phi_2'(t_k)) \cdot (\phi_2'(\theta_i) - \phi_2'(t_k)) + \ldots$$
$$\ldots + (\phi_n'(\theta_i) + \phi_n'(t_k)) \cdot (\phi_n'(\theta_i) - \phi_n'(t_k)) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (\phi_i'(\theta_i) + \phi_i'(t_k)) \right) \cdot \varepsilon \leqslant 2nM_1\varepsilon$$

Получаем:

$$\frac{\|\phi'(\theta_i)\|^2 - \|\phi'(t_k)\|^2}{\|\phi'(\theta_i)\| + \|\phi'(t_k)\|} \leqslant \frac{2nM_1\varepsilon}{2\sqrt{p}}$$

Рассмотрим

$$\sum_{k=0}^{N-1} |f(\phi(t_k))|(t_{k+1} - t_k) \cdot \frac{\|\phi'(\theta_i)\|^2 - \|\phi'(t_k)\|^2}{\|\phi'(\theta_i)\| + \|\phi'(t_k)\|} \leqslant$$
$$\{|f(\phi(t))| \leqslant M\}$$
$$\leqslant M \cdot N \cdot \sum_{k=1}^{N-1} (t_{k+1} - t_k) \cdot \frac{\|\phi'(\theta_i)\|^2 - \|\phi'(t_k)\|^2}{\|\phi'(\theta_i)\| + \|\phi'(t_k)\|} \leqslant$$
$$\leqslant M \cdot N \cdot \frac{nM_1\varepsilon}{\sqrt{p}} \cdot |b - a| = MNM_1(n/\sqrt{p})|b - a| \cdot \varepsilon = R$$

Получаем:

$$S(\xi, f) = \sum_{k=0}^{N-1} f(\phi_1(t_k), \phi_2(t_k), \ldots \phi_n(t_k)) \cdot (t_{k+1} - t_k) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \phi_i'^2(t_k)} + R$$

Где R сколько угодно мало. Получили сумму Римана:

$$S(\xi, f) = \sum_{k=0}^{N-1} f(\phi_1(t_k), \phi_2(t_k), \ldots \phi_n(t_k)) \cdot (t_{k+1} - t_k) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \phi_i'^2(t_k)}$$

То есть для некоторого разбиения $t_0, t_1, \ldots t_n$ интервала $[a, b]$

$$L = \int\limits_a^b f(\phi(t)) \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \phi_i'^2(t)}\, dt$$

Следствие 2.9.5 *Длина кривой l вычисляется по формуле:*

$$\int\limits_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \phi_i'^2(t)}\, dt = \int\limits_a^b \|\phi'(t)\|\, dt$$

Пример 2.9.6

$$l = \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

$$\int\limits_0^1 \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}$$

Меняем параметризацию:

$$l = \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

$$\int\limits_0^1 \sqrt{8t^2}\, dt = \sqrt{2}$$

Теорема 2.9.7 *Криволинейные интегралы первого рода не зависят от эквивалентной параметризации.*

□ **Доказательство.**

Пусть $\phi : [a,b] \to l, \quad \psi : [c,d] \to l$ - две параметризации. $\mu : [c,d] \to [a,b]. \quad \phi(\mu(\tau)) = \psi(\tau)$.

$$\int\limits_a^b f(\phi(t))\sqrt{\sum_{i=1}^n \phi_i'^2(t)}\, dt =$$

Сделаем замену: $t = \mu(\tau)$

$$= \int\limits_c^d f(\phi(\mu(\tau)))\sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\psi_i'^2(\tau)}{\mu'^2(\tau)}\right]} \cdot \mu'(\tau)\, d\tau = \int\limits_c^d f(\psi(\tau))\sqrt{\sum_{i=1}^n \psi_i'^2(t)}\, dt$$

■

Свойства криволинейных интегралов первого рода:

1) $\int\limits_l (f(s) + g(s))\, ds = \int\limits_l f(s)\, ds + \int\limits_l g(s)\, ds$ - линейность.

2) $\int\limits_l \lambda f(s)\, ds = \lambda \int\limits_l f(s)\, ds$ - однородность.

3) Пусть l_1 - кривая с началом в A и концом в B. l_2 - кривая с началом в B и концом в C. Тогда $l_1 + l_2$ - обозначение кривой l с началом в A и концос в C. Тогда:

$$\int\limits_{l1+l2} f(s)\, ds = \int\limits_{l1} f(s)\, ds + \int\limits_{l2} f(s)\, ds$$

Это свойство называется аддитивностью по кривым.

2.9.2 Криволинейные интегралы второго рода

Пусть l - некоторая кривая в $\mathbb{R}^n$, с параметризацией $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.
$l = \phi([a, b])$. $\phi(a) = A$, $\phi(b) = B$. A, B - начало и конец кривой l соответственно.
Без ограничения общности, можно считать, что $[a, b] = [0, 1]$. При замене $\phi(t)$ на $\phi(1-t)$ получим параметризацию, которую называют изменением ориентации на противоположную. То есть получим кривую $-l$.

Будем считать, что есть разбиение $\tau_0, \tau_1, \dots \tau_N$ отрезка $[a, b]$. То есть $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = b$. При разбиении получаем точки $M_i = \phi(\tau_i)$.
Упоряядоченный набор точек $(M_0, M_1, \dots M_N)$ назовем разбиением ξ кривой l. Норма разбиения ξ: $\|\xi\| = \max_i \rho(M_i, M_{i+1})$.

Назовем отображение $\overline{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ векторным полем.

$$\overline{F}(x) = (F_1(x_1, x_2, \dots x_n), F_2(x_1, x_2, \dots x_n), \dots F_n(x_1, x_2, \dots x_n))$$

Далее будем требовать от функции $\overline{F}$ все, что потребуется (непрерывность, дифференцируемость и т.п.), если не оговорено другое.

Конструкция

Пусть дана кривая l с разбиением ξ, и задано векторное поле $\overline{F}$. Любой точке M_i сопоставим функцию:

$$f(M_i) = \langle \overline{F}(M_i), \overline{M}_{i+1} - \overline{M}_i \rangle$$

Далее скобки $\langle\rangle$ обозначают скалярное произведение.
Обозначим

$$S(\xi, f) = \sum_{i=0}^{N-1} \langle \overline{F}(M_i), \overline{M}_{i+1} - \overline{M}_i \rangle$$

Определение 2.9.8 *Будем говорить, что определен криволинейный интеграл второго рода от вектор-функции $\overline{F}(x)$ если $\exists$ число $L \mid \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta \mid \forall \xi \ \|\xi\| < \delta \Rightarrow |S(\xi, f) - L| < \varepsilon$. В этом случае L называется криволинейным интегралом второго рода от вектор-функции $\overline{F}(x)$ и обозначается следующим образом:*

$$\boxed{L = \int\limits_l \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\, dx_i}$$

Так же используют обозначение: $\sum_{i=1}^n F_i(x)\, dx_i = w^1$, где w^1 называют один-формой. Тогда

$$\boxed{L = \int\limits_l w^1}$$

Утверждение 2.9.9 .
Пусть
существует криволинейный интеграл второго рода по кривой l от вектор-функции $\overline{F}(x)$, равный L.
Тогда
существует криволинейный интеграл второго рода по кривой $-l$ и он равен $-L$.

□ **Доказательство.**Следует из свойств скалярного произведения.
Рассмотрим сумму $S(\xi, f)$ по $-l$. Обозначим ее $L1$.

$$L1 = \sum_{i=0}^{N-1} \langle \overline{F}(M_i), \overline{M}_i - \overline{M}_{i+1} \rangle = -\sum_{i=0}^{N-1} \langle \overline{F}(M_i), \overline{M}_{i+1} - \overline{M}_i \rangle = -L$$

■

Вычисление интеграла второго рода

Пусть $x_i = \phi_i(t), \;\; i = 1, 2 \dots n. \;\; t \in [a, b]$.
Рассмотрим

$$S(\xi, f) = \sum_{k=0}^{N-1} \langle \overline{F}(M_k), \overline{M}_{k+1} - \overline{M}_k \rangle$$

$$\overline{M}_{k+1} = (\phi_1(\tau_{k+1}), \phi_2(\tau_{k+1}), \dots \phi_n(\tau_{k+1}))$$
$$\overline{M}_k = (\phi_1(\tau_k), \phi_2(\tau_k), \dots \phi_n(\tau_k))$$
$$\overline{M}_{k+1} - \overline{M}_k = (\phi_1(\tau_{k+1}) - \phi_1(\tau_k), \phi_2(\tau_{k+1}) - \phi_2(\tau_k), \dots \phi_n(\tau_{k+1}) - \phi_n(\tau_k))$$
$$\overline{F}(M_k) = (F_1(\phi_1(\tau_k), \phi_2(\tau_k), \dots \phi_n(\tau_k)), F_2(\phi_1(\tau_k), \phi_2(\tau_k), \dots \phi_n(\tau_k)), \dots F_n(\phi_1(\tau_k), \phi_2(\tau_k), \dots \phi_n(\tau_k)))$$
$$\langle \overline{F}(M_k), \overline{M}_{k+1} - \overline{M}_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} F_i(\phi(\tau_k))(\phi_i(\tau_{k+1}) - \phi_i(\tau_k)) =$$

по формуле Лагранжа $\phi_i(\tau_{k+1}) - \phi_i(\tau_k) = \phi_i'(\nu_i)(\tau_{k+1} - \tau_k), \quad \nu_i \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$

$$= \sum_{i=1}^{n} F_i(\phi(\tau_k)) \cdot [\phi_i'(\nu_i)(\tau_{k+1} - \tau_k)] = \sum_{i=1}^{n} F_i(\phi(\tau_k))(\tau_{k+1} - \tau_k) \cdot (\phi_i'(\nu_i) - \phi_i'(\tau_k) + \phi_i'(\tau_k)).$$

$\phi'(t)$ непрерывна на интервале $[a, b]$. $\Rightarrow$ она равномерно-непрерывна на $[a, b]$. $\Rightarrow \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \; \forall x, y \in [a, b] \; \mid |x - y| < \delta \; \Rightarrow \|\phi'(x) - \phi'(y)\| < \varepsilon$.

Выберем $\tau_{k+1} \mid \ |\tau_{k+1} - \tau_k| < \delta$. $\nu_i \in [\tau_k, \tau_{k+1}] \Rightarrow \ |\nu_i - \tau_k| < \delta$
Тогда $\|\phi'(\nu_i) - \phi'(\tau_k)\| < \varepsilon$.

$$\phi_i'(\nu_i) - \phi_i'(\tau_k) = \sqrt{(\phi_i'(\nu_i) - \phi_i'(\tau_k))^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\phi_i'(\nu_i) - \phi_i'(\tau_k))^2} = \|\phi'(\nu_i) - \phi'(\tau_k)\| < \varepsilon$$

$F(\phi(\tau)) < M$. Тогда получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(\phi(\tau_k))(\phi_i'(\nu_i) - \phi_i'(\tau_k)) < nM \cdot \varepsilon$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{i=1}^{n} F_i(\phi(\tau_k))(\phi_i'(\nu_i) - \phi_i'(\tau_k)) \cdot (\tau_{k+1} - \tau_k)\right] < \sum_{k=0}^{N-1}(\tau_{k+1} - \tau_k) nM\varepsilon <$$
$$< nM|b-a|\varepsilon = R$$

То есть:

$$S(\xi, F) = \sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{i=1}^{n} F_i(\phi(\tau_k)) \cdot \phi_i'(\tau_k) \cdot (\tau_{k+1} - \tau_k)\right) + R$$

где R сколь угодно мало.

Это есть определение интегральной суммы Римана на интервале $[a, b]$ от функции $\sum_{i=1}^{n} F_i(\phi(\tau)) \cdot \phi_i'(\tau)$

$$L = \int\limits_a^b \sum_{i=1}^{n} F_i(\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)) \cdot \frac{d\phi_i}{dt}(t)\, dt$$

Свойства криволинейного интеграла второго рода.

1) Криволинейный интеграл не зависит от эквивалентной параметризации.

□ **Доказательство.**Аналогично доказательству для криволинейных интегралов первого рода ■

2) Линейность интеграла вторго рода.

Пусть $w_1^1,\ w_2^1$ - две один-формы. Тогда:

$$\int\limits_l w_1^1 + w_2^1 = \int\limits_l w_1^1 + \int\limits_l w_2^1$$

3) Однородность:

$$\int\limits_l \lambda w^1 = \lambda \int\limits_l w^1$$

4)Изменение ориентации:

$$\int\limits_{l} w^1 = -\int\limits_{-l} w^1$$

5)Пусть l_1, l_2 такие кривые, что $l_1 + l_2$ определено. Тогда:

$$\int\limits_{l1+l2} w^1 = \int\limits_{l1} w^1 + \int\limits_{l2} w^1$$

Свойство 5 позволяет рассматривать кусочно-гладкие кривые.

Теорема 2.9.10 .
Пусть
существует функция $f(x)$ *в* $\mathbb{R}^n$ | $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = F_i(x)$.
Тогда
$\int\limits_{A}^{B} \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\, dx_i = f(B) - f(A)$

□ **Доказательство.**

Из формулы Ньютона-Лейбница для функции одного переменного следует, что

$$\int\limits_{a}^{b} \phi'(t)\, dt = \phi(b) - \phi(a)$$

Пусть $\psi : [a, b] \to l \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим функцию $G(t) = f(\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t))$. $t \in [a, b]$.

$$\frac{dG}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{d\psi_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_i(\psi(t)) \cdot \frac{d\psi_i}{dt} \qquad *$$

$$\int\limits_{A}^{B} \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\, dx_i = \int\limits_{a}^{b} \left(\sum_{i=1}^{n} F_i(\psi(t)) \cdot \frac{d\psi_i}{dt} \right) dt =$$

Согласно $*$

$$= \int\limits_{a}^{b} \frac{dG}{dt}\, dt = G(b) - G(a) = f(\psi(b)) - f(\psi(a)) = f(B) - f(A)$$

■

2.10 Формула Грина

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ - область. Тогда $\partial D = \overline{D} \setminus D$ - граница области, которая является кусочно-гладкой кривой.
Обозначим гранцу области $\partial D = C$. Граница является замкнутой кривой. Это означает, что если ϕ - параметризация данной кривой ($\phi([a, b] = l)$, то $\phi(a) = \phi(b)$. Кроме того, будем считать, что кривая C без самопересечений. Это означает, что не существует таких чисел $t_1,\ t_2 \in (a, b) \mid\ t_1 \neq t_2 \mid\ \phi(t_1) = \phi(t_2)$.

Будем говорить, что граница области $D,\ \partial D = C$ правильно-ориентирована, если при увеличении параметра t движение по границе осуществляется так, что область находится слева. То есть область обходится против часовой стрелки.

Пример 2.10.1 *Пусть область D - эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + y^2 b^2 < 1$. Тогда граница C этой области: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.*
Зададим параметризацию:

$$C = \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

Тогда при $t = 0\ \ (\dot{x}, \dot{y}) = (-a \sin t, b \cos t) = (0, b)$. Стало быть ориентация выбрана правильно.

Теорема 2.10.2 .
Пусть
D - открыто в $\mathbb{R}^2$, и $\partial D = C$ - правильно ориентирована.
Предположим, что задано две функции $Q(x, y),\ P(x, y)$, такие что $P,\ Q$ дифференцируемы в области $E \mid\ (D \cup \partial D) \subset E$.
Тогда

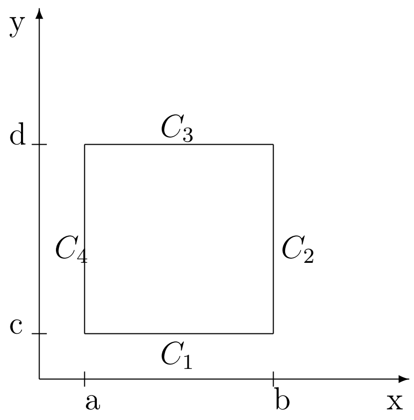
$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int\limits_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

Это равенство называется формулой Грина.

Для начала разберемся на простых примерах, что эта формула значит. Положим $Q(x, y) = 0$. Тогда нам требуется доказать:

$$\iint\limits_D -\frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_C P\, dx$$

Выбрем простую область - прямоугольник. В данном случае $D = I^2$.



$$-\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d \frac{\partial P}{\partial y}\,dy =$$

$$\text{По формуле Ньютона-Лейбница } \int\limits_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$

$$= -\int\limits_a^b dx(P(x,d) - P(x,c)) = -\int\limits_a^b P(x,d)\,dx + \int\limits_a^b P(x,c)\,dx$$

Граница области состоит из отрезков C_1, C_3

$$\int\limits_a^b P(x,c)\,dx = \int\limits_{C1} P\,dx$$

$$-\int\limits_a^b P(x,d)\,dx = \int\limits_b^a P(x,d)\,dx = \int\limits_{C3} P\,dx \text{на } C_2,\ C_4\ x \text{ не меняется} \Rightarrow dx = 0 \cdot dt$$

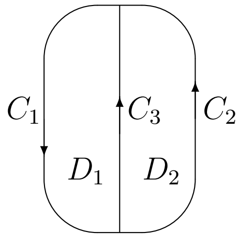
$$\int\limits_{C_2} P(x,y)\,dx = \int\limits_{C_4} P(x,y)\,dx = 0$$

У C_1, C_2, C_3, C_4 конец каждого отрезка совпадает с началом следующего.
Это означает:

$$-\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_{C_1} P\,dx + \int\limits_{C_2} P\,dx + \int\limits_{C_3} P\,dx + \int\limits_{C_4} P\,dx = \int\limits_{C_1+C_2+C_3+C_4} P\,dx$$

Теперь докажем теорему.
□ **Доказательство.**

Шаг 1. Пусть формула Грина верна для областей $D_1,\ D_2 \mid\ D_1 \cap D_2 = \varnothing$. Тогда формула Грина верна для $D_1 \cup D_2$.
Рассмотрим случай:



То есть у D_1 и D_2 есть общая граница. Для $D_1,\ D_2$ по отдельности верна формула Грина:

$$\iint\limits_{D1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{C1} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{C3} P\,dx + Q\,dy$$

$$\iint\limits_{D2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{C2} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{-C3} P\,dx + Q\,dy =$$

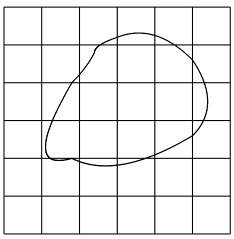
$$= \int\limits_{C2} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{C3} P\,dx + Q\,dy$$

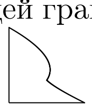
Тогда получаем:

$$\iint\limits_{D1 \cup D2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{C1} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{C2} P\,dx + Q\,dy =$$

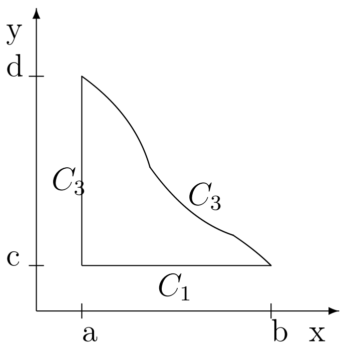
$$= \int\limits_{C1+C2} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\partial(D1+D2)} P\,dx + Q\,dy$$

Шаг 2. Теперь возьмем произвольную область и сделаем ее разбиение.



Формулу Грина для квадрата мы разобрали выше. Так же научились обращаться с формулой Грина для областей с общей границей. Осталось доказать формулу Грина для подобных областей: 
Достаточно доказать при $Q = 0$. При замене x на y и P на Q доказательство аналогично. Докажем:

$$\iint\limits_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_{\partial D} P\,dx$$



Граница состоит из трех отрезков. Зададим параметризацию для каждого из них:

$$C_1: \begin{cases} x = t \\ y = c \end{cases} \quad t \in [a,b];\ C_3: \begin{cases} x = a \\ y = d + c - t \end{cases} \quad t \in [c,d]; C_2: \begin{cases} x = a + b - t \\ y = f(a + b - t) \end{cases} \quad t \in [a,b]$$

$$-\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_a^b dx \int\limits_c^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = -\int\limits_a^b dx P(x,y)\,\Big|_{y=c}^{y=f(x)} =$$

$$= -\int\limits_a^b \left[P(x,f(x)) - P(x,c)\right]\,dx = \int\limits_a^b P(x,c)\,dx - \int\limits_a^b P(x,f(x))\,dx$$

Теперь возьмем интегралы по границе:

$$\int\limits_{\partial D} P(x,y)\,dx = \int\limits_{C1} P(x,y)\,dx + \int\limits_{C2} P(x,y)\,dx + \int\limits_{C3} P(x,y)\,dx$$

$$\int\limits_{C1} P(x,y)\,dx = \int\limits_a^b P(t,c)\,dt$$

$$\int\limits_{C3} P(x,y)\,dx = \int\limits_c^d P(a, d+c-t)\cdot 0 \cdot\, dt = 0$$

$$\int\limits_{C2} P(x,y)\,dx = \int\limits_a^b P(a+b-t, f(a+b-t))\,dt =$$

[Замена: $a+b-t = x \; dx = -dt$]

$$= -\int\limits_a^b P(x,f(x))\,dx$$

■

Следствие 2.10.3 *При условии, что все условия теоремы выполнены:*

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow \int\limits_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = 0$$

Пример 2.10.4 *Пусть* $P = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2+y^2}$ *Пусть* l *- некоторая замкнутая кривая.*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Делаем вывод, что

$$\int\limits_{l} \frac{x}{x^2+y^2}\,dy - -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx = 0$$

Но это неверно.

Разберемся, почему это неверно. в точке (0,0) функции $P,\ Q$ не определены. Если мы применяем формулу Грина на области D, такой что $(0,0) \notin D$, то

$$\int\limits_{l} \frac{x}{x^2+y^2}\,dy - -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx = 0$$

Рассмотрим случай, когда (0,0) принадлежит области.
D открыта $\Rightarrow\ \exists\varepsilon > 0 \mid\ B_\varepsilon(0,0) \subset D$. Рассмотрим область $D \setminus \overline{B}_\varepsilon = D'$.
Точка (0,0) не входит в область D', стало быть для нее применима формула Грина.

$$\iint\limits_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy = \int\limits_{\partial D'} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\partial D} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{x^2+y^2=\varepsilon^2} P\,dx + Q\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = -\int\limits_{x^2+y^2=\varepsilon^2} P\,dx + Q\,dy$$

Параметризуем окружность $x^2+y^2=\varepsilon^2$:

$$\begin{cases} x = \varepsilon\sin t; \\ y = \varepsilon\cos t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \varepsilon\cos t\,dt; \\ dy = -\varepsilon\sin t\,dt. \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \left[-\frac{\varepsilon\cos t}{\varepsilon^2}\cdot\varepsilon\cos t + \frac{\varepsilon\sin t}{\varepsilon^2}\cdot\varepsilon(-\sin t)\right]\,dt = -\int\limits_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = -2\pi$$

Делаем вывод, что когда область D содержит точку (0,0):

$$\int\limits_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = 2\pi$$

Теперь, когда все выводы из Формулы Грина верны, приведем примеры использования результатов.

Пример 2.10.5 *Будем называть замкнутую ломанную без самопересечений полигоном.*
Пусть полигон задан набором вершин и дана точка на плоскости.
Вопрос: где находится точка - внутри области, ограниченной полигоном, или снаружи?
Будем проверять, где находится точка (0,0). Пусть она находится не на границе. l- полигон. Посчитаем интеграл:

$$\int\limits_l -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

Полигон задан набором вершин (a_k, b_k). Тогда $(a_0, b_0) = (a_N, b_N)$. Обозначим $\bar{l}_k = (a_{k+1} - a_k, b_{k+1} - b_k)$. Тогда:

$$\int\limits_l -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{l_k} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

Посчитаем интеграл по l_k:
Задаем параметризацию:

$$l_k = \begin{cases} x = a_{k+1}t + (1-t)a_k; \\ y = b_{k+1}t + (1-t)b_k. \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = (a_{k+1} - a_k)\,dt; \\ dy = (b_{k+1} - b_k)\,dt. \end{cases}$$

$$\int\limits_{l_k} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{-(b_{k+1}t + (1-t)b_k)\cdot(a_{k+1} - a_k) + (a_{k+1}t + (1-t)a_k)\cdot(b_{k+1} - b_k)}{(a_{k+1}t + (1-t)a_k)^2 + (b_{k+1}t + (1-t)b_k)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{([-(b_{k+1} - b_k)(a_{k+1} - a_k) + (a_{k+1} - a_k)(b_{k+1} - b_k)]\cdot t + (-b_k(a_{k+1} - a_k) + a_k(b_{k+1} - b_k}{[(a_{k+1} - a_k)^2 + (b_{k+1} - b_k)^2]\cdot t^2 + [2(a_{k+1} - a_k)a_k + 2(b_{k+1} - b_k)b_k]\cdot t + a_k^2 + b_k^2}$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{a_k b_{k+1} - b_k a_{k+1}}{[(a_{k+1} - a_k)^2 + (b_{k+1} - b_k)^2]\cdot t^2 + [2(a_{k+1} - a_k)a_k + 2(b_{k+1} - b_k)b_k]\cdot t + a_k^2 + b_k^2}\,dt =$$

[*Обозначения: $\bar{e}_{k+1} = (a_{k+1}, b_{k+1})$, $\bar{e}_k = (a_k, b_k)$. То есть $\bar{e}_{k+1}$, $\bar{e}_k$ - вектора. Тогда:*]

$$= [\bar{e}_k \times \bar{e}_{k+1}] \cdot \int\limits_0^1 \frac{dt}{\|\bar{e}_{k+1} - \bar{e}_k\|^2 t^2 + 2(\bar{e}_{k+1} - \bar{e}_k, \bar{e}_k)t + \|\bar{e}_k\|^2}$$

Несложными преобразованиями можем получить:

$$\int \frac{dt}{at^2+bt+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2at+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + Const$$

В нашем случае:

$$\begin{gathered}
-D = 4ac - b^2 = 4 \cdot \|e_{k+1}-e_k\|^2 \cdot \|e_k\|^2 - 4\cdot(e_{k+1}-e_k, e_k)^2 = \\
= 4(e_{k+1}-e_k, e_{k+1}-e_k)\|e_k\|^2 - 4((e_{k+1},e_k) - \|e_k\|^2)^2 = \\
= 4\big((\|e_{k+1}\|^2 - 2(e_{k+1},e_k) + \|e_k\|^2)\|e_k\|^2 - ((e_{k+1},e_k) - \|e_k\|^2)^2\big) = \\
= 4\big(\|e_{k+1}\|^2\|e_k\|^2 - (e_{k+1},e_k)^2\big)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\int\limits_0^1 \frac{dt}{at^2+bt+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2at+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\Bigg|_0^1 = \\
= \frac{2}{\sqrt{-D}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2a+b}{\sqrt{-D}} - \operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{-D}}\right) = \\
= \frac{2}{\sqrt{-D}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2a}{\sqrt{-D}} \cdot \frac{-D}{2a(2c+b)}\right) = \\
= \frac{2}{\sqrt{-D}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-D}}{2c+b}
\end{gathered}$$

$$2c + b = 2\|e_k\|^2 + 2(e_{k+1}-e_k, e_k) = 2(e_{k+1}, e_k)$$

$$\int\limits_{l_k} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy =$$

$$= [\overline{e}_k \times \overline{e}_{k+1}] \cdot \frac{1}{\sqrt{\|\overline{e}_{k+1}\|^2\|\overline{e}_k\|^2 - (\overline{e}_{k+1},\overline{e}_k)^2}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\|\overline{e}_{k+1}\|^2\|\overline{e}_k\|^2 - (\overline{e}_{k+1},\overline{e}_k)^2}}{(\overline{e}_{k+1},\overline{e}_k)}$$

Теперь осталось только просуммировать по всем k. Если сумма стремится к нулю, то точка (0,0) лежит вне области, ограниченной полигоном. В противном случае, точка (0,0) лежит внутри.

Пример 2.10.6

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$$

Положим $Q = x,\ P = 0$. *Тогда* $\iint\limits_D dx\,dy = \int\limits_{\partial D} x\,dy$ *- площадь* D.
Положим $Q = 0,\ P = -y$. *Тогда* $-\int\limits_{\partial D} y\,dx$ *- тоже площадь* D.
Тогда $\frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} x\,dy - y\,dx$ *- так же площадь* D.
Значит мы можем посчитать площадь фигуры, взяв криволинейный интеграл.
Например, посчитаем площадь эллипса:

$$D:\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$$

$$S(D) = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} x\,y - y\,dx$$

Параметризация:

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -a\sin t\,dt; \\ dy = a\cos t\,dt. \end{cases}$$

$$S(D) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(a\cos t \cdot b\cos t + a\sin t \cdot b\sin t)\,dt = \pi ab$$

Теперь найдем площадь полигона.

$$l_k = \Big\{x = a_{k+1}t + (1-t)a_k; y = b_{k+1}t + (1-t)b_k. \quad t \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \Big\{dx = (a_{k+1} - a_k)\,dt; dy = (b_{k+1} - b_k)\,dt.$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{l_k} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \big[(a_{k+1}t + (1-t)a_k)(b_{k+1} - b_k) - (b_{k+1}t + (1-t)b_k)(a_{k+1} - a_k)\big]\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (\big[(a_{k+1} - a_k)(b_{k+1} - b_k) - (b_{k+1} - b_k)(a_{k+1} - a_k)\big] \cdot t + a_k(b_{k+1} - b_k) - b_k(a_{k+1} - a_k))\,d$$

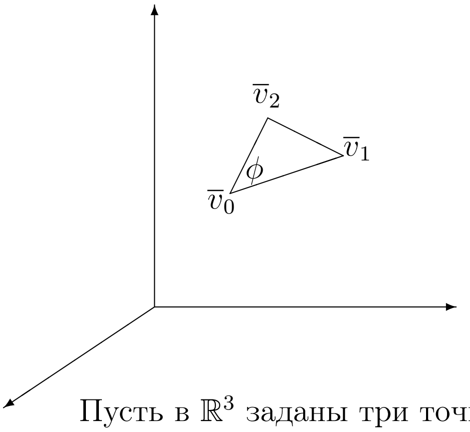
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (a_k b_{k+1} - b_k a_{k+1})\,dt = \frac{1}{2}(a_k b_{k+1} - b_k a_{k+1})$$

Получили площадь треуголника со знаком, образованного радиус-векторами концов l_k *и самим вектором* l_k. *Просуммировав все такие площади, мы получим площадь полигона.*

2.11 Поверхностные интегралы.

2.11.1 Краткие сведения из алгебры и геометрии

Будем работать в $\mathbb{R}^3$.



Пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы три точки (три радиус-вектора) $\overline{v}_0,\ \overline{v}_1,\ \overline{v}_2$.
Мы можем провести плоскость через три точки. Построим в этой плоскости треугольник на вершинах $\overline{v}_0,\ \overline{v}_1, \overline{v}_2$. Будем искать площадь этого треугольника:

$$S(\triangle) = \frac{1}{2}ab\sin\phi \quad a = \|\overline{v}_1 - \overline{v}_0\|_3; \ \ b = \|\overline{v}_2 - \overline{v}_0\|_3$$

$$\cos\phi = \frac{\langle \overline{v}_1 - \overline{v}_0, \overline{v}_2 - \overline{v}_0\rangle}{\|\overline{v}_1 - \overline{v}_o\|\|\overline{v}_2 - \overline{v}_0\|}; \ \ \sin^2\phi = 1 - \cos^2\phi \ \Rightarrow \sin\phi = \pm\sqrt{1-\cos^2\phi}$$

$$\Rightarrow \sin\phi = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{\langle \overline{v}_1 - \overline{v}_0, \overline{v}_2 - \overline{v}_0\rangle}{\|\overline{v}_1 - \overline{v}_o\|\|\overline{v}_2 - \overline{v}_0\|}\right)^2}$$

$$S(\triangle) = \pm\frac{1}{2}\cdot\frac{\|\overline{v}_1 - \overline{v}_0\|\cdot\|\overline{v}_2 - \overline{v}_0\|}{\|\overline{v}_1 - \overline{v}_0\|\cdot\|\overline{v}_2 - \overline{v}_0\|}\cdot\sqrt{\|\overline{v}_1 - \overline{v}_0\|^2\cdot\|\overline{v}_2 - \overline{v}_0\|^2 - \langle \overline{v}_1 - \overline{v}_0, \overline{v}_2 - \overline{v}_0\rangle^2} =$$
$$= \pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\|\overline{v}_1 - \overline{v}_0\|^2\cdot\|\overline{v}_2 - \overline{v}_0\|^2 - \langle \overline{v}_1 - \overline{v}_0, \overline{v}_2 - \overline{v}_0\rangle^2}$$

Выведенная формула справедлива в $\mathbb{R}^n$, $\forall n$. Докажем, что

$$\|\overline{v}_1 - \overline{v}_0\|^2\cdot\|\overline{v}_2 - \overline{v}_0\|^2 - \langle \overline{v}_1 - \overline{v}_0, \overline{v}_2 - \overline{v}_0\rangle^2 = \|(\overline{v}_1 - \overline{v}_0)\times(\overline{v}_2 - \overline{v}_0)\|^2$$

Модуль векторного произведения векторов есть площадь параллелограмма, построенного на этих векторах. Площадь треугольника - половина площади параллелограмма. Введем обозначения:

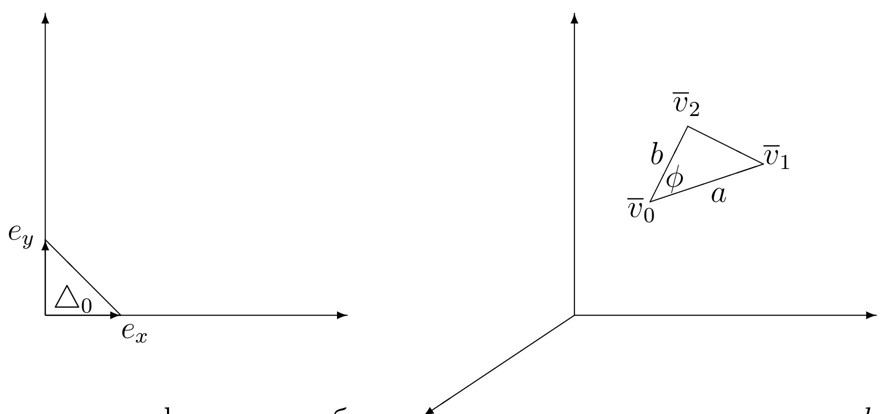
$$\begin{cases} \overline{v}_1 - \overline{v}_0 = (x_1, y_1, z_1) \\ \overline{v}_2 - \overline{v}_0 = (x_2, y_2, z_2) \end{cases}$$

Получили отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Рассмотрим матрицу оторбражения:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}$$

Найдем миноры данной матрицы:
Строки $(1,2): \ x_1 y_2 - x_2 y_1$
Строки $(1,3): \ x_1 z_2 - x_2 z_1$
Строки $(2,3): \ y_1 z_2 - y_2 z_1$
Миноры этой матрицы - координаты вектора, полученного в результате произведения векторов (x_1, y_1, z_1) И (x_2, y_2, z_2). Тогда

$$\|(\overline{v}_1 - \overline{v}_0) \times (\overline{v}_2 - \overline{v}_0)\|^2 = \text{сумма квадратов миноров матрицы}$$



Придумаем афинное преобразование, переводящее e_x в a, а e_y в b. Афинное отображение записывается в виде: $A \cdot \binom{u}{v} + \overline{b}$. Вектор $\overline{b} \in \mathbb{R}^3$ - точка, в которую отображение переводит точу $(0,0)$. То есть $\overline{b} = \overline{v}_0$.

$$(\overline{v}_1 - \overline{v}_0, \overline{v}_2 - \overline{v}_0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$
$$(\overline{v}_1 - \overline{v}_0, \overline{v}_2 - \overline{v}_0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Отображение придумали. Площадь треугольника $\triangle_0$ в $\mathbb{R}^2$:

$$S(\triangle_0) = \frac{1}{2}$$

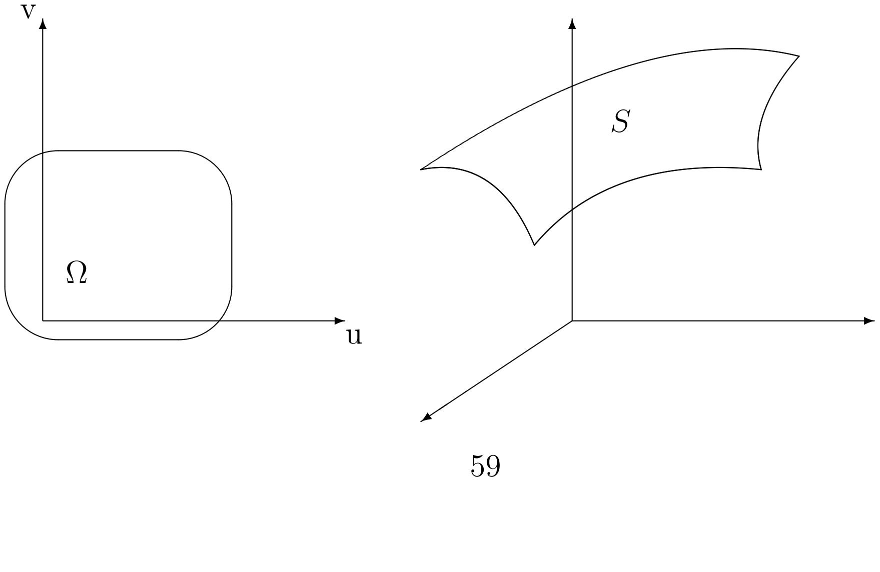
Площадь треугольника в $\mathbb{R}^3$:

$$S(\triangle) = \frac{1}{2} \cdot \|(\overline{v}_1 - \overline{v}_0)\| \times (\overline{v}_2 - \overline{v}_0)\|$$

То есть при таком афинном преобразовании площадь треугольника умножается на $\sqrt{\text{сумма квадратов всех миноров}}$.

2.11.2 Триангуляция поверхости.

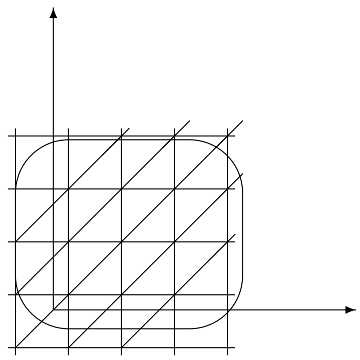
Пусть S - двумерное аналитическое многообразие в $\mathbb{R}^3$. Предполагаем, что оно параметризуемо.
Это значит, что $\exists$ отображение $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Тогда $\Phi(\Omega) = S$.

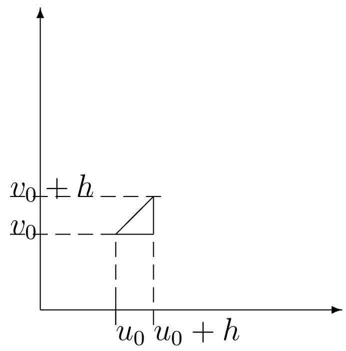


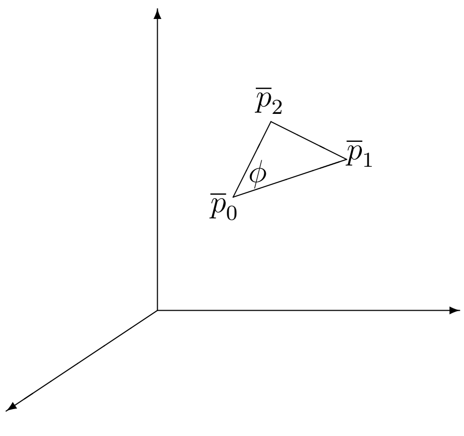
Будем считать, что отображение задается координатными функциями:

$$
\begin{aligned}
x &= \phi_1(u, v) \\
y &= \phi_2(u, v) \\
z &= \phi_3(u, v)
\end{aligned}
$$

Считаем функции ϕ_i дважды непрерывно-дифференцируемыми.
Теперь разрежем плоскость на квадратики $h \times h$. В каждом их них проведем диагональ. Так получим треугольники в $\mathbb{R}^2$:







Рассмотрим один треугольник. Афинным преобазованием он переводится в треугольник в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} (u_0, v_0) \to \overline{p}_0 \\ (u_0 + h, v_0) \to \overline{p}_1 \\ (u_o + h, v_0 + h) \to \overline{p}_2 \end{cases}$$

Если провести через эти точки линии на поверхности S при мелком разбиении, площадь, ограниченная получившейся фигурой, будет стремиться к площади треугольника в плоскости, проведенной через них. Отобразив так каждый треугольник из разбиения Ω получим плоские треугольники. Такое преобразование поверхности называется триангуляцией.

2.11.3 Поверхностный интеграл первого рода

Площадь треугольника, отображенного из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^3$ мы считать научились. Умножив площадь треугольника на 2, получим площадь четырехугольника. Обозначим площадь четырехугольника через $\triangle S$. Тогда:

$$\triangle S = \Big(\sum_{i=1}^{3}[\phi_i(u_0+h, v_0) - \phi_i(u_0, v_0)]^2 \cdot \sum_{i=1}^{3}[\phi_i(u_0, v_0+h) - \phi_i(u_0, v_0)]^2 -$$

$$- \left[\sum_{i=1}^{3}(\phi_i(u_0+h, v_0) - \phi_i(u_0, v_0)) \cdot (\phi_i(u_0, v_0+h) - \phi_i(u_0, v_0))\right]^2\Big)^{1/2}$$

По формуле Лагранжа:

$$\phi_i(u_0+h, v_0) - \phi_i(u_0, v_0) \cong \frac{\partial \phi_i}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot h$$

$$\phi_i(u_0, v_0+h) - \phi_i(u_0, v_0) \cong \frac{\partial \phi_i}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot h$$

Подставляем

$$\triangle S = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial \phi_i}{\partial u}\Big)^2 \cdot h^2 \cdot \sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial \phi_i}{\partial v}\Big)^2 \cdot h^2 - \Big(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \phi_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial v}\Big)^2 \cdot h^4} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial \phi_i}{\partial u}\Big)^2 \cdot \sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial \phi_i}{\partial v}\Big)^2 - \Big(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \phi_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial v}\Big)^2} \cdot h^2$$

Нашли площадь четырехугольника с точностью до $o(h^2)$.
Матрица Якоби:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial u} & \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial u} & \frac{\partial\phi_2}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial u} & \frac{\partial\phi_3}{\partial v} \\ \end{pmatrix}$$

Введем обозначения:

$$E = \sum_{i=1}^{3} \Big(\frac{\partial\phi_i}{\partial u}\Big)^2; \quad G = \sum_{i=1}^{3} \Big(\frac{\partial\phi_i}{\partial v}\Big)^2; \quad F = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\phi_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial\phi_i}{\partial v}$$

Тогда:

$$\triangle S = \sqrt{EG - F^2} \cdot h^2$$

S теперь разбита на криволинейные четырехугольники S_i. У каждого из них есть проообраз в Ω. Причем, мы умеем находить площадь S_i.
Пусть $f : S \to \mathbb{R}$. Тогда $f(\Phi(u, v)) : \Omega \to R$.
$\triangle S$ определена на Ω для любого квадрата. Пусть N - количество квадратов, h - мелкость разбиения.

$$\sum_{i=1}^{N} f(\Phi(u_i, v_i)) \cdot S_i(u_i, v_i) \cdot h^2$$

Это есть сумма Римана, заданная на области Ω. Тогда предел при $h \to 0$ обозначается:

$$\int\limits_S f(S)\, dS = \iint\limits_\Omega f(\Phi(u, v)) \cdot \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

Это и есть поверхностный интеграл первого рода.
Если $f(S) \equiv 1$, то $\int\limits_S dS$ называется площадью поверхности.

2.11.4 Свойства поверхностного интеграла первого рода.

1) Линейность:

$$\int\limits_S (f(S) + g(S))\, dS = \int\limits_S f(S)\, dS + \int\limits_S g(S)\, dS$$

2) Если $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, то :

$$\int\limits_{S_1 \cup S_2} f(S)\, dS = \int\limits_{S1} f(S)\, dS + \int\limits_{S2} f(S)\, dS$$

линейность по областям.
3) Интеграл не зависит от эквивалентной параметризации.

Пример 2.11.1 *Пусть поверхность S задана графиком функции $z = \phi(x, y)$.*

$$S = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

Матрица Якоби:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$

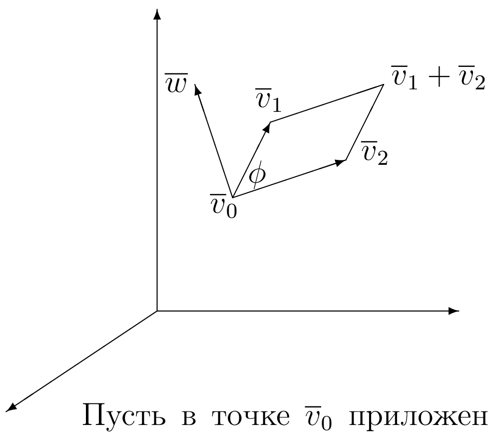
$$E = 1 + \Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)^2$$
$$G = 1 + \Big(\frac{\partial f}{\partial v}\Big)^2$$
$$F = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$
$$EG - F^2 = \Big(1 + \Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)^2\Big)\Big(1 + \Big(\frac{\partial f}{\partial v}\Big)^2\Big) - \Big(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\Big)^2 =$$
$$= 1 + \Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial v}\Big)^2$$

$\Rightarrow$ *площадь поверхности S заданной функции*

$$S = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial v}\Big)^2}\, du\, dv$$

2.11.5 Поверхностные интегралы второго рода

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ три точки: $\overline{v}_0, \overline{v}_1, \overline{v}_2$.



Пусть в точке $\overline{v}_0$ приложен вектор $\overline{w}$. Стремимся параллелограмму и вектору $\overline{w}$ сопоставить число. Составим матрицу, где в качестве строчек будут вектора:

$$A = \begin{pmatrix} \overline{w} \\ \overline{v}_1 - \overline{v}_0 \\ \overline{v}_2 - \overline{v}_0 \end{pmatrix}$$

В качестве числа возьмем определитель A. Из алгебры:

$$\det A = \big\langle \overline{w}, (\overline{v}_1 - \overline{v}_0) \times (\overline{v}_2 - \overline{v}_0) \big\rangle$$

Пусть S - двумерное аналитическое многообразие в $\mathbb{R}^3$. S параметризовано:

$$S = \begin{cases} x = \phi_1(u, v) \\ y = \phi_2(u, v) \\ z = \phi_3(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Будем считать,что функции ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 дифференцируемы столько раз, сколько понадобится. Предположим, что задано отображение $F : S \to \mathbb{R}^3$, которое назовем векторным полем. Будем считать, что

$$F(x, y, z) = \big(F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)\big) \quad (x, y, z) \in S$$

Задано разбиение области Ω. Каждый прямоугольник из разбиения переходит в криволинейный четырехугольник.
Рассмотрим один прямоугольник:

В точке $\overline{v}_0$ приложен вектор $(F_1(\overline{v}_0), F_2(\overline{v}_0), F_3(\overline{v}_0))$, так как мы задали векторное поле.

Теперь можем посчитать детерминант описанной выше матрицы:

$$\det\begin{pmatrix}\overline{F}(\overline{v}_0)\\ \overline{v}_1-\overline{v}_0\\ \overline{v}_2-\overline{v}_0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}F_1(\overline{v}_0) & F_2(\overline{v}_0) & F_3(\overline{v}_0)\\ \phi_1(u_0+h,v_0)-\phi_1(u_0,v_0) & \phi_2(u_0+h,v_0)-\phi_2(u_0,v_0) & \phi_3(u_0+h,v_0)-\phi_3(u_0,v_0)\\ \phi_1(u_o,v_0+h)-\phi_1(u_0,v_0) & \phi_2(u_0,v_0+h)-\phi_2(u_o,v_0) & \phi_3(u_0,v_0+h)-\phi_3(u_0,v_0)\end{vmatrix}$$

По формуле Лагранжа:

$$\phi_i(u_0+h,v_0)-\phi_i(u_0,v_0)\cong\frac{\partial\phi_i}{\partial u}(u_0,v_0)\cdot h$$

$$\phi_i(u_0,v_0+h)-\phi_i(u_0,v_0)\cong\frac{\partial\phi_i}{\partial v}(u_0,v_0)\cdot h$$

$$\Rightarrow\det\begin{pmatrix}\overline{F}(\overline{v}_0)\\ \overline{v}_1-\overline{v}_0\\ \overline{v}_2-\overline{v}_0\end{pmatrix}\cong\det\begin{pmatrix}F_1(\overline{v}_0) & F_2(\overline{v}_0) & F_3(\overline{v}_0)\\ \frac{\partial\phi_1}{\partial u} & \frac{\partial\phi_2}{\partial u} & \frac{\partial\phi_3}{\partial u}\\ \frac{\partial\phi_1}{\partial v} & \frac{\partial\phi_2}{\partial v} & \frac{\partial\phi_3}{\partial v}\end{pmatrix}\cdot h^2$$

Теперь рассмотрим сумму по всем четырехугольникам при $h\to 0$:

$$\sum\det\begin{pmatrix}F_1(\overline{v}_0) & F_2(\overline{v}_0) & F_3(\overline{v}_0)\\ \frac{\partial\phi_1}{\partial u} & \frac{\partial\phi_2}{\partial u} & \frac{\partial\phi_3}{\partial u}\\ \frac{\partial\phi_1}{\partial v} & \frac{\partial\phi_2}{\partial v} & \frac{\partial\phi_3}{\partial v}\end{pmatrix}\cdot h^2\to$$

$$\to\iint_\Omega\det\begin{pmatrix}F_1(\Phi(u,v)) & F_2(\Phi(u,v)) & F_3(\Phi(u,v))\\ \frac{\partial\phi_1}{\partial u} & \frac{\partial\phi_2}{\partial u} & \frac{\partial\phi_3}{\partial u}\\ \frac{\partial\phi_1}{\partial v} & \frac{\partial\phi_2}{\partial v} & \frac{\partial\phi_3}{\partial v}\end{pmatrix}du\,dv=$$

$$=\iint_\Omega\Big[F_1(\frac{\partial\phi_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial\phi_3}{\partial v}-\frac{\partial\phi_3}{\partial u}\cdot\frac{\partial\phi_2}{\partial v})-F_2(\frac{\partial\phi_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial\phi_3}{\partial v}-\frac{\partial\phi_3}{\partial u}\cdot\frac{\partial\phi_1}{\partial v})+$$

$$+F_3(\frac{\partial\phi_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial\phi_2}{\partial v}-\frac{\partial\phi_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial\phi_1}{\partial v})\Big]\,du\,dv=$$

$$=\iint_\Omega F_1\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial u}\cdot\phi_3v-\frac{\partial\phi_3}{\partial u}\cdot\frac{\partial\phi_2}{\partial v}\right)du\,dv+\iint_\Omega F_2\left(-\frac{\partial\phi_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial\phi_3}{\partial v}+\frac{\partial\phi_3}{\partial u}\cdot\frac{\partial\phi_1}{\partial v}\right)du\,dv+$$

$$+\iint_\Omega F_3\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial\phi_2}{\partial v}-\frac{\partial\phi_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial\phi_1}{\partial v}\right)du\,dv=$$

[Обозначение:]

$$=\iint_S F_1\,dy\,dz+F_2\,dz\,dx+F_3\,dx\,dy$$

Это называют поверхностным интегралом второго рода.
В физике принято: $\overline{F} = (P, Q, R)$. Тогда:

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

Выражение

$$w^2 = P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

назовем дифференциальной 2-формой. Тогда поверхностный интеграл второго рода можно записать так:

$$\boxed{\iint_\Omega w^2}$$

Свойства поверхностного интеграла второго рода.

1)Поверхностный интеграл второго рода не зависит от эквивалентной параметризации.

2) $\iint_S (w_1^2 + w_2^2) = \iint_S w_1^2 + \iint_S w_2^2$ - линейность.

3) $\iint_S \lambda w^2 = \lambda \cdot \iint_s w^2, \;\; \lambda \in \mathbb{R}$ - однородность.

4) Пусть $S_1 \cap S_2 = \varnothing, \;\; S_1, S_2$ - два аналитических многообразия. Тогда

$$\iint_{S1 \cap S_2} w^2 = \iint_{S1} w^2 + \iint_{S2} w^2$$

- аддитивность по областям.

2.11.6 Формула Гаусса-Остроградского.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана область V с границей S. Считаем, что S - кусочно-аналитическое многообразие.
Пусть $\phi_1, \; \phi_2, \; \phi_3$ - параметризация поверхности S.
Введем вектора:

$$\sigma_1 = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u}, \frac{\partial \phi_2}{\partial u}, \frac{\partial \phi_3}{\partial u}\right), \qquad \sigma_2 = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial v}, \frac{\partial \phi_2}{\partial v}, \frac{\partial \phi_3}{\partial v}\right)$$

Введем вектор нормали:

$$\overline{n} = \frac{\overline{\sigma}_1 \times \overline{\sigma}_2}{\|\overline{\sigma}_1 \times \overline{\sigma}_2\|_3}.$$

Будем говорить, что граница S правильно ориентирована, если вектор нормали направлен вне области.

Теорема 2.11.2 *(Формула Гаусса-Остроградского) .*
Пусть
V - область, S - граница области V, правильно ориентирована.
Пусть , Q, R - три функции, определенные на множестве $E \mid (V \cup S) \subset E$.
Причем P, Q, R непрерывно-дифференцируемы в E.
Тогда

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz$$

Эта формула называется формулой Гаусса-Остроградского.

□ **Доказательство.**
Шаг 1. Пусть теорема верна для областей V_1, V_2 и $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Отсюда следует, что теорема верна для $V_1 \cup V_2$.
Если у областей нет общих границ, то утверждение очевидно.
Рассмотрим области с общей границей:

$$\iiint_{V1} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = \iint_{S1} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy +$$

$$+ \iint_{S3} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy$$

$$\iiint_{V2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = \iint_{S2} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy +$$

$$+ \iint_{S3} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy$$

Сложим левые и правые части равенств, учитывая ориентацию:

$$\iiint_{V1 \cup V2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = \iint_{S1} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy +$$

$$+ \iint_{S2} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy + \iint_{S3} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy -$$

$$- \iint_{S3} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iint_{S1 \cup S2} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy$$

Шаг 2. Можно положить $P = 0,\ Q = 0$. Достаточно доказать формулу для $R \neq 0$. То есть:

$$\iint_S R\, dx\, dy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$

Шаг 3. Сделаем разбиение V. Получим кубики и криволинейные кубы вида:

Для кубиков случай тривиален. Доказательство проводится аналогично тривиальному случаю в формуле Грина. Остаются варианты, когда уравнение границы:
1) $x = f(y, z)$
2) $y = f(x, z)$
3) $z = f(x, y)$
Рассмотрим последний случай. Первые два доказываются аналогично.
Рассмотрим границы:

$$S_1: \quad x = 0; \quad S_2: \quad y = 0; \quad S_3: \quad z = 0.$$

Обозначим область внутри криволинейного куба E.

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_\Omega \left(\int_0^{z=f(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz \right) dx\, dy =$$

[По формуле Ньютона-Лейбница:]

$$= \iint_\Omega (R(x, y, f(x, y)) - R(x, y, 0))\, dx\, dy =$$

$$= \iint_\Omega R(x, y, f(x, y))\, dx\, dy - \iint_\Omega R(x, y, 0)\, dx\, dy$$

Рассмотрим каждую границу отдельно:

$$\iint_{S1} R\,dx\,dy = \iint_{\Omega} R(x,y,0)\,dx\,dy$$

$$S_2 = \begin{cases} x = u \\ y = 0 \\ z = v \end{cases}$$

$$\text{Матрица Якоби:} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iint_{S2} R\,dx\,dy = 0$$

$$S_3 = \begin{cases} x = 0 \\ y = u \\ z = v \end{cases}$$

$$\iint_{S2} R\,dx\,dy = 0$$

$$S_4 = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}$$

$$\text{Матрица Якоби:} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\iint_{S4} R\,dx\,dy = \iint_{\Omega} R(u,v,f(u,v)) \cdot 1\,du\,dv$$

Складываем все:

$$\iint_{\Omega} R\,dx\,dy = -\iint_{\Omega} R(x,y,0)\,dx\,dy + \iint_{\Omega} R(x,y,f(x,y)) \cdot 1\,dx\,dy$$

■

Следствие 2.11.3 *Пусть* $P = x$, $Q = 0$; $R = 0$. *Из формулы Гаусса-Остроградского следует:*

$$\iint_S x\,dy\,dz = \iiint_V \,dx\,dy\,dz \Rightarrow \ \Rightarrow \iint_S x\,dy\,dz \text{ - \textit{объем} } V$$

2.11.7 формула Стокса

Теорема 2.11.4 .
Пусть
S - аналитическое многообразие размерности 2 в $\mathbb{R}^3$.
l - одномерная замкнутая кривая, такая что $l \subset S$. Кривая l называется правильно ориентированной, если вектор $\overline{\sigma} = \overline{n} \times \overline{v}$ направлен внутрь S.
Пусть $P,\ Q,\ R$ - три функции, непрерывно-дифференцируемые в области $E \mid S \cup l \subset E$.
Тогда

$$\int_l P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Это равенство называется формулой Стокса.

$\square$ **Доказательство.** Введем параметризацию S:

$$S : \begin{cases} x = \phi_1(u, v) \\ y = \phi_2(u, v) \\ z = \phi_3(u, v) \end{cases}$$

Будем считать, что S такая, что l параметризуется l'. Пусть

$$l' : \begin{cases} u = \phi_1(\tau) \\ v = \psi_2(\tau) \end{cases} \qquad \tau \in [a, b]$$

Следовательно для l имеет место параметризация:

$$l : \begin{cases} x = \phi_1(\psi_1(\tau), \psi_2(\tau)) = x(\tau) \\ y = \phi_2(\psi_1(\tau), \psi_2(\tau)) = y(\tau) \\ z = \phi_3(\psi_1(\tau), \psi_2(\tau)) = z(\tau) \end{cases}$$

$$\int_l P\,dx = \int\limits_a^b P(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \cdot \frac{dx}{d\tau} \cdot d\tau =$$

$$= \int\limits_a^b P(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \cdot \frac{d}{d\tau}(\psi_1(\tau), \psi_2(\tau)) =$$

$$= \int\limits_a^b P(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} \right) \cdot d\tau =$$

$$= \int\limits_a^b \left[P \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} + P \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} \right] \cdot d\tau =$$

$$\left[du = \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau}, \quad dv = \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} \right]$$

$$= \int_{l'} P \frac{\partial \phi_1}{\partial u}\,du + P \frac{\partial \phi_1}{\partial v} dv =$$

$$\left[T = P \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial u}, \quad U = P \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \right]$$

$$= \int_{l'} T\,du + U\,dv =$$

Применяем формулу Грина:

$$= \iint_{S'} \left(\frac{\partial U}{\partial u} - \frac{\partial T}{\partial v} \right) du\,dv =$$

$$= \iint_{S'} \Big(\frac{\partial}{\partial u} \big(P \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \big) - \frac{\partial}{\partial v} \big(P \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial u} \big) \Big) du\,dv =$$

$$\iint_{S'} \left(\frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial \phi_1}{\partial v} + P \cdot \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u \partial v} - \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial v \partial u} \right) du\,dv =$$

$$= \iint_{S'} \left(\frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial \phi_1}{\partial v} - \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} \right) du\,dv$$

Посчитаем производные P отдельно:

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(P(\phi_1(u,v), \phi_2(u,v), \phi_3(u,v))) = \\ = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_3}{\partial u}$$

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(P(\phi_1(u,v), \phi_2(u,v), \phi_3(u,v))) = \\ = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_3}{\partial v}$$

Подставим полученные результаты:

$$\iint_{S'} \left(\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial \phi_1}{\partial v} - \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \right) du\, dv = \\ = \iint_{S'} \Big(\big(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_3}{\partial u} \big) \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial v} - \\ - \big(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_3}{\partial v} \big) \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial u} \Big) du\, dv = \\ = \iint_{S'} \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial v}\frac{\partial \phi_2}{\partial u} - \frac{\partial \phi_1}{\partial u}\frac{\partial \phi_2}{\partial v} \right) du\, dv + \\ + \iint_{S'} \frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial v}\frac{\partial \phi_3}{\partial u} - \frac{\partial \phi_1}{\partial u}\frac{\partial \phi_3}{\partial v} \right) du\, dv = \\ = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\, dz\, dx - \iint_S \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$$

$$\int_l P\, dx = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\, dz\, dx - \iint_S \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy \\ \int_l Q\, dy = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy - \iint_S \frac{\partial Q}{\partial y}\, dy\, dz \\ \int_l R\, dz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y}\, dy\, dz - \iint_S \frac{\partial R}{\partial x}\, dx\, dz$$

Скалдывая все, получаем формулу Стокса.

2.11.8 Независимость интеграла второго рода от пути.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}$, Ω - выпуклая область.
Пусть A и B - точки из Ω - концы произвольной кривой $l \in \Omega$.
Пусть $P,\ Q,\ R$ - три функции,напрерывно-дифференцируемые в Ω.
Будем говорить, что криволинейный интеграл второго рода $\int_A^B P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ не зависит от пути интегрирования, если для всякой пары кривых $l_1,\ l_2$ с началом в точке A и концом в точке B справедливо:

$$\int_{l1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{l2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Теорема 2.11.5 *Длф независимости криволинейного интеграла от пути необходимо и достаточно, чтобы в области Ω было выполнено условие:*

$$(*)\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

□ **Доказательство.**
Достаточность.
Пусть в Ω выполнено (*). Пусть $A,\ B \in \Omega$. $l_1,\ l_2$ - две кривые, соединяющие A и B.
Рассмотрим кривую $l = l_1 - l_2$:

$$\int_l P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$
$$= \int_{l1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int_{-l2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$
$$= \int_{l1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz - \int_{l2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

l - замкнутая кривая. Применима формула Стокса:

$$\int_l P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_D \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0 \qquad \text{В силу (*)}$$
$$\Rightarrow \int_{l1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{l2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Так как l_1 и l_2 выбирались произвольно, интеграл не зависит от пути.
Необходимость.
Пусть интеграл не зависит от пути, но усливие (*) не выполнено.
Тогда $\exists c \in \Omega \mid \frac{\partial Q}{\partial x}(c) - \frac{\partial P}{\partial y}(c) \neq 0$.
Без ограничения общности, можно считать, что $\frac{\partial Q}{\partial x}(c) - \frac{\partial P}{\partial y}(c) > 0$.
Так как $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}(c)$ - непрерывная функция, то $\exists B_\varepsilon(c) \mid \frac{\partial Q}{\partial x}(c) - \frac{\partial P}{\partial y}(c) > 0 \;\; \forall (x, y, z) \in B_\varepsilon(c)$.
$\Rightarrow \exists I^3 \subset B_\varepsilon(c) \mid \forall (x, y, z) \in I^3 \;\; \frac{\partial Q}{\partial x}(c) - \frac{\partial P}{\partial y}(c) > 0$.

$$\int_{l3+l1+l4} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{l3+l2+l4} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$
$$\Rightarrow \int_{l1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{l2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$
$$\Rightarrow \int_{l1-l2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

С другой стороны, примняем формулу Стокса:

$$\int_{l1-l2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$
$$\iint_\Delta \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Параметризуем Δ:

$$\Delta = \begin{cases} z = const \\ x = p \\ y = q \end{cases} \qquad dz = 0;$$

$$\int_{l1-l2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy > 0$$
$$\Rightarrow \int_{l1-l2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz > 0$$

Получили противоречие. Следовательно условие необходимо.

■

Теорема 2.11.6 .

Пусть

Ω - *выпуклая область в* $\mathbb{R}^3$.

Пусть P, Q, R - *непрерывно-дифференцируемы в* Ω *и выполнено*

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

Тогда
$\exists$ функция $f(x,y,z) \mid \frac{\partial f}{\partial x} = P,\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q,\ \frac{\partial f}{\partial z} = R$.
f имеет вид:

$$f(u,v,w) = \int_{A=(x_0,y_0,z_0)}^{B=(u,v,w)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Интеграл берется по любому пути $l \in \Omega$, с началом в A и концом в B. $A, B \in \Omega$.

Следствие 2.11.7 *Если P, Q, R удовлетворяют (*) в области Ω, то*

$$\int_A^B P\,dx + Q\,dy + R\,dz = f(B) - f(A)$$

$\square$ **Доказательство.** Согласно теореме о независимости интеграла от пути, можно взять в качестве кривой l прямую, соединяющую точки A и B:

$$l = \begin{cases} x = x_0 + (u - x_0)\cdot t \\ y = y_o + (v - y_0)\cdot t \\ z = z_0 + (w - z_0)\cdot t \end{cases} \qquad t \in [0,1]; \quad \begin{cases} dx = (u - x_0)\,dt \\ dy = (v - y_0)\,dt \\ dz = (w - z_0)\,dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(u,v,w) = \int_A^B P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$\int_0^1 \Big[P(x_0+(u-x_0)t, y_0+(v-y_0)t, z_0+(w-z_0)t)\cdot(u-x_0)+$$
$$+Q(x_0+(u-x_0)t, y_0+(v-y_0)t, z_0+(w-z_0)t)\cdot(v-y_0)+$$
$$+R(x_0+(u-x_0)t, y_0+(v-y_0)t, z_0+(w-z_0)t)\cdot(w-z_0)\Big]\,dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \int_0^1 \Big[\frac{\partial}{\partial u}(P(u-x_0)) + \frac{\partial}{\partial u}(Q(v-y_0)) + \frac{\partial}{\partial u}(R(w-z_0))\Big]\,dt =$$
$$= \int_0^1 \Big[\frac{\partial P}{\partial u}(u-x_0) + P + \frac{\partial Q}{\partial u}(v-y_0) + \frac{\partial R}{\partial u}(w-z_0)\Big]\,dt =$$
$$= \int_0^1 \Big[\frac{\partial P}{\partial x}t\cdot(u-x_0) + P + \frac{\partial Q}{\partial x}t\cdot(v-y_0) + \frac{\partial R}{\partial x}t\cdot(w-z_0)\Big]\,dt =$$
$$= \int_0^1 \Big[\frac{\partial P}{\partial x}t\cdot(u-x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}t\cdot(v-y_0) + \frac{\partial R}{\partial z}t\cdot(w-z_0) + P\Big]\,dt =$$

$$\Big[\text{Заметим: } \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial x}(u-x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(v-y_0) + \frac{\partial P}{\partial z}(w-z_0)\Big]$$

$$= \int_0^1 \Big[\frac{dP}{dt}\cdot t + P\Big]\,dt =$$
$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}(Pt)\,dt = Pt\,\big|_0^1 = P\,\big|_{t=1}$$

$$P\,\big|_{t=1} = P(u,v,w)$$

$\frac{\partial f}{\partial v}$ и $\frac{\partial f}{\partial w}$ рассматриваются аналогично. ■

Глава 3

Теория Лебега.

3.1 Мера Лебега. Интеграл Лебега.

3.1.1 Основные определения

Пусть A, B - пара множеств.

Определение 3.1.1 *Определим операцию "разность множеств":*

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

Определение 3.1.2 *.*
$\mathfrak{R}$ - множество некоторых множеств.
Будем говорить, что $\mathfrak{R}$ называется кольцом (множеств), если выполняются следующие условия:
1) $\forall A, B \in \mathfrak{R}\ \ A \cup B \in \mathfrak{R}$;
2) $\forall A, B \in \mathfrak{R}\ \ A \setminus B \in \mathfrak{R}$.

Следствие 3.1.3 *.*
1)$\varnothing \in \mathfrak{R},\ \ \varnothing = A \setminus A$;
2)$\forall A, B \in \mathfrak{R}\ \ A \cap B \in \mathfrak{R}$.

Пример 3.1.4 *.*
Пусть X - некоторое множество.
$\mathfrak{O}(X)$ - множество всех пожмножеств X.
Очевидно, что $\mathfrak{O}(x)$ - кольцо.

Определение 3.1.5 .
Пусть $\mathfrak{R}$ *- кольцо множеств.*
$\mathfrak{R}$ *называется* σ*-кольцом, если выполнено следующее свойство:*
для любого счетного набора элементов в $A_i \in \mathfrak{R}(i = 1, 2...)$ *имеет место* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{R}$.

Следствие 3.1.6 .
Пусть $A_i \in \mathfrak{R},\ i = 1, 2, ...$
Тогда $\bigcap_{i=1}^{\infty} \in \mathfrak{R}$.

□ **Доказательство.**
$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \setminus (\bigcup_{i=2}^{\infty}(A_1 \setminus A_i))$
■

Определение 3.1.7 .
Отображение $\phi : \mathfrak{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ *называется функцией множества, если* $\forall A \in \mathfrak{R}$ *определен элемент* $\phi(A) \in \overline{\mathbb{R}}$*, причем:*
1) *не существует элементов* $A, B \in \mathfrak{R}$*, таких что одновременно выполняется:* $\phi(A) = -\infty,\ \ \phi(B) = +\infty$
2) *существует хотя бы один элемент* $B \in \mathfrak{R}$*, такой что* $|\phi(B)| < \infty$.

Определение 3.1.8 .
Пусть ϕ *- функция множеств.*
ϕ *называется аддитивной функцией множеств, если* $\forall A,\ B \in \mathfrak{R} \mid A \cap B = \varnothing$ *имеет место:* $\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B)$.

Определение 3.1.9 .
Пусть $\mathfrak{R}$ *-* σ*-кольцо.*
Функция множеств ϕ *называется счетно-аддитивной (*σ*-аддитивной) функцией множеств,если для любого набора* $A_i(i = 1, 2, ...) \mid A_i \cap A_j = \varnothing$ *если* $i \neq j$, $\phi(\bigcup_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(A_i)$

Пример 3.1.10 .
Пусть X *- конечное множество и* $\mathfrak{R} = \mathfrak{O}(X)$.
ϕ *- количество элементов в конечном множестве.*

$$\phi(A) = card(A) = |A|$$

Теорема 3.1.11 *(Свойства счетно-аддитивной функции множеств)* .
Пусть
ϕ *- счетно-аддитивная функция множеств.*
Тогда

1)$\phi(\varnothing) = 0$;
2)*если* $A_1,\ A_2, ...A_n \in \mathfrak{R},\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j,$ *то*

$$\phi(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \phi(A_1) + \phi(A_2) + ... + \phi(A_n)$$

3)$\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B) - \phi(A \cap B)$
4) *Пусть* $A \subset B$, ϕ *- положительная. Тогда* $\phi(A) \leqslant \phi(B)$.
5) *Пусть* $A \subset B$ *и* $|\phi(A)| \neq \infty$. *Тогда* $\phi(B \setminus A) = \phi(B) - \phi(A)$.

Теорема 3.1.12 .
Пусть
ϕ *- счетно-аддитивна на* σ*-кольце* $\mathfrak{R}$.
Предположим, что задано семейство множеств $A_n \in \mathfrak{R}$ |
$A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ... \subset A;\ \ A \in \mathfrak{R}$ *и* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
В этом случае семейство A_n *называют исчерпанием множества* A.
Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \phi(A_n) = \phi(A).$$

□ **Доказательство.**
Положим:
$B_1 = A_1$;
$B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ при $n \geqslant 2$.
Так как A_n - цепочка вложенных друг в друга множеств, это возможно.
Тогда $\forall i \neq j\ \ B_i \cap B_j = \varnothing$ - по построению.
$A_m = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_m$ - по построению.
Тогда $\phi(A_m) = \phi(B_1) + \phi(B_2) + ... + \phi(B_m)$ - по второму свойству счетно-аддитивной функции.

$$\Rightarrow \phi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(B_k)$$

Так как ϕ - функция множеств, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \phi(B_k)$ сходится.
$\Rightarrow |\phi(A) - \phi(A_n)| = |\sum_{k=n}^{\infty} \phi(B_k) \to 0$

$$\lim_{n \to \infty} \phi(A_n) = \phi(A)$$

3.1.2 Построение меры Лебега

Введем $n-$интервал:

$$I^n = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \ldots \times \langle a_n, b_n \rangle$$

Будем считать,что $a_i < b_i \; \forall i = 1..n$.
Введем меру интервала:

$$m(I^n) = |b_1 - a_1| \cdot |b_2 - a_2| \cdot ... \cdot |b_n - a_n|$$

Определение 3.1.13 *Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется элементарным, если его можно представить в виде объединения конечного числа $n-$интервалов.*

Обозначим через $\mathfrak{E}$ множество всех элементарных подмножеств в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3.1.14 *(свойства элементарных множеств).*
1) $\mathfrak{E}$ *- кольцо множеств, но не $\sigma-$кольцо;*
2) *Если $A \in \mathfrak{E}$, то его можно представить в виде объединения попарно-непересекающихся $n-$интервалов.*
3) *Для $\forall A \in \mathfrak{E}$ определено:*

$$m(A) = \sum_{k=1}^{N} m(I_k^n)$$

где I_k^n - непересекающиеся $n-$интервалы, причем $m(A)$ не зависит от разбиения на непересекающиеся интервалы.
4) *m - положительная аддитивная функция на $\mathfrak{E}$.*

Определение 3.1.15 .
Пусть ϕ - положительная аддитивная функция на $\mathfrak{E}$.
ϕ называется регулярной функцией, если $\forall \varepsilon$, $\forall A \in \mathfrak{E}$
$\exists F, G \in \mathfrak{E} \mid F$ - замкнутое множество, G - открытое множество.
F, G такие что
$F \subset A \subset G \quad$ и $\quad -\varepsilon + \phi(G) \leqslant \phi(A) \leqslant \phi(F) + \varepsilon$

Теорема 3.1.16 *m - регулярная функция множеств.*

□ **Доказательство.**
Очевидно, достаточно доказать теорему для $\mathbb{R}^1$.
$I^1 = \langle a, b \rangle$.

$$m(I^1) = |b - a|$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $F = [a + \varepsilon/2, b - \varepsilon/2]$.
Очевидно, что $F \subset I^1$, F - замкнутое, так как содержит все свои предельные точки.
Рассмотрим $G = (a - \varepsilon/2, b + \varepsilon/2)$. $I^1 \subset G$, G - открыто.

$$m(F) = |b - a| - \varepsilon = m(I^1) - \varepsilon$$
$$m(G) = |b - a| + \varepsilon = m(I^1) + \varepsilon$$
$$m(G) - \varepsilon = m(I^1) = m(F) + \varepsilon$$

■

Определение 3.1.17 .
Пусть μ *- аддитивная, положительная, регулярная функция на* $\mathfrak{E}$.
Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$.
Предположим, что $E \subset \sum_{k=1}^{\infty} A_k$, *где* $A_k \in \mathfrak{E}\ \forall k$.
Тогда определим

$$\mu^*(E) = \inf(\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k))$$

где inf *берется по всем возможным покрытиям множества* E.
μ^* *называется внешней мерой множества* E.

Теорема 3.1.18 *(свойства внешней меры.)*
1) $\mu^*(E) \geqslant 0$
2) *Если* $E_1 \subset E_2$, *то*

$$\mu^*(E_1) \leqslant \mu^*(E_2)$$

3)$\forall A \in \mathfrak{E}\ \ \mu^*(A) = \mu(A)$. *(Следует из регулярности.)*
4) *Если* $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, *то*

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$$

- полуаддитивность внешней меры.

Определение 3.1.19 .
Пусть $a, b \subset \mathbb{R}^n$.
Определим

$$S(A, B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

- симметрическая разность.

Определение 3.1.20 .
Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$. *Тогда определим расстояние:*

$$d(A, B) = \mu^*(S(A, B))$$

Теорема 3.1.21 *(свойства расстояния.)*
1)$d(A, B) = d(B, A)$; $d(A, \varnothing) = \mu^*(A)$; $d(A, A) = 0$.
2)$\forall A, B, C \quad d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B)$
3) *Если* $\mu^*(A) < \infty$ *или* $\mu^*(B) < \infty$, *то* $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant d(A, B)$.

Замечание:
d - не метрика, т.к. не выполняется условие:
$d(A, B) = 0 \Rightarrow A = B$.

Пример 3.1.22 *Пусть A - счетное число точек $x_n \in \mathbb{R}^n$, $n \in N$.*

$$d(A, \varnothing) = \mu^*(A)$$

$\forall x_k \in I_k^n \mid m(I_k^n) \leqslant \varepsilon \cdot 2^{-k}$
$A \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k^n, \quad \mu^*(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k^n) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-k} = \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \leqslant \varepsilon$
$\Rightarrow \mu^*(A) = 0$, *но* $A \neq \varnothing$.

Определение 3.1.23 .
Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \subset A$.
Будем говорить, что $A_n \to A$ при $n \to \infty$, если $\lim_{n\to\infty} d(A_n, A) = 0$.

Определение 3.1.24 .
Множество A называется конечно $\mu-$измеримым, если существует последовательность $A_n \in \mathfrak{E} \mid A_n \to A$ при $n \to \infty$.

Множество всех конечно $\mu-$измеримых множеств обозначается $\mathfrak{M}_F(\mu)$.
Упражнение. Доказать, что треугольник - конечно $\mu-$измерим на плоскости.

Определение 3.1.25 .
Множество Aназывается $\mu-$измеримым, если

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \mid E_k \in \mathfrak{M}_F(\mu)$$

Множество измеримых множеств обозначается $\mathfrak{M}(\mu)$.

Теорема 3.1.26 *(Основная.)*
$\mathfrak{M}(\mu)$ - $\sigma-$кольцо, μ^* - счетно-аддитивная функция на $\sigma-$кольце.

$\square$ **Доказательство.**Без доказательства.$\blacksquare$

В дальнейшем μ^* будем обозначать μ, которое получается из m. μ, полученная из m называется мерой Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Определение 3.1.27 *Измеримое множество $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ называется множеством меры ноль,если $\mu(A) = 0$.*

Замечание.
1) Всякое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ измеримо;
2) Счетные множества имеют меру ноль;
3) Существуют несчетные множества меры ноль;
4) Существуют неизмеримые множества.

Если $X \subset \mathbb{R}^n$ и X измеримо, то на нем можно определить меру Лебега.
Будем называть X измеримым пространством.

3.1.3 Измеримые функции.

Определение 3.1.28 *Пусть X - измеримое пространство.*
Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. f называется измеримой функцией на X, если
$S = \{x \in X \mid f(x) > a\}$ - измеримо для любого $a \in \mathbb{R}$.

.

Замечание. Из того, что существуют неизмеримые множества следует, что существуют неизмеримые функции.

Теорема 3.1.29 *Следующие условия эквивалентны:*
1) $\{x \in X \mid f(x) > a\}$ *измеримо* $\forall a \in \mathbb{R}$;
2) $\{x \in X \mid f(x) \geqslant a\}$ *измеримо* $\forall a \in \mathbb{R}$;
3) $\{x \in X \mid f(x) < a\}$ *измеримо* $\forall a \in \mathbb{R}$;
4) $\{x \in X \mid f(x) \leqslant a\}$ *измеримо* $\forall a \in \mathbb{R}$.

□ **Доказательство.**
$1 \Rightarrow 2:$
$\{x \in X \mid f(x) \geqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in X \mid f(x) > a - 1/n\}$
$2 \Rightarrow 3:$
$\{x \in X \mid f(x) < a\} = X - \{x \in X \mid f(x) \geqslant a\}$
$3 \Rightarrow 4:$
$\{x \in X \mid f(x) \leqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in X \mid f(x) < a + 1/n\}$
$4 \Rightarrow 1:$
$\{x \in X \mid f(x) > a\} = X - \{x \in X \mid f(x) \leqslant a\}$.
■

Утверждение 3.1.30 *Если f измерима на измеримом множестве X, то $|f|$ также измерима.*

□ **Доказательство.**Упражнение. ■

Утверждение 3.1.31 *Пусть f_n - последовательность измеримых функций на измеримом множестве X.*
Положим:

$$g(x) = \sup_n f_n(x); \quad h(x) = \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x).$$

Тогда $g(x)$, $h(x)$ - измеримы на X.

□ **Доказательство.**Следует из теоремы выше. ■

Утверждение 3.1.32 *Пусть $f(x)$, $g(x)$ - измеримы на измеримом множестве X. Тогда*

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad p(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

измеримы.
В частности: так как 0 *- измеримая функция на X, то*

$$f^{+}(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^{-}(x) = \min\{f(x), 0\}$$

обе измеримы.

Утверждение 3.1.33 *Пусть $f_n(x) \to f(x)$, $x \in X$. X- измеримое множество. Тогда если $f_n(x)$ - измеримо $\forall n$, то $f(x)$ измерима.*

Утверждение 3.1.34 *Пусть $f(x), g(x)$ -измеримые функции на измеримом множестве X.*
Тогда $f(x) + g(x)$ и $f(x) \cdot g(x)$ - также измеримы на X.

3.1.4 Простые (ступенчатые) функции.

Определение 3.1.35 *Пусть X - измеримое пространство. $\phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$.*
Функция ϕ называется простой(ступенчатой), если $\phi(X) \subset \overline{\mathbb{R}}$ - конечное множество.

Определение 3.1.36 *Пусть $E \subset X$. Тогда*

$$K_E(X) = \begin{cases} 1, \quad x \in E; \\ 0, x \notin E. \end{cases}$$

называется характеристической функцией множества E.

$\phi(X)$ - конечное множество. То есть $\phi(X) = \{c_1, c_2, ...c_n\}$, где $c_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1..n$.
Определим:

$$E_i = \{x \in X \mid \phi(x) = c_i\} \quad i = 1..n$$

Тогда

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot K_{Ei}(x)$$

Выводы:
1) Функция $\phi(x)$ измерима на X тогда и только тогда,когда $\forall i E_i$ - измеримы.
2)Если ϕ_1 и ϕ_2 - измеримые простые функции, $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\phi_1 + \phi_2$ и $\lambda\phi_1$ - также простые.

Теорема 3.1.37 *(о приближении простыми функциями.)*
Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. *Тогда существует последовательность простых функций* $\{S_n(x)\}, n \in \mathbb{N} \mid \forall x \in X \;\; S_n(x) \to f(x)$ *при* $n \to \infty$ *(поточечно сходится).*
Если $f(x)$ *- измерима на* X, *то последовательность* $S_n(x)$ *можно выбрать так,что* $S_n(x)$ *измерима* $\forall n \in \mathbb{N}$.
Если $f(x) \geqslant 0$, *то последовательность* S_n *можно выбрать так, что* $S_n(x)$ *монотонна по* n $\forall x \in X$.

3.1.5 Интеграл Лебега от простых функций.

Определение 3.1.38 *Пусть* $f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot K_{Ei}(x)$ *- простая функция.*
Тогда $E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \neq j,\ \cup_{i=1}^{n} E_i = X$.
Будем считать, что $f(x) \geqslant 0$ $(c_i \geqslant 0\ \forall i)$.
Пусть $E \subset X,\ E$ *- измеримо.*
Тогда $J_E(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mu(E \cap E_i)$. $J_E(f)$ *называется интегралом Лебега от простой функции* f.

Теорема 3.1.39 *(Свойства интеграла Лебега от простой функции.)*
1) Интеграл определен корректно(не зависит от представления функции в виде простой).
2) $J_E(f_1 + f_2) = J_E(f_1) + J_E(f_2)$ *- аддитивность.*
3) $J_E(\lambda f) = \lambda J_E(f)$ *- однородность.*
4) если $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2$, *то* $J_E(f_1) \leqslant J_E(f_2)$ *- монотонность интеграла.*
5) Пусть $F, G \subset X, F \cap G = \varnothing,\ \ F, G$ *- измеримы. Тогда* $J_{F\cup G}(f) = J_F(f) + J_G(f)$ *- аддитивность по областям.*

3.1.6 Интеграл Лебега от измеримых функций.

Определение 3.1.40 *Пусть* $f(x) \geqslant 0$. $f(x)$ *- измерима на* E. $E \in \mathfrak{M}(\mu)$.
Тогда

$$(*) \qquad \int_E f\, d\mu = \sup_S J_E(S)$$

sup берется по всем простым функциям $S \mid 0 \leqslant S \leqslant f$ *на* E.
Тогда

$$\int_E f\, d\mu$$

называется интегралом Лебега от измеримой функции f *на измеримом множестве* E *относительно меры* μ.
$\int_E f\, d\mu = \infty$ *допусткается.*

Следствие 3.1.41 *Если $f \geqslant 0$ простая измеримая функция,то $\int_E f\,d\mu = J_E(f)$.*

Определение 3.1.42 *Пусть f - измеримая на E функция. Тогда $f = f^+ - f^-$. f^+, f^- измеримы.*
Тогда если хотя бы один из интегралов $\int_E f^+\,d\mu$, $\int_E f^-\,d\mu$ конечен, то $\int_E f\,d\mu$ определяется как

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu$$

В этом случае определен интеграл $\int f\,d\mu$, который называется интегралом Лебега от измеримой функции.
Тогда $\mathfrak{L}(\mu)$ - множество измеримых функций, интегрируемых по Лебегу.

Теорема 3.1.43 *(Свойства функций, интегрируемых по Лебегу.)*
1) Если f измерима и ограничена на E (измеримом) и $\mu(E) < \infty$, то $f \in \mathfrak{L}(\mu)$.
2) Если f - измерима и $a \leqslant f(x) \leqslant b$ $\forall x \in E$, $\mu(E) < \infty$, то

$$a\mu(E) \leqslant \int_E f\,d\mu \leqslant b\mu(E)$$

- теорема о среднем.
3) f, g - измеримы. $f \leqslant g$ на измеримом множестве E. Тогда $\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu$ - монотонность.
4) $\int_E cf\,d\mu = c\int_E f\,d\mu$ - однородность.
5) $\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$ - аддитивность.
6) Если f - измерима на E, $A \subset E$, A - измеримо, то из $f \in \mathfrak{L}(\mu)$ на E следует $f \in \mathfrak{L}(\mu)$ на A.
7) Если f -измерима на E и $\mu(E) = 0$, то $f \in \mathfrak{L}(\mu)$ на E и $\int_E f\,d\mu = 0$.
8) Пусть F, G - измеримы. $F \cap G = \varnothing$. $f \in \mathfrak{L}(\mu)$ на $F \cup G$. Тогда

$$\int_{F\cup G} f\,d\mu = \int_F f\,d\mu + \int_G f\,d\mu$$

9) Пусть $f \in \mathfrak{L}(\mu)$. Тогда определим $\phi(A) = \int_A f\,d\mu$.
$\phi(A)$ - аддитивная функция множеств. Если f - положительна, то $\phi(A)$ - положительно-аддитивная функция.
Если $E = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$,то $\int_E f\,d\mu = \sum_{i=1}^\infty \int Aif\,d\mu$.
Это означает: $\phi(E) = \sum_{i=1}^\infty \phi(Ai)$ - счетная аддитивность.

Определение 3.1.44 *Пусть f, g определены на E. Рассмотрим множество $A = \{x \in E | f(x) \neq g(x)\}$.*
Будем говорить, что $f \sim g$ если $\mu(A) = 0$.
В этом случае говорят, что функции совпадают с точностью до множества меры ноль.

Если $f \sim g$, то

$$\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$$

Теорема 3.1.45 *(Об абсолютной интегрируемости.)*
Пусть измеримая $f \in \mathfrak{L}(\mu)$ на E.
Тогда $|f| \in \mathfrak{L}(\mu)$ на E и

$$\Big| \int_E f \, d\mu \Big| = \int_E |f| \, d\mu$$

Замечание: Из того, что $|f| \in \mathfrak{L}(\mu)$ не следует, что $f \in \mathfrak{L}(\mu)$.

Теорема 3.1.46 *(О мажоранте.)*
Пусть f измерима на $E \in \mathfrak{M}(\mu)$. Если $|f| \leqslant g(x)$ на E и $g(x) \in \mathfrak{L}(\mu)$ на E, то $f(x) \in \mathfrak{L}(\mu)$ на E.

Теорема 3.1.47 *(Беппо-Леви о монотонной сходимости.)*
Пусть $E \in \mathfrak{M}(\mu)$. $\{f_n(x)\}$ - последовательность измеримых функций на E.
Причем
1) $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant ... \leqslant f_n(x) \leqslant ...$
2) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \;\; \forall x \in E$.
Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

Следствие 3.1.48 *Пусть $\{fn(x)\}$ - последовательность измеримых положительных функций.*
Пусть $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
Тогда

$$\int_E f(x) \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x) \, d\mu$$

Теорема 3.1.49 *(Лемма Фату.)* .
Пусть
$E \in \mathfrak{M}(\mu)$, $\{f_n(x)\}$ - последовательность измеримых положительных функций. Пусть $f(x) = \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) \;\; x \in E$.
Тогда

$$\int_E f \, d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu$$

Теорема 3.1.50 *(Лебега об ограниченной сходимости.)*
Пусть $E \in \mathfrak{M}(\mu)$. $\{f_n(x)\}$ *- последовательность измеримых функций, такая что* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *(поточечная сходимость).*
Если $\exists g(x) \in \mathfrak{L}(\mu)$ *на* E*, такая что* $|f_n(x)| \leqslant g(x)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall x \in E$*,то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x) \, d\mu = \int_E f(x) \, d\mu$$

В частности: $f(x) \in \mathfrak{L}(\mu)$ *на* $E \ \Rightarrow\ f_n(x) \in \mathfrak{L}(\mu) \forall n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.1.51 *(связь интегралов Римана и Лебега.)*
Пусть f *- интегрируема по Риману на* $[a, b]$*, тогда* f *- интегрируема по Лебегу на* $[a, b]$ *и интегралы совпадают как числа.*