Математичекий анализ III семестр ФИТ НГУ 2006г.

MFH Corporation

Лектор:
Кренделев Сергей Фёдорович.

Редакторы:
Брусенцов Леонид Евгеньевич и Тютюньков Вячеслав Евгеньевич.

Создатели:
Абашия Шота и Зорин Константин

Используемая среда:
LaTeX 2_ε

15 января 2007 г.

Оглавление

Глава 1

Интегралы, зависящие от параметра

07.09.2006

1.1 Основные определения

ОПР 1.1.1 (Функции, зависящей от параметра)**.**
Пусть $f\colon \langle a,\, b\rangle \times U \to \mathbb{R}^m$, U *— открыто в* $\mathbb{R}^n$. *Определим* $f(x,\, \overline{\alpha})$, $x \in \langle a,\, b\rangle$, $\overline{\alpha} \in U \subset \mathbb{R}^n$, $f(x,\, \overline{\alpha}) = f_{\overline{\alpha}}(x)$.
Отображение f *задает* функцию, зависящую от параметра $\overline{\alpha}$.

ОПР 1.1.2 (Равномерного стремления)**.**
Пусть $\overline{\alpha} \to \overline{\alpha}_0$ *в смысле* $\mathbb{R}^n$[I]. *Будем говорить, что функция* $f(x,\, \overline{\alpha})$ равномерно стремится к функции $f(x,\, \alpha)$ на интервале $\langle a,\, b\rangle$ *если:*

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0 \big| \, \|\overline{\alpha} - \overline{\alpha}_0\|_n < \delta \Rightarrow \|f(x,\, \overline{\alpha}) - f(x,\, \overline{\alpha}_0)\|_m < \varepsilon - \forall x \in \langle a,\, b\rangle.$$

Обозначение: $f(x,\, \overline{\alpha}) \rightrightarrows f(x,\, \overline{\alpha}_0)$ *при* $\overline{\alpha} \to \overline{\alpha}_0$ *на* $\langle a,\, b\rangle$.

ОПР 1.1.3 (Интеграла, зависящего от параметра)**.**
Будем рассматривать функции при $m = 1$ *на* $[a,\, b]$. *Рассмотрим:*

$$F(\overline{\alpha}) = \int_a^b f(x,\, \overline{\alpha})dx. \tag{1.1.1}$$

Будем считать, что $\overline{\alpha} \in U \subset \mathbb{R}^n$, α *такие, что выполняется (1.1.1). Будем называть выражение (1.1.1)* интегралом, зависящем от параметра.

Лемма 1.1.4 (О предельном переходе)**.**

[I] $\|\overline{\alpha} - \overline{\alpha}_0\|_n \to 0$.

▷ Пусть

$f(x,\,\overline{\alpha}) \rightrightarrows f(x,\,\overline{\alpha}_0)$ при $\overline{\alpha} \to \overline{\alpha}_0$ на $[a,\,b]$.

▷ Тогда

$$\lim_{\overline{\alpha}\to\overline{\alpha}_0} F(\overline{\alpha}) = \lim_{\overline{\alpha}\to\overline{\alpha}_0} \int_a^b f(x,\,\overline{\alpha})dx =$$
$$= \int_a^b \lim_{\overline{\alpha}\to\overline{\alpha}_0} f(x,\,\overline{\alpha})dx = \int_a^b f(x,\,\overline{\alpha}_0)dx = F(\alpha_0).$$

▷ **Доказательство**.

Пусть $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|b-a|}$. Рассмотрим:

$$|F(\overline{\alpha}) - F(\overline{\alpha}_0)| = \left|\int_a^b f(x,\,\overline{\alpha})dx - \int_a^b f(x,\,\overline{\alpha}_0)dx\right| =$$
$$=_{(\text{по свойству интеграла})}= \left|\int_a^b f(x,\,\overline{\alpha}) - f(x,\,\overline{\alpha}_0)dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b |f(x,\,\overline{\alpha}) - f(x,\,\overline{\alpha}_0)|\,dx.$$

Выберем $\delta > 0 \big|\ \|\overline{\alpha} - \overline{\alpha}_0\|_n < \delta \Rightarrow |f(x,\,\overline{\alpha}) - f(x,\,\overline{\alpha}_0)| < \varepsilon_1$.
Это возможно в силу равномерной сходимости. Получаем:

$$|F(\overline{\alpha}) - F(\overline{\alpha}_0)| \leqslant \int_a^b \varepsilon_! dx \quad \forall\alpha\big|\ \|\overline{\alpha} - \overline{\alpha}_0\| < \delta =$$
$$= \varepsilon_1 \int_a^b dx = \varepsilon_2(b-a) = \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\big|\ \|\overline{\alpha} - \overline{\alpha}_0\| < \delta \to |F(\alpha) - F(\alpha_0)|.$$

Это означает, что $\exists \lim_{\overline{\alpha}\to\overline{\alpha}_0} F(\overline{\alpha}) = F(\overline{\alpha}_0)$.

□

Теорема 1.1.5 (О непрерывности)**.**

▷ Пусть

$f(x,\,\overline{\alpha})$ является непрерывной функцией от $n+1$ переменной на множестве $[a,\,b] \times U$.

▷ Тогда

$$F(\overline{\alpha}) = \int_a^b f(x, \overline{\alpha})dx$$

$F(\overline{\alpha})$ — непрерывной функция на U.

▷ **Доказательство**.

Пусть $\overline{\alpha}_0 \subset$ произвольно. Т.к. U открыто, то $\exists \varepsilon > 0 \big| B_\varepsilon(\overline{\alpha}_0) \subset U \Rightarrow$ существует замкнутый n-мерный куб $I_n \subset B_\varepsilon(\overline{\alpha}_0)$.

Значит $[a, b] \times I_n = I_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

I_{n+1} по построению замкнуто и ограничено и, следовательно, компактно.

Любая непрерывная функция на компактном множестве является равномерно непрерывной. Это означает, что $f(x, \overline{\alpha}) \rightrightarrows f(x, \overline{\alpha}_0)$ на $[a, b]$.

Следовательно выполнено условие леммы 1.1.4, следовательно $\forall \overline{\alpha} \to \overline{\alpha}_0$ выполнено $F(\overline{\alpha}) \to F(\overline{\alpha}_0) \Rightarrow F$ — непрерывно в точке $\overline{\alpha}_0$.

Поскольку $\overline{\alpha}_0 \subset U$ — произвольно, то это означает, что $F(\overline{\alpha})$ непрерывно на U.

□

1.2 Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 1.2.1 (О дифференцировании)**.**

▷ Пусть

$f(x, \overline{\alpha})\colon [a, b] \times U \to \mathbb{R}$, причем существует частичная производная $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_i}(x, \overline{\alpha})$ для некоторого $i \in [1, n]$. Причем, $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_i}(x, \overline{\alpha})$ — непрерывна в некоторой окрестности точки $\overline{\alpha}_0$.

▷ Тогда

если

$$F(\overline{\alpha}) = \int_a^b f(x, \overline{\alpha})dx,$$

то

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_i}(\overline{\alpha}_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}(x, \overline{\alpha}_0)dx.$$

▷ **Доказательство**.

Пусть есть точка $\overline{\alpha}_0$. Рассмотрим:

$$\frac{F(\alpha_0^1, \ldots, \alpha_0^{i-1}, \tau, \alpha_0^{i+1}, \ldots, \alpha_0^n) - F(\alpha_0^1, \ldots, \alpha_0^n)}{\tau - \alpha_0^i} =$$

$$= \frac{1}{\tau - \alpha_0^i} \int_a^b f(x, \alpha_0^1, \ldots, \alpha_0^{i-1}, \tau, \alpha_0^{i+1}, \ldots, \alpha_0^n) - f(x, \overline{\alpha}_0) dx =$$

$$= \int_a^b \frac{f(x, \alpha_0^1, \ldots, \alpha_0^{i-1}, \tau, \alpha_0^{i+1}, \ldots, \alpha_0^n) - f(x, \overline{\alpha}_0)}{\tau - \alpha_0^i} dx.$$

Т.к. $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_i}$ существует в точке $\overline{\alpha}_0$, то это означает:

$$\lim_{\tau \to \overline{\alpha}_0^i} \frac{f(x, \alpha_0^1, \ldots, \alpha_0^{i-1}, \tau, \alpha_0^{i+1}, \ldots, \alpha_0^n) - f(x, \overline{\alpha}_0)}{\tau - \overline{\alpha}_0^i} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}(x, \overline{\alpha}_0).$$

По условию существует окрестность точки $\overline{\alpha}_0$, в которой $\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$ — непрерывна по условию. Следовательно, по теореме о непрерывности 1.1.5 следует, что функция $\dfrac{F(\alpha_0^1, \ldots, \alpha_0^{i-1}, \tau, \alpha_0^{i+1}, \ldots, \alpha_0^n) - F(\overline{\alpha}_0)}{\tau - \alpha_0^i}$ — непрерывна по τ в окрестности точки α_0^i. Следовательно:

$$\exists \lim_{\tau \to \alpha_0^i} \frac{(\alpha_0^1, \ldots, \alpha_0^{i-1}, \tau, \alpha_0^{i+1}, \ldots, \alpha_0^n) - F(\alpha_0)}{\tau - \alpha_0^i} = \frac{\partial F}{\partial \alpha_i}(\overline{\alpha}_0).$$

□

Пример 1.2.2 (Типичный для непрерывности и дифференцируемости)**.**

▷ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(100 - \sin^2 x) dx.$

▷

$$I(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t^2 - \sin^2 x) dx \qquad \text{, потребуем } t > 1.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\ln(t^2 - \sin^2 x)) = \frac{2t}{t^2 - \sin^2 x} \qquad \text{— непрерывна, } t > 1,\ \ 0 \leqslant x \leqslant \tfrac{\pi}{2}$$

$$I'(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t}{t^2 - \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{t^2 - 1}}.$$

Следовательно:

$$I(t) = \int \frac{\pi}{\sqrt{t^2-1}} dt = \pi \ln(t + \sqrt{t^2-1} + c).$$

Значит:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t^2 - \sin^2 x) dx = \pi \ln(t + \sqrt{t^2-1}) + c$$

$$c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t^2 - \sin^2 x) dx - \pi \ln(t + \sqrt{t^2-1}) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t^2(1 - \frac{\sin^2 x}{t^2})) dx - \pi \ln(t + \sqrt{t^2-1}) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln t^2 + \ln(1 - \frac{\sin^2 x}{t^2})) dx - \pi \ln(t + \sqrt{t^2-1}) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \frac{\sin^2 x}{t^2}) dx + \frac{\pi}{2} \cdot 2 \ln|t| - \pi \ln(t + \sqrt{t^2-1})$$

$$c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \frac{\sin^2 x}{t^2}) dx - \pi \ln(\frac{t + \sqrt{t^2-1}}{t})$$

$$\lim_{t\to\infty} \ln(\frac{t + \sqrt{t^2-1}}{t}) = \ln 2$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \frac{\sin^2 x}{t^2}) dx =_{(\{\tau = \frac{1}{t}\})}=$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \tau^2 \sin^2 x) dx.$$

$\exists \tau_0 \big| \forall 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0 \quad \ln(1 - \tau^2 x)$ — непрерывен на множестве $[0, \frac{\pi}{2}]$ и $[0, \tau_0]$. Если непрерывен, то можно переставить предел и интеграл местами.

Следовательно:

$$\lim_{\tau\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \tau^2 \sin^2 x) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\tau\to 0} \ln(1 - \tau^2 \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1) dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 0 - \pi \ln(2) = -\pi \ln 2.$$

$$I(t) = \pi \ln(t + \sqrt{t^2-1}) - \pi \ln 2 = \pi \ln\left(\frac{t + \sqrt{t^2-1}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(100 - \sin^2 x) dx = \pi \ln\left(\frac{10 + \sqrt{99}}{2}\right).$$

Теорема 1.2.3 (Формула Ньютона-Лейбница)**.**

▷ Пусть

дано множество $[a, b] \times [c, d]$, $f(x, t)$ — определена на $[a, b] \times [c, d]$. Предположим, что даны две функции $\phi(t)$, $\psi(t)$.

Рассмотрим функции:

$$F(t) = \int_{\phi(t)}^{\psi(t)} f(x, t)dx.$$

Потребуем, чтобы $\forall t \in [c, d]$ интервал $[\phi(t), \psi(t)] \subset [a, b]$ если $\phi(t) \leqslant \leqslant \psi(t)$ и в противном случае $[\psi(t), \phi(t)] \subset [a, b]$. $\phi(t)$, $\psi(t)$ отображает интервал $[c, d] \to [a, b]$.

Пусть $\phi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны на $[c, d]$, $t_0 \in [c, d]$.

Предположим, что $\phi'(t)$, $\psi'(t)$ определены. Относительно $f(x, t)$ выполнены условия теоремы о дифференцировании, т.е. $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$ существует и непрерывна в окрестности t_0.

▷ Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t_0) = \int_{\psi(t)}^{\phi(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)dx + \psi'(t_0) \cdot f(\psi(t_0), t_0) - \phi'(t_0) \cdot f(\phi(t_0), t_0)$$

— формула Ньютона-Лейбница.

▷ **Доказательство**.

∘ Рассмотрим:

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0}\left(\int_{\phi(t)}^{\psi(t)} f(x, t)dx - \int_{\phi(t_0)}^{\psi(t_0)} f(x, t_0)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{t - t_0}(\int_{\phi(t)}^{\phi(t_0)} f(x, t)dx + \int_{\phi(t_0)}^{\psi(t_0)} f(x, t)dx + \int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} f(x, t)dx -$$

$$- \int_{\phi(t_0)}^{\psi(t_0)} f(x, t)dx) = \underbrace{\frac{1}{t - t_0}(\int_{\phi(t_0)}^{\psi(t_0)} (f(x, t) - f(x, t_0))dx)}_{1} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{t - t_0}(\int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} f(x, t)dx}_{2} - \underbrace{\frac{1}{t - t_0}(\int_{\phi(t_0)}^{\phi(t)} f(x, t)dx}_{3}.$$

- Рассмотрим (1):

$$\lim_{t\to t_0}\int_{\phi(t_0)}^{\psi(t_0)}\frac{f(x,\,t)-f(x,\,t_0}{t-t_0}dx=$$

$$=_{(\text{по теореме о дифференцируемости интегралов, зависящих от параметра}1.2.1)}=$$

$$=\int_{\phi(t_0)}^{\psi(t_0)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,\,t_0)dx.$$

- Рассмотрим (2):

$$\left|\frac{1}{t-t_0}\int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)}f(x,\,t)dx-\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}\cdot f(\psi(t_0),\,t_0)\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{t-t_0}\int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)}f(x,\,t)dx-\frac{1}{t-t_0}\int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)}f(\psi(t_0),\,t_0)dx\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{t-t_0}\int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)}[f(x,\,t)-f(\psi(t_0),\,t_0)]dx\right|.$$

Т.к. $\psi(t)\to\psi(t_0)$ при $t\to t_0$, то:

$$|f(x,\,t)-f(\psi(t_0)_0)|<\varepsilon|\quad\forall t\big|\,|t-t_0|<\delta$$

$$\left|\frac{1}{t-t_0}\int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)}[f(x,\,t)-f(\psi(t_0),\,t_0)]dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{t-t_0}\int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)}\varepsilon dx\right|.$$

$\forall\varepsilon>0\quad:$

$$\left|\frac{1}{t-t_0}\int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)}f(x,\,t)dx-\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}\cdot f(\psi(t_0),\,t_0)\right|<\varepsilon\cdot M$$

$\forall t\quad|t-t_0|<\delta$

$$\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)}f(x,\,t)dt=\psi'(t_0)\cdot f(\psi(t_0),\,t_0).$$

□

Пример 1.2.4 (Типичный)**.**

$$F(x) = \int_a^b |x-y| \cdot v(y)dy \quad v(y) \text{ — непрерывна на } [a,\, b]$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = ?$$

$$|x-y| = \begin{cases} x-y, & x-y \geqslant 0 \\ -(x-y), & x-y < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \int_a^x (x-y)v(y)dy - \int xb(x-y)v(y)dy$$

$$\frac{dF}{dx}(x) = \int_a^x v(y)dy - \int_x^b v(y)dy$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \int_a^x 0dy + 1 \cdot v(x) - \int_x^b 0dy + v(x) = 2v(x).$$

Следовательно, $\dfrac{d^2F}{dx^2} = 2v(x)$.

Глава 2

Интегралы зависящие от параметра

14.09.2006

Теорема 2.0.5 (Об интегрировании).

- Предположим, что на множестве $[a, b] \times [c, d]$ задана непрерывная функция f(x,y), тогда определены две функции:

  1. $F(x) = \int\limits_c^d f(x, y) dy$
  2. $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y) dx$

  такие, что $F(x)$ — интегрируема на $[a, b]$ и $\Phi(x)$ — интегрируема на $[c, d]$, причем $\int\limits_a^b F(x)dx = \int\limits_c^d \Phi(y)dy$ или по-другому

  $$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x, y) dx dy$$

  , где первый и второй интегралы этого равенства — 'повторные', а третий — 'кратный'

- **<u>Доказательство</u>**.

  - Поскольку $F(x), \Phi(y)$ — непрерывны на компактном множестве, то $_{\text{(По теореме о непрерывности)}}$ $\Rightarrow$ $\Phi(y), F(x)$ — интегрируемы $\Rightarrow$ оба повторных интеграла существуют. Рассмотрим две функции:

$$\phi(t) = \int\limits_c^t \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_c^t \phi(y)dy$$

$$\psi(t) = \int\limits_a^b \left(\int_c^t f(x,y)dy \right) dx$$

такие, что $\phi(c) = 0, \psi(c) = 0$. $\frac{d\phi}{dt} = \int\limits_a^b f(x,y)dx$, $\frac{d\psi}{dt} = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ согласно формуле Ньютона - Лейбница. Следовательно, $\phi(t) - \psi(t) = K \Rightarrow_{\text{(Так как } \phi(c)=\psi(c)=0)} \Rightarrow K = 0 \Rightarrow \phi(t) = \psi(t) \quad \forall t \in [c,d]$. Значит,

$$\phi(d) = \psi(d) \Rightarrow \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

.

□

Пример 2.0.6 (Типичный)**.**

▷ Пусть $\alpha > 0, \beta > 0, \beta > \alpha$. Решим $\int\limits_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} dx$. Рассмотрим $f(x,y) = x^y$ на $[0,1] \times [\alpha, \beta]$. Очевидно, что x^y — непрерывна на данном множестве.

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_\alpha^\beta x^y dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{x^y}{\ln x}\Big|_\alpha^\beta \right) dx = \int\limits_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} dx;$$

$$\int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_0^1 x^y dx \right) dy = \int\limits_\alpha^\beta \left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1 \right) dy = \int\limits_\alpha^\beta \frac{1}{y+1} dy = \ln|y+1|\Big|_\alpha^\beta = \ln \frac{\beta+1}{\alpha+1};$$

Значит, $\int\limits_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} dx = \ln \frac{\beta+1}{\alpha+1}$.

2.1 Несобственные интегралы зависящие от параметра

ОПР 2.1.1 (Несобственный интеграл зависящий от параметра)**.**

Несобственным интегралом зависящим от параметра называется:

$$\int\limits_{\alpha}^{\omega} f(x,\alpha)dx = \lim_{\beta\to\omega}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,\alpha)dx \quad \alpha\in[c,d].$$

Обозначим интеграл $F(\alpha)=\int\limits_{a}^{\omega} f(x,\,\alpha)dx.$ (*)

ОПР 2.1.2 (Равномерная сходимость несобственного интеграла зависящего от параметра)**.**

Будем говорить, что $(*)$ *сходится равномерно на множестве* $A\subset\overline{\mathbb{R}}$*, если*

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists B\in\mathbb{R}\big|\,\forall p>B\quad \left|\int\limits_{p}^{\omega} f(x,\alpha)dx\right|<\varepsilon\quad \forall\alpha\in A.$$

Теорема 2.1.3 (Непрерывность несобственного интеграла зависящего от параметра)**.**

- ▷ Пусть $f(x,\alpha)$ равномерно непрерывна на $[a,\omega]\times A$. Предположим, что $(*)$ равномерно сходится на A, тогда $F(\alpha)$ — непрерывна на A.
- ▷ <u>**Доказательство**</u>.
  - ∘ Пусть $\varepsilon>0$, тогда в силу равномерной сходимости $(*)$

$$\exists p\in\mathbb{R}\big|\,\forall\alpha\in A\quad \left|\int\limits_{p}^{\omega} f(x,\alpha)dx\right|<\varepsilon;$$

Рассмотрим функцию $G(\alpha,p)=\int\limits_{\alpha}^{p} f(x,\alpha)dx$. Поскольку интервал $[a,p]$ — замкнутый, то в силу теоремы о непрерывности на заданном интервале $G(\alpha,p)$ — непрерывна по α. Обозначим

$$G(\alpha,\omega)=\int\limits_{v}^{\omega} f(x,\alpha)dx=\lim_{p\to\omega}\int\limits_{v}^{p} f(x,\alpha)dx.$$

В силу существования несобственного интеграла предел существует $\forall\alpha\in A\Rightarrow G(\alpha,\omega)$ — определена. Рассмотрим

$$|G(\alpha,p)-G(\alpha,\omega)|=\left|\int\limits_{\alpha}^{p} f(x,\alpha)dx-\int\limits_{\alpha}^{\omega} f(x,\alpha)dx\right|=\left|\int\limits_{p}^{\omega} f(x,\alpha)dx\right|<\varepsilon$$

$\forall \alpha \in A$ в силу равномерной сходимости $(*)$. $|G(\alpha,p) - G(\alpha,\omega)| < \varepsilon \quad \forall \alpha \in A$.Это означает, что $G(\alpha,p) \rightrightarrows G(\alpha,\omega)$ при $p \to \omega$ на $A \Rightarrow$ $\Rightarrow G(\alpha,\omega)$ — непрерывна по α.

□

21.09.2006

Теорема 2.1.4 (О дифференцируемости)**.**

▷ Пусть

$F(\alpha) = \int_a^\omega f(x,\alpha)dx$.

▷ Тогда

если $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ равномерно непрерывна на $[a,\omega) \times [c,d]$ и $\int \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx$ — равномерно сходится, то:

$$\frac{dF}{d\alpha}(\alpha) = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx.$$

▷ **Доказательство**.

- Пусть $\varepsilon > 0$, пусть p взято из равномерной сходимости интеграла $F(\alpha,p) = \int_a^p f(x,\alpha)dx$.

  Поскольку интервал $[a,p]$ — замкнутый, то на интервале $[a,p]$ применима теорема об обычных интегралах. Следовательно, $F(\alpha,p)$ — дифференцируема по α и имеет место:

$$\frac{dF}{d\alpha}(\alpha,p) = \int_a^p \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx.$$

- Из требований на $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ и предыдущей теоремы о непрерывности получаем, что:

$$\frac{dF}{d\alpha}(\alpha,p) \rightrightarrows \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha,\omega)$$
$$p \to \omega \quad \forall \alpha \in [c,d] \Rightarrow \frac{dF}{d\alpha}(\alpha) = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx.$$

□

Теорема 2.1.5 (Об интегрируемости)**.**

▷ Придумать и доказать самим.

2.2 Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра

Теорема 2.2.1 (Критерий Коши)**.**

▷ Для того, чтобы интеграл

$$\int_a^\omega f(x,\alpha)dx \tag{1}$$

сходился равномерно на $A(\alpha \in A)$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon > 0\ \exists B \in [a,\omega)\big|\,\forall\xi_1,\xi_2$, таких что $\xi_1,\xi_2 \in [B,\omega)$:

$$\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon \qquad \forall\alpha \in A. \tag{2}$$

▷ **Доказательство**.

Необходимость:

Пусть (1) — равномерно сходится, тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists B\big|\,|\int_\xi^\omega f(x,\alpha)dx| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\alpha \in A, \xi \in [B,\omega).$$

Рассмотрим:

$$\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x,\alpha)dx\right| = \left|\int_{\xi_1}^{\omega} f(x,\alpha)dx - \int_{\xi_2}^{\omega} f(x,\alpha)dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_{\xi_1}^{\omega} f(x,\alpha)dx\right| + \left|\int_{\xi_2}^{\omega} f(x,\alpha)dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall\alpha \in A.$$

Достаточность:

Пусть (2) выполнено. Рассмотрим $|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x,\alpha)dx| < \varepsilon \quad \forall\alpha \in A$. $\int_{\xi_1}^{\omega} f(x,\alpha)dx$ — существует. Следовательно:

$$\exists \lim_{\xi_2\to\omega}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x,\alpha)dx\right| \quad \forall\alpha \in A.$$

Что означает, что можно перейти к пределу $\xi_2 \to \omega$, следовательно:

$$\left|\int_{\xi_1}^{\omega} f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon \quad \forall\alpha \in A.$$

Следовательно, интеграл равномерно сходится на A.

□

Теорема 2.2.2 (Признак Вейерштрасса)**.**

▷ Пусть

$$F(\alpha) = \int_a^\omega f(x,\alpha)dx \quad \alpha \in A,$$

причем существует такая функция $H(x), x \in [a,\omega) \big| \, |f(x,\alpha)| \leqslant H(x) \ \forall \alpha \in A$ и $\int_a^\omega H(x)dx$ — сходится.

▷ Тогда

$F(\alpha) = \int_a^\omega f(x,\alpha)dx$ — сходится равномерно.

▷ **Доказательство**.

Очевидно.

□

Теорема 2.2.3 (Признак Абеля-Дирихле)**.**

▷ Пусть

$$F(y) = \int_a^\omega f(x,y) \cdot g(x,y)dx, \qquad y \in [c,d]. \tag{1}$$

1. $f(x,y), g(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ — непрерывны на $[a,\omega] \times [c,d]$;
2. Пусть $H(x,y)$ — первообразная функции $f(x,y)$ при фиксированном y. Пусть $H(x,y)$ ограничена на $[a,\omega) \times [c,d]$, т.е.:
   - $H(x,y) = \int_a^y f(t,y)dt$
   - $\dfrac{\partial H}{\partial x} = f(x,y), \quad H(a,y) = 0$

   $\exists c \big| \, |H(x,y)| \leqslant c \quad \forall (x,y) \in [a,\omega) \times [c,d]$;
3. $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) \leqslant 0 \quad \forall (x,y) \in [a,\omega) \times [c,d]$;
4. $\exists \psi(x)$, непрерывная на $[a,\omega) \big| \, |g(x,y)| < \psi(x) \quad \forall (x,y) \in [a,\omega) \times [c,d]$; $\lim_{x\to\omega} \psi(x) = 0$.

▷ Тогда

$F(y) = \int_a^\omega f(x,y) \cdot g(x,y)dx$ — равномерно сходится.

▷ **Доказательство**.

Если в (1) зафиксировать y, то тогда все условия для признака Абеля-Дирихле будут выполнены. Следовательно, (1) сходится ((1) имеет смысл $\forall y \in [c,d]$). Из 4-го условия следует, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a^1 > a \big| \forall \xi \in [a^1, \omega) \quad \psi(\xi) < \dfrac{\varepsilon}{2c}$ (c — из 2-го условия).

Рассмотрим интеграл:

$$\int_\xi^\omega f(x,y)\cdot g(x,y)dx = \int_\xi^\omega \frac{\partial H}{\partial x}\cdot g(x,y)dx =_{\text{(интегрирование по частям)}}$$

$$= H(\xi,y)\cdot g(\xi,y) - \int_\xi^\omega H(x,y)\cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)dx$$

$$\left|\int_\xi^\omega f(x,y)\cdot g(x,y)dx\right| = \left|H(\xi,y)\cdot g(\xi,y) - \int_\xi^\omega H(x,y)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant |H(\xi,y)\cdot g(\xi,y)| + \left|\int_\xi^\omega H(x,y)\cdot\frac{\partial g}{\partial x}dx\right| \leqslant_{\text{(очевидно по построению)}}$$

$$\leqslant c\psi(\xi) + \int_\xi^\omega |H(x,y)|\cdot\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|dx \leqslant$$

$$\leqslant c\psi(\xi) + c\int_\xi^\omega \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right|dx =$$

$$= c\psi(\xi) + c\int_\xi^\omega \frac{\partial g}{\partial x}dx = c\psi(\xi) - c((\lim_{p\to\omega} g(p,y)) - g(\xi,y)) =$$

$$= c\psi(\xi) + cg(\xi,y) \leqslant c\psi(\xi) + c\psi(\xi) = 2c\psi(\xi) < \varepsilon$$

Следовательно, интеграл равномерно сходится.

□

2.3 Эйлеровы интегралы (Γ- и β-функции)

ОПР 2.3.1 (Γ-функции)**.**

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt, \quad x > -1$$

ОПР 2.3.2 (β-функции)**.**

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad x > -1, y > -1$$

Теорема 2.3.3 (Связь между Γ- и β-функциями)**.**

▷
$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Без доказательства.

28.09.2006

Теорема 2.3.4 (Свойства гамма-функции)**.**

▷ 1. Гамма функция Γ определена $\forall x > 0$;
2. $\Gamma(x) > 0$,т.е. положительна;
3. $\Gamma(1) = 1$;
4. $\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$;
5. $\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}$;
6. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\Pi}$;
7. $\forall x \in (0,1) \quad \Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\Pi}{\sin \Pi\cdot x}$ — формулы дополнения.

▷ <u>**Доказательство**</u>.

∘ 1. $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\cdot t^{x-1}dt = \int\limits_0^1 e^{-t}\cdot t^{x-1}dt + \int\limits_1^\infty e^{-t}\cdot t^{x-1}dt.$

✓ Рассмотрим
$$G(\alpha) = \int\limits_\alpha^1 e^{-t}\cdot t^{x-1}dt \Rightarrow G(\alpha) \leqslant \int\limits_\alpha^1 t^{x-1}dt = \frac{1-\alpha^x}{x} < \frac{1}{x}.$$

Получили $G(\alpha) < \frac{1}{x} \quad \forall \alpha > e$; $G(\alpha)$ — монотонна по α при $\alpha \to 0$; $\quad \lim\limits_{\alpha\to 0} G(\alpha) \quad \exists \Rightarrow$ существует интеграл $\int\limits_0^1 e^{-t}\cdot t^{x-1}dt$.

✓ Очевидно, что $\exists p > 0 \quad \forall x > p \quad e^{-t}\cdot t^{x-1} < \frac{1}{t^2}$
$$\int\limits_1^\infty e^{-t}\cdot t^{x-1}dt = \int\limits_1^p e^{-t}\cdot t^{x-1}dt + \int\limits_p^\infty e^{-t}\cdot t^{x-1}dt;$$

$\int\limits_p^\infty e^{-t}\cdot t^{x-1}dt$ — сходится по признаку Вейерштрасса ибо $\left|e^{-t}\cdot t^{x-1}\right| < \frac{1}{t^2}. \int\limits_p^\infty \frac{1}{t^2}dt$ — сходится $\Rightarrow$ функция $\Gamma(x)$ — определена при $x > 0$.

2. Т.к. $e^{-t}\cdot t^{x-1}>0$ по свойству монотонности интеграла.
3. $\Gamma(1)=\int\limits_0^\infty e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^\infty=0+1=1.$
4. $\Gamma(x+1)=\int\limits_0^\infty e^{-t}\cdot t^x dt \quad \alpha,\beta\Big|\, 0<\alpha<\beta<\infty$

   $\int\limits_\alpha^\beta e^{-t}\cdot t^x dt=-e^{-t}\cdot t^x\Big|_\alpha^\beta-\int\limits_\alpha^\beta -e^{-t}\cdot x\cdot t^{x-1}dt=-e^{-\beta}\cdot\beta^x+e^{-\alpha}\cdot$ $\cdot\,\alpha^x+x\cdot\int\limits_\alpha^\beta e^{-t}\cdot t^{x-1}dt.$

   Перейдем к пределу при $\alpha\to 0$: $\int\limits_0^\beta e^{-t}\cdot t^x dt=-e^{-\beta}\cdot\beta^x+x\cdot$ $\cdot\int\limits_0^\beta e^{-t}\cdot t^{x-1}dt.$

   Пусть $\beta\to\infty$, тогда $\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$.
5. Поскольку $\Gamma(1)=1\Rightarrow\Gamma(2)=\Gamma(1+1)=1\cdot\Gamma(1)=1$.
   $\Gamma(3)=\Gamma(2+1)=2\cdot\Gamma(1)=2=(3-1)!$. Далее по индукции $\Gamma(n)=(n-1)!,\forall n\in\mathbb{N}$.
6. $\Gamma(\frac{1}{2})=\int\limits_0^\infty e^{-t}\cdot\frac{dt}{\sqrt{t}};_{\text{(по опр.)}}$ Пусть $t=x^2$, тогда $dt=2\cdot xdx$; $\Gamma(\frac{1}{2})=$ $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cdot\frac{2\cdot xdx}{x}=2\cdot\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$. Назовем $I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ интегралом Эйлера - Пуассона. Интеграл Эйлера - Пуассона сходится. Пусть $I=\int\limits_0^\infty e^{-y^2}dy$. Тогда

$$I^2=I\cdot I=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx\cdot\int\limits_0^\infty e^{-y^2}dy=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-x^2-y^2}dxdy.$$

   Сделаем замену $y=z\cdot x; dy=xdz$.

$$\int\limits_0^\infty e^{-y^2}dy=\int\limits_0^\infty e^{-x^2\cdot z^2}xdz,\forall x.$$

   Получаем:

$$I^2=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx\cdot\int\limits_0^\infty x\cdot e^{-z^2\cdot x^2}dz=\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^\infty xe^{-x^2-z^2x^2}dx\right)dz.$$

   ✓ $\int\limits_0^\infty xe^{-x^2(1+z^2)}dx=\int\limits_0^\infty\frac{e^{-x^2(1+z^2)}}{2(1+z^2)}dx^2(1+z^2)=$
   $-\frac{1}{2(1+z^2)}\left(e^-x^2(1+z^2)\right)\Big|_0^\infty=0+\frac{1}{2(1+z^2)};$

✓ $\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty frac11+z^2dz = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}$;

Значит, $I^2 = \frac{\Pi}{4}; I = \frac{\sqrt{\Pi}}{2}$;

Получили: $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2I = \sqrt{\Pi}$.

□

2.4 Интегрирование в $\mathbb{R}^n$

ОПР 2.4.1 (Частичного интеграла)**.**

Пусть i — фиксированная точка, $i \in [1, n]$. Частичным интегралом назовем функцию $U(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n) = \int\limits_a^b f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)dt = I_i f$,

$I_i f\colon I^{n-1} \to \mathbb{R}$

Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывна, то $I_i f$ — непрерывна. Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — перестановка порядка $1 \ldots n$, тогда:

$$I_{i_1} I_{i_2} f = \int\limits_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} dx_{i_n} \int\limits_{a_{i_{n-1}}}^{b_{i_{n-1}}} dx_{i_{n-1}} \ldots \int\limits_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_{i_1}$$

— повторный интеграл. Всего повторных интегралов может быть $n!$

Теорема 2.4.2.

▷ Пусть

$f : I^n \to \mathbb{R}, f$ — непрерывна на I^n.

▷ Тогда

Все $n!$ повторных интегралов совпадают, а следовательно, определен интеграл $\int\limits_{I^n} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n$

▷ **Доказательство**.

- $I_i I_j = I_j I_i$ в силу теоремы об интегрируемости по параметру. Поскольку это выполнено для всех пар i, j, то перестановка не меняет интеграл.

□

2.5 Интеграл Римана функции многих переменных

ПРЕДЛ 2.5.1. Пусть $I^n =< a_1, b_1 > \cdot \ldots \cdot < a_n, b_n >$, I^n — назовем n-мерным интервалом.
$I^n = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ — замкнутый n-интервал.
$I^n = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ — открытый n-интервал.

Лемма 2.5.2.

▷ Пусть

I_1^n, I_2^n — два n-мерных интервала.

▷ Тогда

$I_1^n \cap I_2^n$ — n-интервал (возможно пустой)

▷ **Доказательство**.

∘ $I_1^n =< a_1, b_1 > \times \ldots \times < a_n, b_n >; \quad \alpha_i = \max(a_i, c_i),$
$I_2^n =< c_1, d_1 > \times \ldots \times < c_n, d_n >; \quad \beta_i = \min(b_i, d_i).$

□

ОПР 2.5.3 (Разбиения замкнутого интервала)**.**
Набор k - штук n - интервалов $I_1^n, \ldots, I_k^n$ называется разбиением замкнутого интервала I^n, *если:*

1. $I_i^n \cap I_j^n \neq \varnothing$;
2. $\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i = I^n$;

Будем обозначать разбиение ξ;
диаметр $\xi \quad d(\xi) = \max\limits_{i=1,\ldots,k}[diam(I_i^n)], diam(S) = \sup\limits_{x,y \in S} |x - y|.$

ОПР 2.5.4 (n-мерного объема)**.**
$S(I^n) = |b_1 - a_1| \times \ldots \times |b_n - a_n|, \quad n$ *— объем.*

ОПР 2.5.5.
Пусть ξ, η — два разбиения I^n, тогда определим $\omega = \xi + \eta$ как объединение всех попарных пересечений ξ и η. Очевидно, что ω — разбиение.

ОПР 2.5.6 (Продолжение разбиения)**.**
Разбиение ξ является продолжением разбиения η, *если любой n-интервал из ξ входит в разбиение η.*

Следствие 2.5.7.

▷ Для любой пары разбиений $\xi, \eta \quad \omega = \xi + \eta$ — некоторое разбиение ξ и η.

2.6 Ступенчатые функции

05.10.2006

ОПР 2.6.1 (Ступенчатой функции).

Пусть $f\colon I^n \to \mathbb{R}, f$ *— ограничена,* f *называется* ступенчатой функцией *если существеут такое разбиение* ξ *интервала* I^n, *что* $\forall I_i^n \quad f(x) = c_i, c_i \in \mathbb{R}, \forall x \in I_i^n$.

Очевидно, что ступенчатая функция не определяет однозначно разбиение ξ.

ОПР 2.6.2 (Сравнение ступенчатой функции).

Пусть ϕ, ψ *— две ступенчатые функции на интервале* I^n. *Будем говорить, что* $\phi < \psi$ *на* I^n *если* ϕ, ψ *определены на одном и том же разбиении* ξ *и* $\forall I_i^n \subset \xi \quad \phi(x) \leqslant \psi(x) \quad \forall x \in I_i^n$.

ПРЕДЛ 2.6.3 (Свойства ступенчатой функции).

▷ 1. Если $f(x)$ — ступенчатая функция на I^n и $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda f(x)$ — ступенчатая функция на I^n;

2. Если $f(x), g(x)$ — две ступенчатые функции на I^n, то $f+g, f-g, f\cdot \cdot g, \dfrac{f}{g}$ (при $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I^n$) — тоже являются ступенчатыми.

▷ **Доказательство**.

- Если $f(x)$ — ступенчатая функция, то существует разбиение ξ. Для $\lambda f(x)$ возьмем разбиение ξ и заметим, что $\lambda f(x) = \lambda c_i \quad \forall x \in I_i^n \subset \xi$.
- Если $f(x), g(x)$ — ступенчатые функции, то пусть ξ, η — соответствующие разбиения. Тогда рассмотрим разбиение $\omega = \xi + \eta$ и заметим, что f, g — ступенчатые функции на ω.

  Определим $(f+g)(x) = c_i + b_i \quad \forall x \in I_i^n \subset \omega$ — ступенчатую функцию относительно разбиения ω.

  Для $f-g, f\cdot g, \dfrac{f}{g}$ — аналогично.

□

ОПР 2.6.4 (Сравнение ограниченной и ступенчатой функций).

Пусть f *— произвольная ограниченная функция на* I^n, ϕ *— ступенчатая функция на* I^n. *Будем говорить, что* $\phi \leqslant f$ $(\phi \geqslant f)$ *если* $\forall x \in I^n \subset \xi \quad \phi(x) \leqslant \leqslant f(x)$ $(\phi(x) \geqslant f(x))$. ξ *— разбиение для функции* ϕ.

2.6.5 Интегрирование ступенчатых функций

Речь идёт об ограниченных функциях.

ОПР 2.6.5.1 (Интеграла ступенчатой функции)**.**
Пусть f — ступенчатая функция на I^n. Тогда по определению:

$$\int_{I^n} f(x)dx_1dx_2\dots dx_n = \sum_{i=1}^{k} c_i S(I_i^n),$$

где: $I_i^n \subset \xi$ (ξ определяется ступенчатой функцией f),
k — количество элементов в разбиении ξ, f, g — ступенчатые функции на I^n.

Теорема 2.6.5.2 (Свойства интеграла ступенчатой функции)**.**

▷ 1. Интеграл не зависит от разбиения;
2. Однородность: $\int_{I^n} \lambda f(x)dx_1\dots dx_n = \lambda \int_{I^n} f(x)dx_1\dots dx_n, \quad \lambda \in \mathbb{R}$;
3. Линейность: $\int_{I^n} f(x) + g(x)dx_1\dots dx_n =$
$= \int_{I^n} f(x)dx_1\dots dx_n + \int_{I^n} g(x)dx_1\dots dx_n$;
4. Монотонность: если $f \leqslant g$ на I^n, то:

$$\int_{I^n} f(x)dx_1\dots dx_n \leqslant \int_{I^n} g(x)dx_1\dots dx_n.$$

▷ **Доказательство**.

Очевидно, используя доказательство из прошлого семестра.

□

ОПР 2.6.5.3 (Верхней и нижней сумм Дарбу)**.**
Пусть $f\colon I^n \to \mathbb{R}, f$ — ограничено. Пусть ϕ, ψ — ступенчатые функции на $I^n \big| \phi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ на I^n.
Тогда для функции f:

$$\Sigma_*(f) = \int_{I^n} \phi(x)dx_1\dots dx_n \qquad \text{— нижняя сумма Дарбу,}$$

$$\Sigma^*(f) = \int_{I^n} \psi(x)dx_1\dots dx_n \qquad \text{— верхняя сумма Дарбу.}$$

Теорема 2.6.5.4 (Свойства верхней и нижней сумм Дарбу)**.**

▷ Пусть

f — ограничена на I^n, причем $|f(x)| \leqslant M$ на I^n.

▷ Тогда

1. $\Sigma_*(f) \leqslant \Sigma^*(f)$;
2. Существуют такие ступенчатые функции ϕ, ψ на $I^n \big| \Sigma_*(f) \geqslant -M \cdot \cdot S(I^n), \Sigma^*(f) \leqslant M \cdot S(I^n)$.

▷ **Доказательство**.

- Следует из монотонности интеграла для ступенчатых функций и определения сумм Дарбу.
- I^n — само I^n (тривиальное разбиение).

$$\phi(x) = -M, \psi(x) = M$$
$$-M \leqslant f(x) \leqslant M \Rightarrow \phi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$$
$$\int_{I^n} \phi(x)dx_1 \dots dx_n = -M \cdot S(I^n).$$

□

ОПР 2.6.5.5 (Верхнего и нижнего интегралов).

$$\mathbf{I}^*(f) = \inf_{f(x) \leqslant \psi(x)\ \forall x \in I^n} (\Sigma^*(f)), \qquad \text{где } \psi(x) \text{ — степенная функция на } I^n$$
$$\mathbf{I}_*(f) = \sup_{f(x) \geqslant \phi(x)\ \forall x \in I^n} (\Sigma_*(f)), \qquad \text{где } \phi(x) \text{ — степенная функция на } I^n$$

Из теоремы о свойствах верхней и нижней суммах Дарбу следует, что $\mathbf{I}^*(f), \mathbf{I}_*(f)$ *— существуют если f — ограничена. Более того:*

$$-M \cdot S(I^n) \leqslant \mathbf{I}_*(f) \leqslant \mathbf{I}^*(f) \leqslant M \cdot S(I^n), \qquad \text{где } f(x) \leqslant M \quad \forall x \in I^n.$$

Замечание 2.6.5.6.

Пусть $\phi\colon I^n \to \mathbb{R}$ — ступенчатая функция, тогда
$\mathbf{I}^*(\phi) = \mathbf{I}_*(\phi) = \int_{I^n} \phi(x)dx_1 \dots dx_n$.

Лемма 2.6.5.7 (Свойства верхнего и нижнего интеграла).

▷ Пусть

$f\colon I^n \to \mathbb{R}, f$ — ограничена.

▷ Тогда

$\forall \varepsilon > 0$ существуют степенные функции ϕ, ψ такие, что:

$$\mathbf{I}^*(f) \leqslant \Sigma^*(f) \leqslant \mathbf{I}^*(f) + \varepsilon$$
$$\mathbf{I}_*(f) - \varepsilon \leqslant \Sigma_*(f) \leqslant \mathbf{I}_*(f)$$

▷ **Доказательство**.

Следствие из определения sup.

□

ОПР 2.6.5.8 (Интегрирования по Риману на I^n)**.**
Пусть $f\colon I^n \to \mathbb{R}, f$ *— ограничено. Тогда* f — интегрируема по Риману на I^n *если* $\mathbf{I}^*(f) = \mathbf{I}_*(f)$*, и это общее значение обозначается через:*

$$\int_{I^n} f(x)dx_1 \dots dx_n = \mathbf{I}^*(f) = \mathbf{I}_*(f).$$

Теорема 2.6.5.9 (Критерий Дарбу)**.**

▷ Пусть

$f\colon I^n \to \mathbb{R}, f$ — ограничена.

▷ Тогда

для интегрируемости по Риману функции f необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ существовала ступенчатые функции $\phi, \psi \big| \ 0 < \Sigma^*(f) - \Sigma_*(f) < \varepsilon$.

▷ **Доказательство**.

Необходимость:

Пусть f — интегрируема, тогда $\mathbf{I}^*(f) = \mathbf{I}_*(f)$, $\varepsilon > 0$ — произвольное. Из свойства $\sup, \inf$ следует:

$$\begin{cases} \mathbf{I}^*(f) \leqslant \Sigma^*(f) \leqslant \mathbf{I}^*(f) + \frac{\varepsilon}{2} \\ \mathbf{I}_*(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \Sigma_*(f) \leqslant \mathbf{I}_*(f) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma^*(f) \leqslant \mathbf{I}^*(f) + \frac{\varepsilon}{2} \\ \mathbf{I}_*(f) - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \Sigma_*(f) \Rightarrow -\Sigma_*(f) \leqslant -\mathbf{I}_*(f) + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma^*(f) - \Sigma_*(f) \leqslant \mathbf{I}^*(f) - \mathbf{I}_*(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность: Пусть $\mathbf{I}^*(f) \neq \mathbf{I}_*(f)$, следовательно по свойству верхнего и нижнего интегралов $\mathbf{I}_*(f) < \mathbf{I}^*(f)$.

$$\Sigma^*(f) - \Sigma_*(f) \geqslant \mathbf{I}^*(f) - \mathbf{I}_*(f) > 0$$

$$\Sigma^*(f) - \Sigma_*(f) > 0 \qquad \text{— произвольно.}$$

□

Следствие 2.6.5.10 (Свойства функций, интегрируемых по Риману).

1. Пусть $f\colon I^n \to \mathbb{R}, f$ — интегрируема по Риману, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда λf — интегрируема по Риману и:

$$\int_{I^n} \lambda f(x) dx_1 \dots dx_n = \lambda \int_{I^n} f(x) dx_1 \dots dx_n \qquad \text{— однородность;}$$

2. Пусть f, g — интегрируемы по Риману на I^n, тогда

$f + g$ — интегрируема по Риману и:

$$\int_{I^n} (f(x)+g(x)) dx_1 \dots dx_n = \int_{I^n} f(x) dx_1 \dots dx_n + \int_{I^n} g(x) dx_1 \dots dx_n \qquad \text{— линейность;}$$

3. Пусть f, g — интегрируемы по Риману, $f(x) \leqslant g(x)$ на I^n. Тогда:

$$\int_{I^n} f(x) dx_1 \dots dx_n \leqslant \int_{I^n} g(x) dx_1 \dots dx_n \qquad \text{— монотонность.}$$

Теорема 2.6.5.11.

▷ Пусть

$f\colon I^n$ (замкнутый интервал) $\to \mathbb{R}, f$ — – — непрерывна на I^n в смысле функций многих переменных.

▷ Тогда

f — интегрируема по Риману на I^n.

▷ **Доказательство**.

I^n (замкнутый), I^n — компактно, f — непрерывна на компактном множестве $\Rightarrow f$ — равномерно непрерывна на $I^n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \big| \forall x_1, x_2 \in I^n \big| \, ||x_1 - x_2||_n < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Очевидно, что существует разбиение ξ множества $I^n \Big| d(\xi) < \delta$ (где d — диаметр).

Пусть $I_i^n \subset \xi$. Рассмотрим $\overline{I_i^n}$ (замыкание), тогда f на $\overline{I_i^n}$ непрерывно.

Т.к. $\overline{I_i^n}$ — компактно, то функция f достигает max и min на $\overline{I_i^n} \Rightarrow \Rightarrow \exists \alpha_i, \beta_i \Big| \beta_i \leqslant f(x) \leqslant \alpha_i \quad \forall x \in I_i^n, \quad \beta_i = f(x_1), \alpha_i = f(x_2)(x_1, x_2 \in \overline{I_i^n}) \Rightarrow \exists$ степенные функции $\phi, \psi \Big| \phi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$.

$$\Sigma^*(f) = \int_{I^n} \psi(x) dx_1 \dots dx_n$$

$$\Sigma_*(f) = \int_{I^n} \phi(x) dx_1 \dots dx_n$$

$$\Sigma^*(f) - \Sigma_*(f) = \int_{I^n} (\psi(x) - \phi(x)) dx_1 \dots dx_n \leqslant \varepsilon \int_{I_n} 1 \cdot dx_1 \dots dx_n \leqslant \varepsilon \cdot S(I^n).$$

□

12.10.2006

ОПР 2.6.6.

Пусть $I^{n-1} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times \overline{[a_i, b_i]} \times \dots \times [a_n, b_n]$. *Рассмотрим функцию* $f\colon I^{n-1} \to \mathbb{R}$, *будем записывать в виде:* $x_i = f(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n)$. *Определяет подмножество* $C \subseteq I^n$ *вида:*
$(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, f(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n), x_{i+1}, \dots, x_n) \subseteq I^n$. *Назовем его графиком функции* f. *Перенумеровывая координаты можно считать, что* C *задано в виде* $(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))$.

Теорема 2.6.7 (Свойства графика непрерывной функции)**.**

▷ Пусть

$f\colon I^{n-1} \to \mathbb{R}, I^{n-1}$ — замкнуто, f — непрерывна на I^n.

▷ Тогда

$\exists$разбиение$I^n \Big| \forall \varepsilon > 0 \sum\limits_{I_i \in \xi, I_i \cap C \neq \varnothing} S(I_i^n) \leqslant \varepsilon \cdot S(I^{n-1})$.

▷ **Доказательство**.

- f — непрерывна на I^{n-1} по условию,
  тогда f — равномерно непрерывна на $I^{n-1} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$
  $\exists \sigma \Big| \forall x, y \Big| \|x - y\|_{n-1} < \sigma \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
  Очевидно, что $\exists \xi \quad I^{n-1} \Big| D(\xi) < \sigma$. Пусть $I_i^{n-1} \in \xi$, тогда f на замыкании I^{n-1},т.е. $\overline{I^{n-1}}$ достигает max и min.
  Пусть $\alpha_i = \min\limits_{\overline{x} \in I_i^{n-1}} f(\overline{x}), \beta_i = \max\limits_{\overline{x} \in I_i^{n-1}} f(\overline{x}); \alpha_i \leqslant f(x) \leqslant \beta_i$. Рассмотрим

интервал вида: $I_i^n = I_i^{n-1} \times [\alpha_i, \beta_i]$. Таким образом, получается некоторое разбиение η интервала I_i^n: $I_i^{n-1} \times [a_n, \alpha_i)$ $I_i^{n-1} \times [\alpha_i, \beta_i]$ $\quad I_i^{n-1} \times (\beta_i, b_n]$.
Объединяя получим разбиение η: $\sum\limits_{I_i \in \eta, I_i \cap C \neq \varnothing} S(I_i^n) =$
$= \sum\limits_i S(I_i^{n-1}) \times |\beta_i - \alpha_i| = \sum\limits_i S(I_i^{n-1}) \times |f(x) - f(y)| \leqslant$
$\leqslant \sum\limits_i S(I_i^{n-1}) \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \sum\limits_i S(I_i^{n-1}) = \varepsilon \cdot S(I^{n-1})$.

□

ОПР 2.6.8 (Кусочной непрерывной функции)**.**
Пусть I^n — замкнутый n-интервал. Предположим, что $C_1, C_2, \ldots, C_l$ — графики некоторых функций. $f\colon I^n \to \mathbb{R}$ называется кусочно-непрерывной, *если $\forall x \in I^n \backslash \{C_1 \cup \ldots \cup C_l\} \Rightarrow f(x)$ — непрерывна.*

Теорема 2.6.9.

▷ Пусть

$f\colon I^n \to \mathbb{R}$ — кусочно-непрерывна и ограничена.

▷ Тогда

f — интегрируема по Риману.

▷ **Доказательство**.

- $\forall C_i, i = 1, \ldots, l \quad \exists \xi_i$ такая что выполняется условие предыдущей теоремы. Возьмем $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots$. Выберем произвольное разбиение $\xi_0 \big| \, d(\xi_0) < \varepsilon$. Тогда разобьем элементы разбиения $\eta + \xi_0$ на два класса:

  1. Содержит точки $C_1 \cup \ldots \cup C_l$;
  2. Не содержит точки $C_1 \cup \ldots \cup C_l$;

  Построим ступенчатую функцию по разбиению $\eta + \xi_0$ (2 класс), тогда очевидно: $\sum^*(f) - \sum_*(f) < \varepsilon \cdot K$. Это и означает интегрируемость по Риману.

□

Теорема 2.6.10 (Связь повторных и кратность интегралов)**.**

▷ Пусть

$f\colon I^n \to \mathbb{R}, f$ — кусочно-непрерывная функция.

▷ Тогда

Для всякого набора $i_1, \dots, i_n, f$ — ограничена

$$\int\limits_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \dots \int\limits_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} f(\overline{x}) dx_1 \dots dx_n = \int\limits_{I^n} f(x) dx_1 \dots dx_n.$$

Это означает, что перестановка порядка интегрирования результат не меняет.

▷ **Доказательство**.

- f — интегрируема по Риману $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ имеет место $\sum^*(f) - \sum_*(f) < \varepsilon, \quad \phi \leqslant f \leqslant \psi$ на I^n.

$$\int\limits_{I^n} \phi \cdot d\overline{x} = \sum_*(f), \int\limits_{I^n} \psi \cdot d\overline{x} = \sum^*(f).$$

Очевидно, что для ступенчатых функций теорема верна. Поскольку имеет место неравенство: $\phi \leqslant f \leqslant \psi$, то
в силу монотонности интеграла функций одной переменной:
$\int\limits_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} \phi \leqslant \int\limits_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} f \leqslant \int\limits_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} \psi;$
$\int\limits_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \dots \int\limits_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} \phi \leqslant \int\limits_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \dots \int\limits_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} f \leqslant \int\limits_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \dots \int\limits_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} \psi;$
$\int\limits_{I^n} \phi \leqslant \int\limits_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \dots \int\limits_{I^n} \psi;$
$\sum_*(f) \leqslant \int\limits_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \dots \int\limits_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} f \leqslant \sum^*(f).$

Поскольку $\sum^*(f) - \sum_*(f) < \varepsilon \Rightarrow \int\limits_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \dots \int\limits_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} f = \int\limits_{I^n} f \cdot dx_1 \dots dx_n.$

□

2.7 Интегрирование по произвольной области

ОПР 2.7.1 (Области).

Пусть D — некоторое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Это означает, что $\exists I^n \big| D \subseteq I^n$. Если D — открытое множество, то D называется областью

ОПР 2.7.2 (Характеристической функции).

$\chi_D(x)$ — *определим следующим образом:*

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1, x \in D; \\ 0, x \notin D; \end{cases}$$

$\chi_D(x)$ *называется* характеристической функцией области.

2.7.3 Свойства (Характеристических функций)

▷ 1. D_1, D_2 — области;
$\chi_{D_1}(x) \cdot \chi_{D_2}(x) = \chi_{D_1 \cap D_2}(x)$;

2. $D_1 \cap D_2 = \varnothing$;
$\chi_{D_1} + \chi_{D_2} = \chi_{D_1 \cup D_2}(x)$.

ОПР 2.7.4 (Множество измеримое по Жордану).

Множество $M \subseteq I^n \subseteq R^n$ *называется* измеримым по Жордану, *если* $\chi_m(x)$ — *интегрируема по Риману в* I^n.
Мерой Жордана *в этом случае называется* $\int\limits_{I^n} \chi_m(x)dx_1 \dots dx_n$.
(В R^2 это площадь, в R^3 — объем.)

2.7.5 Свойства

▷ Пусть D_1, D_2 — области, такие что $D_1 \cap D_2 = \varnothing$;
Если D_1, D_2 — измеримы по Жордану, то
$D_1 \cup D_2$ — измеримо по Жордану.

ОПР 2.7.6 (Интегрируемость по Риману в области).

Пусть D — ограниченная область, $f\colon D \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что f — интегрируема по Риману в D, если функция $\chi_D(x) \cdot f(x)$ — интегрируема по Риману. $\int\limits_{I^n} \chi_D(x) \cdot f(\overline{x})d\overline{x} = \int\limits_{D} f(\overline{x})d\overline{x}$.

2.7.7 Свойства (Интеграла Римана)

▷ 1. $\int\limits_D (f+g)dx = \int\limits_D f \cdot dx + \int\limits_D g \cdot dx$;

2. $\int\limits_D \lambda \cdot f \cdot dx = \lambda \int\limits_D f \cdot dx$;

3. $f \leqslant g \Rightarrow \int\limits_D f \cdot dx \leqslant \int\limits_D g \cdot dx$;

4. $D_1 \cap D_2 = \varnothing \Rightarrow \int\limits_{D_1 \cup D_2} f \cdot dx = \int\limits_{D_1} f \cdot dx + \int\limits_{D_2} f \cdot dx$.

▷ **Доказательство**.

- 4)
$\int\limits_{D_1 \cup D_2} f \cdot dx = \int\limits_{I^n} \chi_{D_1 \cup D_2} \cdot f(x) \cdot dx = \int\limits_{I^n} (\chi_{D_1} + \chi_{D_2}) \cdot f \cdot dx =$
$= \int\limits_{D_1} f \cdot dx + \int\limits_{D_2} f \cdot dx.$

□

Теорема 2.7.8 (Замена переменных в кратном интеграле)**.**

▷ Пусть

V, U — две области из R^n. Предположим, что существует отображение $F: V \to U$, такое что:

1. $F: V \to U$ — взаимнооднозначно;
2. F — дифференцируема;
   $detDF(x) \neq 0 \quad \forall x \in V$;
3. F отображает границу V в границу U;

▷ Тогда

$f: V \to \mathbb{R}, f$ — интегрируема по Риману на V, тогда имеет место формула замены переменных:

$$\int\limits_U f(\overline{x}) \cdot dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_V f(F(x)) \cdot |detDF(x)| d\overline{x}.$$

Глава 3

Интегрирование на многообразиях

19.10.2006

3.1 Криволинейные интегралы

ОПР 3.1.1 (Одномерного аналитического многообразия)**.**
Пусть $l \subseteq \mathbb{R}^n$.
Будем называть l одномерным аналитическим многообразием, *если существует интервал* $[a,\, b] \subseteq \mathbb{R}$ *и отображение* $\phi\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}^n$ *такое что:*

1. $\forall x \in l\, \exists t \in [a,\, b] \big|\, x = \phi(t)$;
2. ϕ*-непрерывно дифференцируема на* $[a,\, b]$;
3. $\|\phi'(t)\| \neq 0\, \forall t \in [a,\, b]$;
4. $\overline{A} = \phi(a)$, $\overline{B} = \phi(b)$ *— концы многообразия.*
5. *Если* $\overline{A} = \overline{B}$, *то* l *называется* замкнутым.

ПРЕДЛ 3.1.2. Что означает, что $\phi\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$?
$x_1 = \phi_1(t)$;
$x_2 = \phi_2(t)$;
$\ldots$
$x_n = \phi_n(t)$;
$t \in [a,\, b]$;
$\phi'(t) = (\phi'_1(t), \ldots,\, \phi'_n(t)); \|\phi'(t)\|_n = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\phi_i'^2(t)|\right)^{\frac{1}{2}}$.
ϕ называется *параметризацией* l.

ПРЕДЛ 3.1.3. Пусть l_1, l_2-два аналитических многообразия. l_1 имеет концы A, B, l_2 имеет концы B, C,тогда $l = l_1 + l_2$ — объединение множеств l_1, l_2; l не является аналитическим многообразием.

ОПР 3.1.4 (Кусочно-аналитического многообразия)**.**

Многообразие l называется кусочно-аналитическим*, если существует аналитические многообразия* $l_1, l_2, \ldots, l_k \big| l = l_1 + l_2 + \ldots + l_k$.

ОПР 3.1.5.

Пусть $f\colon l \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что f — непрерывна на l, если $f \circ \phi$ — непрерывна на $[a, b]$ и $f \circ \phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$.

ПРЕДЛ 3.1.6. Построение:
Пусть $M_0, M_1, \ldots, M_n$ — набор точек таких, что $M_i \in l\,\forall i$, $M_0 = A$, $M_n = B$. Очевидно, что $\forall M_i \in l\,\exists t_i \in [a, b] \big| M_i = \phi(t_i)$. Набору точек $\{M_i\}$ соответствует набор точек $t_i \in [a, b]$. Будем считать, что набор $\{M_i\}$ рассортирован по t_i. Если набор $M_0, M_1, \ldots, M_n$ правильно рассортирован, то назовем этот набор *разбиением* и обозначим через ξ. Понятно, что тогда точка M_i обладает свойством $M_i \leqslant N \leqslant M_{i+1}$, $N \in l$. Пусть дан набор точек $N_0, N_1, \ldots, N_{n-1}$. Понятно, что $M_i \leqslant N_i \leqslant M_{i+1}$. Если задано разбиение ξ и набор N_i, то будем говорить, что задано *отмеченое* разбиение.
$\triangle S_k = \rho(M_k, M_{k+1}) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$; $M_{k+1} = (x_1, \ldots, x_n)$;
$M_k = (y_1, \ldots, y_n)^2$; $\|\xi\| = \sup_k |\triangle S_k|$.
Для всякого отмеченного разбиения определим сумму Римана:
$S(t, \xi) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(N_i) \cdot \triangle S_i$.

ОПР 3.1.7.

Будем говорить, что функция f интегрируема по Риману на отмеченном многообразии l, если $\exists L \in \mathbb{R} \big| \forall \varepsilon > 0\,\exists \delta > 0$, такое что для любого разбиения ξ многообразия $l \big| \|\xi\| < \delta\, |S(t, \xi) - L| < \varepsilon$. В этом случае число L называется криволинейным интегралом первого рода *и обозначается:*
$L = \int\limits_l f(s)ds = \int\limits_A^B f(s)ds$.

3.1.8 Замечание

▷ 1. Если $f \equiv 1$, то $\int\limits_l ds$ — длина кривой.

2. Если $f \geqslant 0$, то f — плотность кривой. $\int\limits_l f(s)ds$ — масса кривой.

3.2 Вычисление криволинейного интеграла первого рода

ПРЕДЛ 3.2.1. Пусть $x_i = \phi_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$; $\phi\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}^n$, $M_k = \phi(t_k)$; $\triangle S_k = \rho(M_k,\, M_{k+1}) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\phi_i(t_{k+1}) - \phi_i(t_k))^2}$; $\phi_i(t_{k+1}) - \phi(t_k) = \phi'(\tau_k^i)(t_{k+1} - t_k)$, $\tau_k^i \in [t_k,\, t_{k+1}]$.

Это следует из теоремы Лагранжа.

$\triangle S_k = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \phi'^2(\tau_k^i)(t_{k+1} - t_k)^2} = \sqrt{(\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i'^2(\tau_k^i))} \cdot |t_{k+1} - t_k| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \phi'^2(\tau_k)} \cdot$ $\cdot\, (t_{k+1} - t_k) + o(|t_{k+1} - t_k|)$, $\tau_k \in [t_k,\, t_{k+1}]$.

$$S(f,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(N_k) \cdot \triangle S_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f(\phi(\tau_k)) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [\phi_i'(\tau_k)]^2} \cdot (t_{k+1} - t_k)}_{(*)} + o(\|\xi\|).$$

Рассмотрим функцию $F(t) = f(\phi(t)) \cdot \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} [\phi_i'(t)]^2}$ на интервале $[a,\, b]$. Если взять разбиение $t_0, \ldots, t_n$ и сделать его отмеченным в точках τ_k, то $(*)$ — это сумма Римана. $L = \int\limits_a^b f(\phi(t)) \cdot \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\phi_i'(t))^2}dt$.

<u>Длина кривой:</u>

$\int\limits_l ds = \int\limits_a^b \sqrt{\sum [\phi_i'(t)]^2}dt = \int\limits_a^b \|V(t)\|dt = \int\limits_a^b \sqrt{(U,V)}dt.$

Пример 3.2.2.

▷
- Пусть $x = t$, $y = t$, $t \in [0,\, 1]$; $\phi'(t) = (1,\, 1)$;
  $\int\limits_l ds = \int\limits_0^1 \sqrt{2}dt = \sqrt{2}.$
- Пусть $x = t^2$, $y = t^2$, $t \in [0,\, 1]$; $\phi'(t) = (2t, 2t)$;
  $\int\limits_l ds = \int\limits_0^1 \sqrt{8t^2}dt = \sqrt{8} \cdot \int\limits_0^1 |t|dt = \sqrt{8} \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \sqrt{2}.$

ОПР 3.2.3 (Эквивалентности параметризации).

Пусть l — аналитическое многообразие.

Предположим, что есть отображение: $\begin{cases} \phi\colon [a,\, b] \to l; \\ \psi\colon [c,\, d] \to l. \end{cases}$

То есть две параметризации. Будем говорить, что ϕ и ψ — эквивалентны, если существует отображение $\mu\colon [c,\, d] \to [a,\, b] \| \ \mu'(\tau) > 0 \forall \tau \in [c,\, d]$, μ — дифференцируема и взаимооднозначна, $\phi \circ \mu = \psi$ на $[c,\, d]$.

Теорема 3.2.4.

▷ Криволинейный интеграл первого рода не зависит от параметризации.

▷ <u>**Доказательство**</u>.

- Очевидно следует из формулы замены переменных в интеграле Римана.

□

3.2.5 Свойства(Криволинейного интеграла)

▷
1. $\int\limits_l (f+g)ds = \int\limits_l f\cdot ds + \int\limits_l g\cdot ds$ — линейность;
2. $\int\limits_l \lambda\cdot f\cdot ds = \lambda\cdot\int\limits_l f\cdot ds$ — однородность;
3. Если l_1, l_2 такие, что l_1+l_2 определено, то $\int\limits_{l_1+l_2} f\cdot ds = \int\limits_{l_1} f\cdot ds + \int\limits_{l_2} f\cdot ds$.

Следствие 3.2.6.

▷ По свойству 3 можно определить криволинейный интеграл первого рода по кусочно-аналитическому многообразию.

3.3 Криволинейные интегралы второго рода

<u>26.10.2006</u>

3.3.1 Замечание

▷ Пусть есть $l\subseteq\mathbb{R}^n$ — аналитическое одномерное многообразие и задано $\phi\colon[a,\,b]\to l$.
Тогда $-l$ противоположно ориентирован.

Пример 3.3.2.

▷ Пусть $\phi\colon[a,\,b]\to l$ и задано $\phi(t)$. Тогда $\phi(1-t)\colon[0,\,1]\to -l$.

ОПР 3.3.3 (Векторного поля)**.**
Допустим существует $F\colon l\to\mathbb{R}^n$*, тогда*
$\overline{F}=(F_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,F_n(x_1,\ldots,x_n))$. F *называется* векторным полем.

ОПР 3.3.4 (Криволинейного интеграла второго рода и его дифференциальной формы).

Будем говорить, что существует криволинейный интеграл второго рода от векторного поля т аналитического одномерного многообразия l, *если существует такая* L, *что* $\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta\Big|\forall\xi$ *кривой* $l\Big|\ \|\xi\| < \delta$, *то* $|\int(F,\xi) - L| < \varepsilon$. *В этом случае* L *называется* криволинейным интегралом второго рода *от* $\overline{F}$ *и обозначается* $L = \int\limits_A^B \sum\limits_{i=1}^n F_i \cdot dx_i = \int\limits_l \sum\limits_{i=1}^n F_i \cdot dx_i$. *Обозначим* $\omega = \sum\limits_{i=1}^n F_i \cdot dx_i$. ω*-называется* дифференциальной 1-формой, *тогда интеграл записываем в виде* $L = \int\limits_A^B \omega = \int\limits_l \omega$.

Теорема 3.3.5.

▷ Пусть

l-одномерное аналитическое многообразие, ω — некоторая 1-форма.

▷ Тогда

$\int\limits_l \omega = -\int\limits_{-l} \omega$.

▷ **Доказательство**.

∘ $\int(F,\,\xi) = \sum\limits_{i=0}^{N-1} F(M_i);(M_{i+1} - M_i) = -\sum\limits_{i=0}^{N-1} F(M_i);(M_i - M_{i-1}) = -\int(F,\,\xi)$

□

ПРЕДЛ 3.3.6. Почему такое обозначение $(F(M_i);\overline{M}_{i+1} - \overline{M}_i)$?

Пусть e_i — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

$\overline{M}_{i+1} - \overline{M}_i = \sum\limits_{k=1}^n \sigma_k \cdot e_k;\ \sigma_k = (\overline{M}_{i+1} - \overline{M}_i; e_k);$

$\overline{M}_i = (x_1, \ldots, x_n), \overline{M}_{i+1} = (x_1 + \triangle x_1, \ldots, x_n + \triangle x_n),\ (\overline{M}_{i+1} - \overline{M}_i) =$

$= (\triangle x_1, \ldots, \triangle x_n);\ \overline{M}_{i+1} - \overline{M}_i = \sum\limits_{k=1}^n \triangle x_k \cdot e_k;\ (\overline{F}(M_i),\ \overline{M}_{i+1} - \overline{M}_i) =$

$= (\overline{F}(M_i),\ \sum\limits_{k=1}^n x_k \cdot e_k) = \sum\limits_{k=1}^n \triangle x_k \cdot (\overline{F}(M_i), \overline{e}_k) = \sum \triangle x_k \cdot F_k(M_i) =$

$= \sum F_k(M_i) \cdot \triangle x_k$.

3.4 Вычисление криволинейного интеграла

ПРЕДЛ 3.4.1. Пусть $\phi\colon [a,\, b] \to l$. Предположим, что выбрана некоторая ориентация $\tau_i \subseteq [a,\, b]$, $i = 0, \ldots, N$; τ_i — рассортировано относительно ориентации $\overline{M}_i = \phi(\tau_i)$. $(\overline{F}(M_i),\, \overline{M}_{i+1} - \overline{M}_i) = (\overline{F}(\phi_1(\tau_i), \phi_2\tau_i, \ldots, \phi_n(\tau_i)),$ $\phi(\tau_{i+1}) - \phi\tau_i) = (F(\phi(\tau_i)), \phi(\tau_{i+1}) - \phi(\tau_i)); \phi_k(\tau_{i+1}) - \phi_k(\tau_i) =_{\text{(По теореме Логранжа)}}$ $\phi_k'(\nu_i^k)(\tau_{i+1} - \tau_i)$, где $\tau_i \leqslant \nu_i^k \leqslant \tau_{i+1}$. $(F(\phi(\tau_i)), \phi(\tau_{i+1}) - \phi(\tau_i)) =$ $\sum\limits_{k=1}^{n} F_k(\phi(\tau_i)) \cdot \phi_k'(\nu_i^k)(\tau_{i+1} - \tau_i) = \left[\sum\limits_{k=1}^{n} F_k(\phi(\tau_i)) \cdot \phi_k^i(\tau_i)\right] \cdot (\tau_{i+1} - \tau_i) + o(\|\xi\|)$.

Рассмотрим выражение $\left[\sum\limits_{k=1}^{n} (F_k(\phi(\tau_i)) \cdot \phi_k'(\tau_i))\right] \cdot (\tau_{i+1} - \tau_i) =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} (F_k(\phi(\tau_i))) \cdot \phi_k'(\tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i)$.

Рассмотрим функцию $F_k(\phi(t)) \cdot \phi_k'(\tau)$, $i \in [a,\, b]$. Если для всякого k $F_k(\phi(\tau)) \cdot$ $\cdot\, \phi_k'(\tau)$ — интеграл по Риману на $[a,\, b]$, то $L = \sum\limits_{k} \int\limits_{a}^{b} F_k(\phi(\tau)) \cdot \phi_k'(\tau) d\tau =$

$= \int\limits_{a}^{b} \sum\limits_{k} F_k(\phi(t)) \cdot \phi_k'(\tau) d\tau$.

3.4.2 Свойства(Криволинейного интеграла второго рода)

▷ 1. $\int\limits_{l} \omega_1 + \omega_2 = \int\limits_{l} \omega_1 + \int\limits_{l} \omega_2$ — линейность;

2. $\int\limits_{l} \omega = -\int\limits_{-l} \omega$ — ориентируемость;

3. $\int\limits_{l_1 + l_2} \omega = \int\limits_{l_1} \omega + \int\limits_{l_2} \omega$ — аддитивность по области;

4. Криволинейный интеграл не зависит от параметризации.

Пример 3.4.3.

▷ Пусть на плоскости прямая задана неявно $y - x^2 = 0$;
Напишем параметризацию: $x = t$, $y = t^2$, $t \in [0,\, 1]$.
Пусть приложена сила $\overline{F}(x^3,\, y^3)$, тогда $\omega = x^3 dx + y^3 dy$;
$\int\limits_{A}^{B} \omega = \int\limits_{l} (x^3 dx + y^3 dy) = \int\limits_{0}^{1} (t^3 dt + t^6 \cdot 2t \cdot dt) = \int\limits_{0}^{1} (t^3 + 2t^7) dt =$
$= \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^8}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

Теорема 3.4.4.

▷ Пусть

l — одномерное аналитическое многообразие.

Предположим, что задана функция $f\colon U \to \mathbb{R}$, где U — открытое множество, такое что $l \subseteq U$, f — непрерывно дифференцируема. Предположим, что $\overline{F}(x)$ задана в U; $\frac{\partial f}{\partial x_k} = F_k(x)$, $\forall k = 1, \ldots, n$.

▷ Тогда

$$\int\limits_A^B \omega = \int\limits_l \sum_{i=1}^n F_i \cdot dx_i = f(B) - f(A).$$

▷ **Доказательство**.

∘ Рассмотрим функцию $G(t) = f(\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$, $t \in [a, b]$.
$\frac{dG}{dt} = \sum\limits_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial t} = \sum\limits_{k=1}^n F_k \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial t}$;
С другой стороны:
$\int\limits_l \omega = \int\limits_a^b \sum\limits_{k=1}^n F_k \cdot (\phi(t)) \cdot \frac{d\phi_k}{dt} \cdot dt = \int\limits_a^b \frac{dG}{dt} \cdot dt = G(b) - G(a) =$
$f(\phi_1(b), \ldots, \phi_n(b)) - f(\phi_1(a), \ldots, \phi_n(a)) = f(B) - f(A).$

□

3.5 Формула Грина

02.11.2006

Замечание 3.5.1 (Напоминание)**.**

▷ Пусть $D \subset \mathbb{R}^2, D$ — открыто и ограничено. Тогда $x \in \mathbb{R}^2$ называется *граничной точкой* если $\forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x) \cap D \neq \varnothing$, $B_\varepsilon(x) \cap \{\mathbb{R}^2 \backslash D\} \neq \varnothing$.

Множество всех граничных точек области будем обозначать ∂D.

Замечание 3.5.2.

▷ В дальнейшем считаем, что область такая, что $C = \partial D$ — это кусочно-аналитическое одномерное многообразие.

ОПР 3.5.3 (Замкнутой прямой)**.**
Пусть C — некоторая кривая. Кривую C будем называть замкнутой *если относительно некоторой параметризации $\phi\colon [a, b] \to C$ имеет место $\phi(a) = \phi(b)$.*

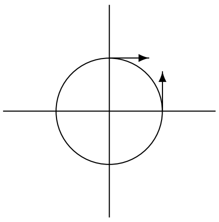
ОПР 3.5.4 (Замкнутой прямой без самопересечений)**.**
Кривая называется замкнутой прямой без самопересечений *если $\forall t_1, t_2 \in (a, b) \big| \, t_1 \neq t_2 \quad \phi(t_1) \neq \phi(t_2)$.*

Граница области замкнутая кривая. Рассматриваем области такие, что граница не является самопересекающейся.

ОПР 3.5.5 (Правильно ориентированной прямой).

Будем говорить, что $C = \partial D$ правильно ориентирована *если при увеличении параметра кривая обходится так, что область находится слева.*

Пример 3.5.6 (Правильно и неправильно ориентированной кривой).



$$x^2 + y^2 < 1, \quad x^2 + y^2 = 1$$
$$t \in [0, 2\pi]$$
$$x = \cos t, \quad y = \sin t \qquad \text{— правильно ориентирована}$$
$$x = \sin t, \quad y = \cos t \qquad \text{— неправильно ориентирована}$$

Теорема 3.5.7 (Формула Грина).

▷ Пусть

$D \in \mathbb{R}^2, D$ — ограничено, $C = \partial D$ — кусочно-аналитическое многообразие размерности 1, которое правильно ориентировано; $P(x,y), Q(x,y)$ — пары непрерывно дифференцируемых функций (в смысле $\mathbb{R}^2$) в области $E \big| C \cup D \subset E$.

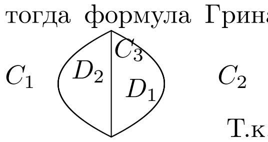
▷ Тогда

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_C Pdx + Qdy \qquad (*).$$

Это равенство называется формулой Грина.

▷ **Доказательство**.

◦ Предположим, что формула Грина верна для областей D_1 и D_2, тогда формула Грина верна для области $D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 = \varnothing$.



Т.к. формула верна для D_1, то:

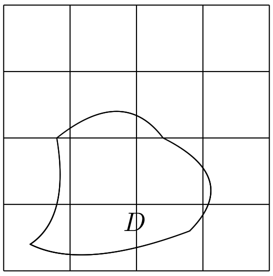
$$\iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{C_2} Pdx + Qdy + \int_{C_3} Pdx + Qdy \qquad (1)$$

Т.к. формула верна для D_1, то:

$$\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{C_1}Pdx+Qdy+\int_{-C_3}Pdx+Qdy \qquad (1)$$

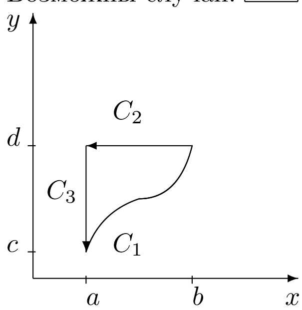
Складываем (1) и (2):

$$\iint_{D_1\cup D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{C_2}Pdx+Qdy+\int_{C_3}Pdx+Qdy+$$
$$+\int_{C_1}Pdx+Qdy-\int_{C_3}Pdx+Qdy=\int_{C_1+C_2}Pdx+Qdy.$$

○ 

Рассмотрим случай:

Возможны случаи: 



Кривая C_1 в виде графика функции $y=f(x)$. Параметризация для границ:

$$C_1\colon x=t,\ y=f(t),\ t\in[a,b],\ f(a)=c,\ f(b)=d$$
$$C_2\colon x=a+bt,\ y=d,\ t\in[a,b]$$
$$C_3\colon x=a,\ y=d+ct,\ t\in[c,d].$$

Заметим, что в формуле Грина достаточно доказать для случая $Q=0$, т.е. доказать:

$$\iint_D-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_a^b Pdx.$$

Рассмотрим:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx \left(\int_{f(x)}^{f(b)} \frac{\partial P}{\partial y}dy \right) = \int_a^b P(x, f(b)) - P(x, f(x))dx$$

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b P(x, f(x)) - P(x, f(b))dx$$

$$\int_{\partial D} Pdx = \int_{C_1} Pdx + \int_{C_2} Pdx + \int_{C_3} Pdx = \int_a^b P(t, f(t))dt +$$

$$+ \int_a^b P(a + b - t, f(b))(-dt) + \int_c^d P(a, d + c - t)0 \cdot dt =$$

$$= \int_a^b P(t, f(t))dt - \int_a^b P(a + b - t, f(b))dt =$$

$$=_{(t\,=\,x)} \int_a^b P(x, f(x))dx -_{(\tau\,=\,a\,+\,b\,-\,t)} \int_b^a P(\tau, f(b))(-d\tau) =$$

$$= \int_a^b P(x, f(x))dx - \int_a^b P(\tau, f(b))d\tau =$$

$$= \int_a^b P(x, f(x)) - P(x, f(b))dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b Pdx.$$

$\square$

Следствие 3.5.8 (Следствие 1).

▷ Если $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то $\int_C Pdx + Qdy = 0$.

Следствие 3.5.9 (Следствие 2).

▷ Пусть $P = y, Q = 0$ в формуле Грина.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = -\iint_D dxdy = -\text{площадь}(D).$$

▷ Если взять $P = 0, Q = x$, то площадь $\int_{\partial D} xdy = \text{площадь}(D)$.

Пример 3.5.10.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$$
$$x=a\cos t, y=b\sin t,\ t\in[0,2\pi];$$
$$\iint_D dxdy=\int_{\partial D}xdy=\int_0^{2\pi}a\cos t\cdot b\cos tdt=ab\int_0^{2\pi}\cos^2 tdt=$$
$$=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(1-2\cos 2t)dt=\pi ab.$$

Пример 3.5.11 (Площадь области, ограниченной полигоном)**.**

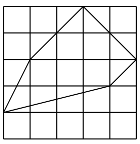
Пусть $a_0,a_1,\dots,a_n$ $(a_k=(x_k,y_k))$ — вершины многоугольника, которые расположены согласно ориентации.

Считаем, что $a_n=a_0$.

$$\text{площадь}(D)=\int_{\partial D}xdy=\sum_k^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}xdy$$
$$x=x_k+(x_{k+1}-x_k)t,\ y=y_k+(y_{k+1}-y_k)t,\ t=[0,1]$$
$$\int_{a_k}^{a_{k+1}}xdy=\int_0^1(x_k+(x_{k+1}-x_k)t)(y_{k+1}-y_k)dt=$$
$$=\int_0^1 x_k(y_{k+1}-y_k)+(x_{k+1}-x_k)(y_{k+1}-y_k)tdt=$$
$$=x_k(y_{k+1}-y_k)t\ |_0^1+\frac{(x_{k+1}-x_k)(y_{k+1}-y_k)}{2}t^2\ |_0^1=$$
$$=x_k(y_{k+1}-y_k)+\frac{(x_{k+1}-x_k)(y_{k+1}-y_k)}{2}=$$
$$=\frac{(y_{k+1}-y_k)}{2}(2k_x+x_{k+1}-x_k)=\frac{(y_{k+1}-y_k)(x_{k+1}+x_k)}{2}$$
$$\text{площадь}(D)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(y_{k+1}-y_k)(x_{k+1}+x_k)$$

ПРЕДЛ 3.5.12 (Формула Пика)**.**

▷ $S=p+\dfrac{n}{2}$


p — число точек внутри, m — число точек на границе.

3.6 Поверхностные интегралы

09.11.2006

3.6.1 Краткие сведения из линейной алгебры.

▷ Пусть задано пространство $\mathbb{R}^n$ и три вектора $\overline{x}_0$, $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$.
$S_\triangle = \frac{1}{2}\cdot ab\sin\phi$, $a = \|\overline{x_1} - \overline{x_0}\|_n$, $b = \|\overline{x_1} - \overline{x_0}\|_n$;
$\cos\phi = \frac{(\overline{x_1}-\overline{x_0},\,\overline{x_2}-\overline{x_0})}{\|x_1-x_0\|\cdot\|x_2-x_0\|}$; $\sin\phi = \pm\sqrt{1-\cos^2\phi}$;
$S_\triangle = \frac{1}{2}\cdot\|\overline{x_1} - \|\overline{x_0}\|\cdot\|\overline{x_2}-\overline{x_0}\|\cdot(\pm)\cdot\sqrt{1-\frac{(\overline{x_1}-\overline{x_0},\,\overline{x_2}-\overline{x_0})^2}{\|x_1-x_0\|^2\cdot\|x_2-x_0\|^2}} =$
$= \pm\frac{1}{2}\sqrt{\|x_1-x_2\|^2\cdot\|x_2-x_0\|^2 - (\overline{x_1}-\overline{x_0},\,\overline{x_2}-\overline{x_0})^2}$.
$\overline{x_1}-\overline{x_0} = V$; $\overline{x_2}-\overline{x_0} = W$; $S_\triangle = \pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\|V\|^2\cdot\|W\|^2-(V,\,W)^2}$.
В $\mathbb{R}^3$ $\|V\|^2\cdot\|W\|^2-(V,W)^2 = \|V+W\|^2$.
V, W можно сопоставить число.
$F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^n$, $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}\in\mathbb{R}^2$;
$F(\overline{e_1}) = V_1$, $F(\overline{e_2}) = W$.

$$F = \begin{pmatrix} V_1 & W_1\\ V_2 & W_2\\ \vdots & \vdots\\ V_n & W_n\end{pmatrix},\ F^T = \begin{pmatrix} V_1 & \dots & V_n\\ W_1 & \dots & W_n\end{pmatrix} \Rightarrow F^T\cdot F = \begin{pmatrix}\|V\|^2 & (V,\,W)\\ (V,W) & \|W\|^2\end{pmatrix},$$

$\det(F^T\cdot F) = \|V\|^2\cdot\|W\|^2-(V,\,W)^2$;
$S_\triangle = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\det(F^T\cdot F)}$.
$\overline{x_0}$, $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, $\overline{x_1+x_2}$ называется *поверхностью*. S(элемент поверхности) $= \sqrt{\det(F^T\cdot F)}$.
В пространстве $\mathbb{R}^n$ базис $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$. Возьмем плоскость i, j, натянутую на вектора $\overline{e_i}$, $\overline{e_j}$. $Pr_{ij}(V)$ — проекция на плоскость, натянутую на вектора $\overline{e_i}$, $\overline{e_j}$ имеет вид:
$Pr_{ij}(V) = (0,\dots,\,V_i,\,0,\dots,\,V_j,\,0,\dots,\,0)$;
$Pr_{ij}(W) = (0,\dots,\,W_i,\,0,\dots,\,W_j,\,0,\dots,\,0)$;
$Pr_{ij}(\triangle) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(V_i^2+W_j^2)(W_i^2+W_j^2)-(V_i\cdot W_j - V_j\cdot W_i)^2} =$
$= \frac{1}{2}|V_i\cdot W_j - V_j\cdot W_i|$. $i<j$,
$Pr_{ij}(\triangle) = \frac{1}{2}(V_i\cdot W_j - V_j\cdot W_i)$; $Pr_{ij}(\triangle) = -Pr_{ji}(\triangle)$.
Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} V_1 & W_1\\ \vdots & \vdots\\ V_n & W_n\end{pmatrix}$. Выделим минор $\begin{pmatrix} V_i & W_i\\ V_j & W_i\end{pmatrix}$,
$\det\left(\begin{pmatrix} V_i & W_i\\ V_j & W_i\end{pmatrix}\right)$ — площадь проекции элементарной поверхности. Всего проекций $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$. Всякой элементарной поверхности можно сопоставить $\frac{n(n-1)}{2}$ чисел. Если $n=3$, то чисел 3. Стало быть, можно сопоставить вектор, который называется *векторным произведением*.

Теорема 3.6.2 (Тождество Лагранжа)**.**

▷ $\sum\limits_{i<j}^{n} (a_i \cdot b_j - a_j \cdot b_i)^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right) \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2.$

▷ **Доказательство**.

◦ Доказывается по индукции.

□

Следствие 3.6.3.

▷ Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Тогда справа в предыдущей формуле $\|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - (a, b)^2 = S^2$, S — площадь поверхности натянутой на $\overline{a}$, $\overline{b}$. А слева $\sum\limits_{i<j} Pr_{ij}^2 \cdot$ (элемент поверхности). Это теорема Пифагора.

3.7 Поверхностные интегралы первого рода

ПРЕДЛ 3.7.1. Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$, M — двумерное аналитическое многообразие. Будем считать, что для M существует параметризация. Другими словами, существует область $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ и функции $\phi_1(p, q), \ldots, \phi_n(p, q) \Big| \forall \overline{x} \in M\ \exists p, q \Big| x_i = \phi_i(p, q)$, $i = 1, \ldots, n$.

Пример 3.7.2.

▷ $z = f(x, y)$, $x = p = \phi_1(p, q)$, $y = q = \phi_2(p, q)$, $z = f(p, q) = \phi_3(p, q)$.

Пример 3.7.3.

▷ $x^2+y^2+z^2 = R^2$ — сфера. $x = R \cdot \sin q \cdot \cos p$, $y = R \cdot \cos q \cdot \cos p$, $z = R \cdot \sin p$.

Пример 3.7.4.

▷ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$; Гиперплоскость в $\mathbb{R}^2$, $\phi_i(p, q)$ — аффинное преобразование.

ПРЕДЛ 3.7.5. Рассмотрим область Ω. $\overline{x_0} = (\phi_i(p_0, q_0), \ldots, \phi_n(p_0, q_0))$, $\overline{x_1} = (\phi_i(p_0 + n, q_0), \ldots, \phi_n(p_0 + n, q_0))$, $\overline{x_2} = (\phi_i(p_0, q_0 + n), \ldots, \phi_n(p_0, q_0 + n))$;
$\triangle S = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\phi_i(p + n, q) - \phi_i(p, q))^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (\phi_i(p, q + n) - \phi_i(p, q))^2 =}$

$= \left[(\sum\limits_i (\phi_i(p+h,\, q) - \phi_i(p,\, q))(\phi_i(p,\, q+n) - \phi_i(p,\, q))) \right]^2.$

$\triangle S = \sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (\frac{\partial \phi_i}{\partial p}(\xi))^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial \phi_i}{\partial q}(\xi))^2 \right) - \left(\sum\limits_i \frac{\partial \phi_i}{\partial p}(\xi) \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial q}(\xi) \right)^2} \cdot n +$
$+ o(|n|).$

Введем $E = \sum\limits_i (\frac{\partial \phi_i}{\partial p})^2$, $G = \sum\limits_i (\frac{\partial \phi_i}{\partial q})^2$, $F = \sum\limits_i \frac{\partial \phi_i}{\partial p} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial q}$;

$\triangle S = \sqrt{EG - F^2} \cdot n^2 = \sqrt{EG - F^2} \triangle p \cdot \triangle q;$

$\sum\limits_{i,\, j} \triangle S = \sum\limits_{i,j} \sqrt{EG - F^2} \triangle x \triangle y$. Следовательно, определена сумма Римана. $S = \int\int\limits_{\Omega} \sqrt{EG_F^2} dpdq$;$S = \int\int\limits_{M} ds$ — площадь поверхности.

$\phi_1(p,\, q), \ldots,\, \phi_n(p,\, q)$, $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$. Матрица Якоби: $I(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial p} & \frac{\partial \phi_1}{\partial q} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial p} & \frac{\partial \phi_n}{\partial q} \end{pmatrix}.$

Пример 3.7.6.

▷ $x = p$, $y = q$, $z = f(p,\, q)$.

Матрица Якоби: $I(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial q} \end{pmatrix}$; $I^*(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial p} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial q} \end{pmatrix}$;

$I^*(\phi) \cdot I(\phi) = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial f}{\partial q} \\ \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial f}{\partial q} & 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^2 \end{pmatrix}$;

$\det(I^*(\phi) \cdot I(\phi)) = (1 + \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2)(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^2) - \left(\frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial f}{\partial q}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^2.$

Следствие 3.7.7.

▷ Площадь графика функции $z = f(x,\, y)$ над Ω равна $S = \int\int\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^2} dpdq$; Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}, f$ — функция на аналитическом многообразии, тогда $f(\phi_1(p,\, q), \ldots,\, \phi_n(p,\, q))$ определена на Ω. Определим поверхностный интеграл первого рода на M: $\int\limits_M s \cdot ds = \int\int\limits_{\Omega} f(\phi_1(p,\, q), \ldots,\, \phi_n(p,\, q)) \cdot \sqrt{\det(I^* \cdot I)}$.

3.7.8 Свойства(Интеграла первого рода)

▷ 1. $\int\limits_M (f + g) ds = \int\limits_M f \cdot ds + \int\limits_M g \cdot ds.$

2. Поверхностный интеграл первого рода не зависит от параметризации. Это следует из формулы замены переменных в интеграле Римана.
3. Если $M_1 \cap M_2 \neq 0$, то $\int \int\limits_{M_1 \cap M_2} f \cdot ds = \int\limits_{M_1} f \cdot ds + \int\limits_{M_2} f \cdot ds$.

Свойство 3 позволяет интегрировать для некоторого аналитического многообразия.

3.8 Поверхностные интегралы II-го рода

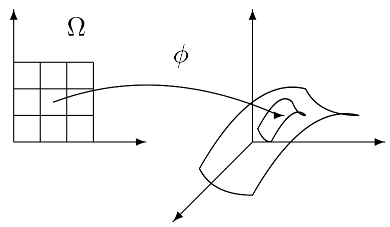
16.11.2006

ПРЕДЛ 3.8.1 (Конструкция)**.**

▷ Пусть $S \subset R^3, S$ — двудольное аналитическое многообразие. Существует $\Omega \subset \mathbb{R}^2, \phi\colon \Omega \to S, \phi$ — непрерывно дифференцируема.

Будем считать, что $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Построим разбиение аналитического многообразия S следующим образом:

- Сначала сделаем разбиение множества Ω как это делали для двойного интеграла.



Пусть $\Delta_k \in \xi$. Обозначим через $\sigma_k = \phi(\Delta_k)$. Очевидно, что σ_k — разбиение для S.
$\{\sigma_k\}_{k=1}^N$ — разбиение η аналитического многообразия S.
Обозначим $||\eta|| = \sup_{k=1..n}(diam(\sigma_k))$.
- Пусть для любой пары $i, j (i, j = 1, 2, \ldots, n), R_{ij}\colon S \to \mathbb{R}$. $M_k \subset \sigma_k$. Рассмотрим отмеченное разбиение $(\sigma_k, M_k), k = 1, \ldots, N$.
- Пусть σ_k — элементы разбиения $Pr_{ij}(\sigma_k)$. $S(Pr_{ij}(\sigma_k))$ — ориентированная площадь.
$J_{ij} = \sum_{k=1}^N R_{ij}(M_k) \cdot S(Pr_{ij}(\sigma_k))$ — *интегральная сумма*.
- Рассмотрим сумму:

$$T_\eta = \sum_{ij} J_{ij} = \sum_{k=1}^N \sum_{ij} R_{ij}(M_k) \cdot S(Pr_{ij}(\sigma_k)).$$

Эту сумму назовем *интегральной суммой II-го рода*.

ОПР 3.8.2 (Интеграла II-го рода).

Число T называется интегралом II-го рода *если* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \big| \forall$ *разбиения* $\eta(||\eta|| < \delta) \big| |T - T_\eta| < \varepsilon$. *В этом случае T обозначается:*

$$T = \int_S \sum_{i,j} R_{ij} dx_i dx_j.$$

Замечание 3.8.3.

$$Pr_{ij}(\sigma_k) = 0$$

$$Pr_{ij}(\sigma_k) = -Pr_{ji}(\sigma_k).$$

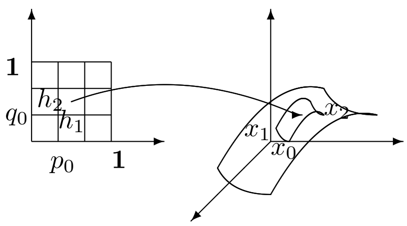
Отсюда следует, что правильная запись такая:

$$T = \int_S \sum_{i<j} R_{ij} dx_i dx_j.$$

Таким образом надо задать $(R_{ij} - \dfrac{n(n-1)}{2})$ функций.

3.8.4 Вычисление поверхностных интегралов II-го рода

Пусть задана параметризация $x_i = phi_i(p, q), i = 1, \ldots, n$.



$$\overline{x_0} = (\phi_1(p_0, q_0), \phi_2(p_0, q_0), \ldots, \phi_n(p_0, q_0))$$
$$\overline{x_1} = (\phi_1(p_0 + h_1, q_0), \phi_2(p_0 + h_1, q_0), \ldots, \phi_n(p_0 + h_1, q_0))$$
$$\overline{x_2} = (\phi_1(p_0, q_0 + h_2), \phi_2(p_0, q_0 + h_2), \ldots, \phi_n(p_0, q_0 + h_2))$$
$$\overline{x_1} - \overline{x_0} = (\phi_1(p_0 + h_1, q_0) - phi_1(p_0, q_0) + \ldots + \phi_n(p_0 + h_1, q_0) - phi_1(p_0, q_0)) =$$
$$= \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial p}(\xi) \cdot h_1, \ldots, \frac{\partial\phi_n}{\partial p}(\xi) \cdot h_1\right) + o(h_1)$$
$$\overline{x_1} - \overline{x_0} \simeq \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial p}(\xi), \ldots, \frac{\partial\phi_n}{\partial p}(\xi)\right) \cdot h_1$$
$$\overline{x_2} - \overline{x_0} \simeq \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial p}(\xi), \ldots, \frac{\partial\phi_n}{\partial p}(\xi)\right) \cdot h_2$$
$$S(Pr_{ij}(\sigma_k)) = \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial p}(\xi)\frac{\partial\phi_j}{\partial q}(\xi) - \frac{\partial\phi_j}{\partial p}(\xi)\frac{\partial\phi_i}{\partial q}(\xi)\right) h_1 h_2 + o(h_1, h_2)$$
$$T_{ij} = \sum_{i,j} R_{ij}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial p}\frac{\partial\phi_j}{\partial q} - \frac{\partial\phi_j}{\partial p}\frac{\partial\phi_i}{\partial q}\right).$$

Сумма рассматривается в Ω. Следовательно, T_{ij} — есть интеграл Римана по Ω от функции:

$$R_{ij}(\phi_1(p,q), \ldots, \phi_n(p,q)) \cdot \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial p}\frac{\partial\phi_j}{\partial q} - \frac{\partial\phi_i}{\partial q}\frac{\partial\phi_j}{\partial p}\right) \qquad \forall i < j$$
$$T = \iint_\Omega \sum_{i<j} R_{ij}(\phi_1(p,q), \ldots, \phi_n(p,q)) \cdot \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial p}\frac{\partial\phi_j}{\partial q} - \frac{\partial\phi_i}{\partial q}\frac{\partial\phi_j}{\partial p}\right) dpdq$$

— искомый интеграл.

Обозначение: $T = \int_S \sum_{i<j} R_{ij} dx_i dx_j$

Пусть $n = 3$: R_{ij} — 3 штуки. Введём вектор (P, Q, R), замена $(x_1, x_2, x_3) \to (x, y, z)$.

Поток вектора (P, Q, R) через поверхность S:

$$\int_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.$$

Свойства интегралов II-го рода:

1. $\int_S \sum_{i,j} R_{ij} dx_i dx_j + \int_S \sum_{i,j} N_{ij} dx_i dx_j = \int_S \sum_{i,j} (R_{ij} + N_{ij}) dx_i dx_j$
   — линейность;

2. $\int_{S_1 \cup S_2} \sum_{i<j} R_{ij} dx_i dx_j = \int_{S_1} \sum_{i<j} R_{ij} dx_i dx_j + \int_{S_2} \sum_{i<j} R_{ij} dx_i dx_j$
   $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Свойство 2 позволяет рассматривать кусочно-аналитические многообразия;

3. Интеграл на зависит от

3.8.5 Формула Гаусса-Остроградского

В R^3, V — область в R^3, S — её границы.

ОПР 3.8.5.1 (Правильной ориентации).
Пусть ϕ — некоторая параметризация $S, p_0 \in S$.

$$\overline{\sigma_1} = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial p}, \ldots, \frac{\partial \phi_n}{\partial p}\right)$$
$$\overline{\sigma_2} = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial q}, \ldots, \frac{\partial \phi_n}{\partial q}\right)$$
$$\overline{n} = \frac{\overline{\sigma_1} \times \overline{\sigma_2}}{||\overline{\sigma_1}|| \cdot ||\overline{\sigma_2}||}$$

Будем говорить, что S правильно ориентировано относительно V *если вектор нормали $\overline{n}$ направлен вне области V $\forall p_0 \in S$.*

Теорема 3.8.5.2 (Гаусса-Остроградского).

- ▷ Пусть

  Пусть V — область в R^3 такая, что её граница S правильно ориентирована. Пусть P, Q, R — три непрерывно дифференцируемые функции на области $D \big| V \cup S \subset D$.

- ▷ Тогда

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.$$

- ▷ **Доказательство**.

  - Пусть теорема верна для области V_1 и V_2. Тогда она верна для $V_1 \cup V_2 = V$.

У области V — граница $S_1 \cup S_3$.

$$\iiint_{V_1} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz =$$

$$= \iint_{S_1 \cup S_2} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= \iint_{S_1} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy + \iint_{S_2} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy;$$

$$\iiint_{V_2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz =$$

$$= \iint_{S_3 \cup S_2} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= \iint_{S_3} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy + \iint_{S_2} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.$$

Сложим левые и правые части двух выражений:

$$\iiint_{V_1} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz + \iiint_{V_2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz =$$

$$= \iiint_{V = V_1 \cup V_2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz =$$

$$= \iint_{S_1} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy + \iint_{S_2} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy -$$

$$- \iint_{S_2} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy + \iint_{S_3} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= \iint_{S_1} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy + \iint_{S_3} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$\iint_{S_1 \cup S_3} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.$$

Возможны следующие случаи (при разбиении):

- ✓ в качестве $V = [a,\, b] \times [c,\, d] \times [e,\, f]$. Тогда всё тривиально.
- ✓ $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \Omega$
  1. $\iiint_V \dfrac{\partial P}{\partial x}\, dxdydz = \iint_S P\, dydz$
  2. $\iiint_V \dfrac{\partial Q}{\partial y}\, dxdydz = \iint_S Q\, dxdz$
  3. $\iiint_V \dfrac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint_S R\, dxdy$

Достаточно доказать для каждого из трёх случаев. Тогда теорема будет доказана. Каждый случай соответствует одному из следующих утверждений:

1. $x = f_1(y,\, z)$
2. $y = f_2(x,\, z)$
3. $z = f(x,\, y)$

Докажем случай 3. Остальные автоматически.

$$z = f(x,\, y)$$

$$\iiint_V = \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint_\Omega^V \left(\int_0^{z=f(x,\,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz \right) dxdy =$$

$$=_{(\text{по ф-ле Ньютона-Лейбница})} \iint_\Omega R(x,\, y,\, f(x,\, y)) - R(x,\, y,\, 0) dxdy =$$

$$= \iint_\Omega R(x,\, y,\, f(x,\, y)) dxdy - \iint_\Omega R(x,\, y,\, 0) dxdy \qquad (3.8.1)$$

$$\iint_S Rdxdy = \iint_\Omega Rdxdy + \iint_{S_1} Rdxdy + \iint_{S_2} Rdxdy + \iint_{S_3} Rdxdy \qquad (3.8.2)$$

Посчитаем отдельно:

$$\iint_\Omega Rdxdy = -\iint_\Omega R(P,\, Q,\, 0)$$
$$x = p,\; y = q,\; z = 0$$

Матрица Якоби:

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial p} & \dfrac{\partial x}{\partial q} \\ \dfrac{\partial y}{\partial p} & \dfrac{\partial y}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1;$$

$$\iint_{S_1} Rdxdy = 0$$

$$x = p,\ y = 0,\ z = q$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0;$$

$$\iint_{S_2} Rdxdy = 0;$$

$$\iint_{S_3} Rdxdy = \iint_{\Omega} R(p,\ q,\ f(p,\ q)) \cdot 1\ dpdq$$

$$x = p,\ y = q,\ z = f(p,\ q)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Теперь подставим в (3.8.2) и сложим:

$$\iint_S Rdxdy = -\iint_{\Omega} R(x,\ y,\ 0)dxdy + \iint_{\Omega} R(x,\ y,\ f(x,\ y))dxdy.$$

Сравнивая с (3.8.1) получаем равенство. Значит пункт 3 доказан.

□

3.9 Формула Стокса

23.11.2006

Теорема 3.9.1 (Формула Стокса)**.**

▷ Пусть

$M \subset \mathbb{R}^3, M$ — аналитическое многообразие; $S \subset M, l$ — граница S, l — одномерное замкнутое аналитическое многообразие в $\mathbb{R}^3$.

l — *правильно ориентирована относительно* S означает, что $\forall p \in l$, где $\vec{n}$ — вектор нормали к M в точке p, $\vec{\delta}$ — касательный вектор к l в точке p, пусть $\vec{e} = \vec{n} \times \vec{\delta}$ если $\vec{e}$ направлен внутрь области S.

Пусть P, Q, R – три функции, определённые на области $\Omega \big| S \cup l \subset \Omega$ и непрерывно дифференцируемые на Ω.

▷ Тогда

$$\int_l Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dxdz + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy.$$

Это равенство называется *формулой Стокса*.

▷ **Доказательство**.

∘ Введём параметризацию M:

$$
\begin{aligned}
x &= \phi_1(p,\,q)\\
y &= \phi_2(p,\,q)\\
z &= \phi_3(p,\,q).
\end{aligned}
$$

Будем считать, что S такая, что l параметризуется l'. Пусть l' параметризована функциями $p = \psi_1(\tau), q = \psi_2(\tau)(\tau \in [a,\,b])$. Следовательно для l имеет место параметризация:

$$
\begin{aligned}
x &= \phi_1(\psi_1(\tau), \psi_2(\tau)) = x(\tau)\\
y &= \phi_2(\psi_1(\tau), \psi_2(\tau)) = y(\tau)\\
z &= \phi_3(\psi_1(\tau), \psi_2(\tau)) = z(\tau)
\end{aligned}
$$

∘

$$
\int_l P dx = \int_a^b P(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \cdot \frac{dx}{d\tau} \cdot d\tau =
$$
$$
= \int_a^b P(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \cdot \frac{d}{d\tau}(\phi_1(\psi_1(\tau), \psi_2(\tau)))d\tau =
$$
$$
= \int_a^b P(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial p}\frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi_1}{\partial q}\frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} \right) d\tau =
$$
$$
= \int_a^b P\frac{\partial \phi_1}{\partial p}\frac{\partial \psi_1}{\partial \tau}d\tau + P\frac{\partial \phi_1}{\partial q}\frac{\partial \psi_2}{\partial \tau}d\tau =
$$
$$
=_{\left(dp = \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau},\ dq = \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau}\right)} = \int_{l'} P\frac{\partial \phi_1}{\partial p}dp + P\frac{\partial \phi_2}{\partial q}dq =
$$
$$
= \int_{l'} Tdp + Udq =
$$
$$
(T = p\frac{\partial \phi_1}{\partial p},\ U = p\frac{\partial \phi_1}{\partial q})
$$

Применяем формулу Грина:

$$= \iint_{S'} \frac{\partial}{\partial p}\left(P\frac{\partial p_1}{\partial q}\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(P\frac{\partial \phi_1}{\partial p}\right) dpdq =$$
$$= \iint_{S'} \left(\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial \phi_1}{\partial q} + P\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial p \partial q} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial \phi_1}{\partial p} - P\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial q \partial p}\right) dpdq =$$
$$=_{\left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial p \partial q} = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial q \partial p}\right)} =$$
$$= \iint_{S'} \left(\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial \phi_1}{\partial q} + -\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial \phi_1}{\partial p}\right) dpdq.$$

Посчитаем:

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}(P(\phi_1(p,q), \phi_2(p,q), \phi_3(p,q))) =$$
$$= \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial \phi_1}{\partial p} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial \phi_2}{\partial p} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \phi_3}{\partial p}$$
$$\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}(P(\phi_1(p,q), \phi_2(p,q), \phi_3(p,q))) =$$
$$= \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial \phi_1}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial \phi_2}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \phi_3}{\partial q}.$$

Подставляем:

$$\iint_{S'}\left(\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial \phi_1}{\partial q}-\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial \phi_1}{\partial p}\right)dpdq=$$

$$=\iint_{S'}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial \phi_1}{\partial p}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial \phi_2}{\partial p}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \phi_3}{\partial p}\right)\cdot\frac{\partial \phi_1}{\partial q}-$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial \phi_1}{\partial q}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial \phi_2}{\partial q}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \phi_3}{\partial q}\right)\cdot\frac{\partial \phi_1}{\partial p}dpdq=$$

$$=\iint_{S'}\frac{\partial P}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial q}\frac{\partial \phi_2}{\partial p}-\frac{\partial \phi_2}{\partial q}\frac{\partial \phi_1}{\partial p}\right)dpdq}_{dxdy}+$$

$$+\iint_{S'}\frac{\partial P}{\partial z}\underbrace{\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial q}\frac{\partial \phi_2}{\partial p}-\frac{\partial \phi_1}{\partial p}\frac{\partial \phi_2}{\partial q}\right)dpdq}_{dxdy}=$$

$$=-\iint_S\frac{\partial P}{\partial y}dxdy+\iint_S\frac{\partial P}{\partial z}dzdx$$

$$\int_l=Pdx=\iint_S\frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\iint_S\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

$$\int_l=Qdy=\iint_S\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy-\iint_S\frac{\partial Q}{\partial y}dydz$$

$$\int_l=Rdz=\iint_S\frac{\partial R}{\partial y}dydz-\iint_S\frac{\partial R}{\partial x}dxdz.$$

Складываем последние три равенства и получаем формулу Стокса.

□

3.10 Независимость криволинейного интеграла по пути в $\mathbb{R}^3$

30.11.2006

ОПР 3.10.1 (Независимость от пути в $\mathbb{R}^3$)**.**

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^3$, Ω — выпуклая область. Предположим, что точки $A, B \in \Omega$, кривые $l_1, l_2 \subset \Omega$, причём l_1 и l_2 имеют одинаковое начало (точку A) и одинаковый конец (точку B).

Пусть P, Q, R — три функции, непрерывно дифференцируемые в Ω. Будем говорить, что криволинейный интеграл $\int_l Pdx+Qdy+Rdz$ не зависит от пути с началом в A и концом в B в $\mathbb{R}^3$ *если* $\forall l_1, l_2$: $\int_{l_1} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{l_2} Pdx + Qdy + Rdz$.

Теорема 3.10.2 (Условие независимости от пути)**.**

▷ Условие:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$\forall x,\, y,\, z \in \Omega$ является необходимым и достаточным, чтобы криволинейный интеграл 2-го рода $\int_l Pdx + Qdy + Rdz$ не зависел от пути.

▷ **Доказательство**.

- Пусть $A, B \in \Omega$, l_1, l_2 соединяют точки A и B. Рассмотрим путь $l = l_1 + (-l_2)$. Тогда согласно формуле Стокса:

$$\int_l Pdx + Qdy + Rdz =$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dydz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) dydz = 0$$
$$\int_l Pdx + Qdy + Rdz = \int_{l_1+(-l_2)} Pdx + Qdy + Rdz =$$
$$\int_{l_1} Pdx + Qdy + Rdz + \int_{-l_2} Pdx + Qdy + Rdz =$$
$$\int_{l_1} Pdx + Qdy + Rdz - \int_{l_2} Pdx + Qdy + Rdz = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_{l_1} = \int_{l_2}.$$

- Пусть интеграл не зависит от пути, но $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) \neq 0$ в точке $(x_0,\, y_0,\, z_0) \Rightarrow \exists I^3 = [a,\, b] \times [c,\, d] \times [e,\, f]$, причём $(x_0,\, y_0,\, z_0) \in I^3$ и

$\forall (x,\, y,\, z) \in I^3 \colon \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) > 0$ Заметим:

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} +\right) dxdz + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz =$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy > 0.$$

С другой стороны, по формуле Стокса это должно быть равно нулю. получили противоречие. Следовательно, теорема доказана.

□

Пусть $P,\, Q,\, R$ - три функции на области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Задача: найти такую функцию $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$, что градиент $\bigtriangledown f = (P,\, Q,\, R)$. Это условие означает, что:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P,\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q\ \frac{\partial f}{\partial z} = R.$$

Продифференцируем:

$$У1 = \begin{cases} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} = 0 \\ \\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

— необходимые условия существования функции f.

Теорема 3.10.3.

▷ Пусть

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — выпуклая область, $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R})$ — непрерывно дифференцируемы в Ω.

▷ Тогда

условие (У1) является необходимым и достаточным для существования функции $f\Big| \bigtriangledown f = (P,\, Q,\, R)$, причём функцию f можно выписать „явно":

$$f(u,\, v,\, w) = \int_{(x_0,\, y_0,\, z_0)}^{(u,\, v,\, w)} Pdx + Qdy + Rdz,$$

где $(x_0,\, y_0,\, z_0) \in \Omega$ — произвольная фиксированная точка, $(u,\, v,\, w) \subset \Omega$.

▷ **Доказательство**.

- Параметризуем прямую из точки $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ в точку $(u,\, v,\, w)$ (в силу выпуклости прямая будет лежать в области):

$$x = x_0 + t(u - x_0)$$
$$y = y_0 + t(v - y_0)$$
$$z = z_0 + t(w - z_0)$$

Тогда:

$$\int_{(x_0,\, y_0,\, z_0)}^{(u,\, v,\, w)} Pdx + Qdy + Rdz =$$
$$\int_0^1 [P(x_0 + t(u - x_0),\, y_0 + t(v - y_0),\, z_0 + t(w - z_0))(u - x_0) +$$
$$+ Q(x_0 + t(u - x_0),\, y_0 + t(v - y_0),\, z_0 + t(w - z_0))(v - y_0) +$$
$$+ R(x_0 + t(u - x_0),\, y_0 + t(v - y_0),\, z_0 + t(w - z_0))(w - z_0)]dt.$$

Получаем:

$$f(u,\, v,\, w) = \int_0^1 [P(u - x_0) + Q(v - y_0) + R(w - z_0)]dt \frac{\partial f}{\partial u} =$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{\partial P}{\partial x} t(u - x_0) + P + \frac{\partial Q}{\partial x} t(v - y_0) + \frac{\partial R}{\partial x} t(w - z_0)\right] dt$$
$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial x}(u - x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(v - y_0) + \frac{\partial P}{\partial z}(w - z_0).$$

∘ Согласно условию У1:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x}(u - x_0) + \frac{\partial Q}{\partial x}(v - y_0) + \frac{\partial R}{\partial x}(w - z_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \int_0^1 t\left[\frac{\partial P}{\partial x}(u - x_0) + \frac{\partial Q}{\partial x}(v - y_0) + \frac{\partial R}{\partial x}(w - z_0)\right] + Pdt =$$

$$= \int_0^1 \left[t\frac{dP}{dt} + P\right] dt = \int_0^1 t\frac{dP}{dt}dt + \int_0^1 Pdt =$$

$$tP\ |_0^1 - \int_0^1 Pdt + \int_0^1 Pdt = tP\ |_0^1 = P(t = 1) = P(u,\ v,\ w).$$

Циклически переставляя $(u,\ v,\ w)$ получаем остальные утверждения:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = Q,\ \frac{\partial f}{\partial w} = R.$$

□

Глава 4

Теория Лебега(Мера и интеграл Лебега)

4.1 Кольцо множеств, σ-кольцо

ОПР 4.1.1 (Разности множеств).
Пусть A и B — два множества. $C = A - B = \{x \big| x \in A,\ x \notin B\}$ — разность множеств.

ОПР 4.1.2 (Кольца(кольца множеств)).
Пусть $\mathfrak{R}$ — множество некоторых множеств. $\mathfrak{R}$ называется кольцом (кольцом множеств) *если $\forall A, B \subset \mathfrak{R}$ имеет место:*

1. $A \cup B \in \mathfrak{R}$
2. $A - B \in \mathfrak{R}$

Следствие 4.1.3.

- $\varnothing \subset \mathfrak{R}$. Если $A \subset \mathfrak{R}$, $A - A \in \mathfrak{R}$
- $A, B \in \mathfrak{R}$, $A \cap B \in \mathfrak{R}$, т.к. $A \cap B = A - (A - B) \in \mathfrak{R}$.

Пример 4.1.4.

- Пусть X — множество. Через ϑ обозначим множество всех подмножеств в X. Тогда ϑ - кольцо.

ОПР 4.1.5 (σ-кольца)).
$\mathfrak{R}$ *называется* σ-кольцом *если выполнены следующее свойство: для любого счётного набора* $A_i \subset \mathfrak{R} (i = 1, 2, \ldots)$: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{R}$.

Следствие 4.1.6.

▷ Если $\mathfrak{R}$ — σ-кольцо, то для всякого счётного набора $A_i (i \in \mathbb{N})$:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{R}.$$

▷ **Доказательство**.

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 - \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_1 - A_i)$.

□

ОПР 4.1.7 (Функции множеств).
Отображение $\phi\colon \mathfrak{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, *где* $\mathfrak{R}$ *— кольцо, называется* функцией множеств *если* $\forall A \in \mathfrak{R}$ *сопоставляется число* $\phi(A) \in \overline{\mathbb{R}}$. *Причём:*

1. *Не существует таких множеств* A, B, *что* $\phi(A) = -\infty$, $\phi(B) = +\infty$.
2. *Существует по крайней мере одно непустое множество* $B \in \mathfrak{R} \big| \, |\phi(B)| < \infty$.

ОПР 4.1.8 (Счётно-аддитивного отображения).
Отображение $\phi\colon \mathfrak{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, *где* $\mathfrak{R}$ *—* σ*-кольцо, называется* счётно-аддитивным *если:*

1. ϕ *— отображение множеств.*
2. *Для любого счётного набора множеств* $A_i \in \mathfrak{R} \big| \, A_i \cap A_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$ *выполнено:*
$$\phi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(A_i).$$
В частности это условие означает, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \phi(A_i)$ *— сходится (возможно к бесконечности).*

07.12.2006

Теорема 4.1.9 (Свойства счетно-аддитивных функций).

▷ Пусть

$\phi\colon \mathrm{Re} \to \overline{\mathbb{R}}$, Re — σ-кольцо, ϕ — счетно-аддитивна.

▷ Тогда

1. $\phi(\varnothing) = 0$;
2. Если $A_i \big| \, A_i \cap A_j = \varnothing$, при $i,\, j = 1, \ldots, n$, тогда $\phi(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi(A)$;

3. $\phi(A \cup B) + \phi(A \cap B) = \phi(A) + \phi(B)$,
   $\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B) - \phi(A \cap B)$;
4. Пусть $A_i \in \mathrm{Re}$, $i = 1, \ldots, n$, тогда $\phi(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \phi(A_1) + \ldots + \phi(A_n) - \sum\limits_{i<j}^{n} \phi(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{k+1} \cdot \sum\limits_{i_1<\ldots<i_k} \phi(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}) + \ldots + (-1)^n \cdot \phi(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$;
5. Пусть ϕ — положительная функция. Если $A_1 \subseteq A_2$, то $\phi(A_1) \leqslant \phi(A_2)$ — монотонность;
6. Если $B \subset A$ и $|\phi(B)| < \infty$, то $\phi(A - B) = \phi(A) - \phi(B)$.

▷ **Доказательство**.

- 1. $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing \Rightarrow \phi(\varnothing) = \phi(\varnothing) + \phi(\varnothing) = \phi(\varnothing) = 0$;
  2. $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing \Rightarrow A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) \Rightarrow$ $\Rightarrow \phi(A \cup B \cup C) = \phi(A \cup (B \cup C)) = \phi(A) + \phi(B \cup C) = \phi(A) + \phi(B) + \phi(C)$;
  3. $A \cap (B - A) = \varnothing$,
     $A \cup B = A \cup (B - A)$,
     $B \cap (A - B) = \varnothing$,
     $A \cup B = B \cup (A - B)$,
     $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$,
     Складываем $\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B - A)$ и $\phi(B \cup A) = \phi(B) + \phi(A - B)$ и вычитаем $\phi(A \cup B) = \phi(A - B) + \phi(B - A) + \phi(A \cap B)$.
     Получаем $\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B) - \phi(A \cap B)$.
  4. Следует по индукции из 3.
  5. Будем использовать пункт 6. Далее следует и его доказательство. $A_1 \subset A_2$. Согласно пункту 6 $\phi(A_2) = \phi(A_2 - A_1) + \phi(A_1) \Rightarrow \phi(A_2) \geqslant \phi(A_1)$.
  6. Если $B \subset A$, то подмножество $(A - B) \cap B = \varnothing$, $(A - B) \cup B = A$, $\phi(A) = \phi((A - B) \cup B) = \phi(A - B) + \phi(B)$, $\phi(A - B) = \phi(A) - \phi(B)$.

□

Пример 4.1.10.

▷ Пусть дано множество $\{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$. $\phi(A) = card(A)$ — число элементов в A. ϕ — положительна и аддитивна.

Теорема 4.1.11.

▷ Пусть

ϕ — счетно-аддитивна на σ-кольце Re, $A_n \in \mathrm{Re}$, $n = 1, \ldots, n$.

Предположим, что $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$. Пусть $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

▷ Тогда

При $n \to \infty\, \phi(A_n) \to \phi(A)$.

▷ **Доказательство**.

∘ Пусть $B_1 = A_1$, $B_n = A_n - A_{n-1}$. $\forall i, j\; B_i \cap B_j = \varnothing$, $A_m = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m$, $A = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_m$, $\phi(A_n) = \phi(B_1 \cup \ldots \cup B_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi(B_i)$, $\phi(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \phi(B_i)$ — этот ряд сходится. $\phi(A_n) \to \phi(A)$.

□

4.2 Построение меры Лебега

ПРЕДЛ 4.2.1. Пусть в $\mathbb{R}^n$ $I^n = < \alpha_1, \beta_1 > \times \ldots \times < \alpha_n, \beta_n >$, n-мерный интервал. $m(I^n) = |\beta_1 - \alpha_1| \cdot |\beta_2 - \alpha_2| \cdot \ldots \cdot |\beta_n - \alpha_n|$.

ОПР 4.2.2 (Элементарного множества)**.**
Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется элементарным, *если его можно представить как объединение конечного числа n-мерных интервалов. Обозначим через ξ множество всех элементарных подмножеств в $\mathbb{R}^n$.*

Теорема 4.2.3 (Свойства ξ)**.**

▷
1. ξ — кольцо, но не σ-кольцо;
2. Если $A < \xi$, то A можно представить в виде объединения непересекающихся n-мерных интервалов. Такое множество непересекающихся n-мерных интервалов назовем решением A;
3. $\forall A \subset \xi$ функции $m(A) = \sum\limits_{i=1}^{N} m(I_k^n) \cdot I_k^n$ — разбиение A;
4. $m(A)$ не зависит от разбиения;
5. m — аддитивна на ξ.

▷ **Доказательство**.

∘ Доказательство этих пунктов можно найти в лекциях прошлых лет на mfh.gorodok.net

□

ОПР 4.2.4.
Пусть $\phi\colon \xi \to \overline{\mathbb{R}}$. Будем говорить, что ϕ-регулярно, если $\forall A \subset \xi$ существует замкнутое множество F и открытое множество $G \big| F \subset A \subset G$. Тогда $\phi(G) - \varepsilon < \phi(A) < \phi(F) + \varepsilon$.

Пример 4.2.5.

▷ На $\mathbb{R}$. $\phi\colon\ <a,\, b>\to\mathbb{R}$, $\phi(<a,b>)=|b-a|$. Это отображение регулярно. Пусть $\varepsilon>0$. $F=[a+\frac{\varepsilon}{2},\, b-\frac{varepsilon}{2}]$, $G=(a-\frac{\varepsilon}{2},\, b+\frac{\varepsilon}{2})$, $\phi(F)=|b-a|+\varepsilon$, $\phi(G)=|b-a|-\varepsilon$; Условия выполняются.

Пример 4.2.6.

▷ Пусть $f\colon\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ — непрерывна, монотонна, возрастает, положительна. Тогда $\phi\colon\ <a,\, b>\to\overline{\mathbb{R}}$, $\phi(<a,\, b>)=\phi(b)-\phi(a)$.

Лемма 4.2.7.

▷ Функция множества m регулярна на ξ.

▷ <u>**Доказательство**</u>.

- При $n=1$ — это предыдущий пример. Далее очевидно.

□

ОПР 4.2.8.
Пусть μ — аддитивная регулярная положительная функция на ξ. Пусть $E\subset\mathbb{R}^n$. Предположим, что $E<\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$, где $A_i<\xi$. Это означает, что семейство A_i покрывает E. Определим $\mu^*(E)=\inf\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)\right)$, где $\inf$ берется по всевозможным покрытиям множества E семействами ξ. Тогда μ^* называется внешней мерой множества E.

Теорема 4.2.9.

▷
1. $\mu^*(E)\geqslant 0\,\forall\subset\mathbb{R}^n$;
2. $\mu^*(E_1)\leqslant\mu^*(E_2)$, если $E_1\subset E_2$;
3. $\mu^*(A)=\mu(A)$, если $A\in\xi$;
4. $\mu^*(E)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu^*(E_k)$, если $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$;
   $E_k\subset\mathbb{R}^n$ — счетная полуаддитивность.

▷ <u>**Доказательство**</u>.

- Смотри лекции предыдущих лет на mfh.gorodok.net.

□

<u>14.12.2006</u>

ОПР 4.2.10 (Симметрической разности)**.**

Пусть A, B *— два множества.* $S(A,\, B) = (A - B) \cup (B - A)$ *называется* симметрической разностью*.*

ОПР 4.2.11 (Внешней меры симметрической разности)**.**

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$*,* $d(A,\, B) = \mu^*(S(A,\, B))$ *называется* внешней мерой симметрической разности*.*

Теорема 4.2.12 (Свойства S, d)**.**

▷ 1. $S(A,\, B) = S(B,\, A),\ S(A,\, A) = \varnothing,\ S(A,\, \varnothing) = A$

2. $\forall l\colon S(A,\, B) \subset S(A,\, C) \cup S(C,\, B)$

3. Каждое из этих множеств:

$$\begin{cases} S(A_1 \cup A_2,\, B_1 \cup B_2) \\ S(A_1 \cap A_2,\, B_1 \cap B_2) \\ S(A_1 \setminus A_2,\, B_1 \setminus B_2) \end{cases} \subset S(A_1,\, B_1) \cup S(A_2,\, B_2)$$

4. $$\begin{aligned} &d(A,\, B) = d(B,\, A) \\ &d(A,\, A) = 0 \\ &d(A,\, \varnothing) = \mu^*(A) \end{aligned}$$

5. $d(A,\, B) \leqslant d(A,\, C) + d(C,\, B)\ \forall C$

6. Каждая из этих внешних мер:

$$\begin{cases} d(A_1 \cup A_2,\, B_1 \cup B_2) \\ d(A_1 \cap A_2,\, B_1 \cap B_2) \\ d(A_1 \setminus A_2,\, B_1 \setminus B_2) \end{cases} \leqslant d(A_1,\, B_1) + d(A_2,\, B_2)$$

7. Если $\mu^*(A)$ или $\mu^*(B)$ конечны, то $|\mu^*(B) - \mu^*(A)| \leqslant d(A,\, B)$

▷ **Доказательство**.

1,2,3 доказываются аналогично тому, как это делалось в случае с множествами. 4,5,6,7 доказываются из определения $\mu*$.

□

4.2.13 Комментарий

▷

d в каком-то смысле метрика. Например, свойство 5 — неравенство треугольника.
Расстояние от элемента до самого себя равно нулю, d — положительное.
Но из $d(A,\, B) = 0$ не следует, что $A = B$.

$\varnothing, A$ — счётный набор точек $x_1, \ldots, x_n \subset \mathbb{R}^n, d(A, \varnothing) = \mu^*(A)$. $\forall x_n \in \mathbb{R}^n$ возьмём параллелепипед $I_n \Big| m(I_n) = \dfrac{\varepsilon}{2^n}$. Очевидно, что $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

Внешняя мера $\mu^*(A) = \inf(mI_n)$. $\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon = \mu^*(A) = 0$.

ОПР 4.2.14 (Сходимости последовательности множеств)**.**
Будем говорить, что последовательность множеств A_n сходится к множеству A ($A_N \to A$ при $n \to \infty$) *если* $\lim_{n\to\infty} d(A_n, A) = 0$.

ОПР 4.2.15 (Конечно μ-измеримого множества)**.**
Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ *называется* конечным μ-измеримым *если существует последовательность* $A_n \subset \epsilon\Big| \lim_{n\to\infty} d(A_n, A) = 0$. *Множество таких* A *будем обозначать через* $\mathfrak{M}_F(\mu)$.

ОПР 4.2.16 (μ-измеримого множества)**.**
Множество A *называется* μ*-измеримым если* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$*, где* $A_n \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. *Множество* μ*-измеримых подмножеств обозначим через* $\mathfrak{M}(\mu)$.

Теорема 4.2.17 (О $\mathfrak{M}(\mu)$)**.**

▷ $\mathfrak{M}(\mu)$ — σ-кольцо, μ^* — счетно-аддитивная положительная функция множеств.

▷ <u>**Доказательство**</u>.

- $\mathfrak{M}_F(\mu)$ — кольцо (следует из теоремы 4.2.12)
- μ^* — аддитивна на $\mathfrak{M}_F(\mu)$.
- Если $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ и $\mu^*(A) < \infty$, то $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$.
- μ^* — счётно-аддитивно на $\mathfrak{M}(\mu)$.
- $\mathfrak{M}(\mu)$ — $\sigma-$кольцо.

□

ОПР 4.2.18 (Множества меры 0)**.**
$A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ *называется множеством меры* 0 *если* $\mu^*(A) = 0$.

ОПР 4.2.19.
Если начинали с μ*, то* μ^* *обозначим* μ *и* μ *назовём* мерой Лебега.

4.2.20 Комментарий

▷

▷ Любое открытое множество измеримо в $\mathbb{R}^n$.

▷ Любое счётное множество имеет меру 0.

▷ Существует несчётное множество, имеющее меру 0.

▷ Существуют неизмеримые множества.

ОПР 4.2.21 (Пространства с мерой)**.**
Пусть X — некоторое множество. X называется пространством с мерой *если существует набор подмножеств $\mathfrak{M}$ из X и функция множества ϕ такая, что множество $\mathfrak{M}$ — σ-алгебра, ϕ — счётно-аддитивная функция.*

Замечание 4.2.22.

В частности, если $Y \subset X \Big| Y \subset \mathfrak{M}$, то Y также является пространством с мерой. Отсюда следует, что любое μ-измеримое подмножество в $\mathbb{R}^n$ является пространством с мерой.

ОПР 4.2.23 (Измеримой функции)**.**
Пусть X — измеримое пространство, $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, f называется измеримой функцией *если $\forall a \in \mathbb{R}$ множество $S = \{x \in X \Big| f(x) > a\} \Big| S \in \mathfrak{M}$, S — измеримо.*

Теорема 4.2.24.

▷ Следующие условия эквивалентны:

1. $S = \{x \in X \Big| f(x) > a\}$ $\forall a$, S — измеримо
2. $S = \{x \in X \Big| f(x) \geqslant a\}$ $\forall a$, S — измеримо
3. $S = \{x \in X \Big| f(x) < a\}$ $\forall a$, S — измеримо
4. $S = \{x \in X \Big| f(x) \leqslant a\}$ $\forall a$, S — измеримо.

▷ **Доказательство**.

- $(1 \Rightarrow 2)$: $\{x \in X \Big| f(x) \geqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \Big| f(x) > a - \dfrac{1}{n}\right\}$
- $(2 \Rightarrow 3)$: $\{x \in X \Big| f(x) < a\} = X - \{x \in X \Big| f(x) \geqslant a\}$
- $(3 \Rightarrow 4)$: $\{x \in X \Big| f(x) \leqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \Big| f(x) < a + \dfrac{1}{n}\right\}$
- $(4 \Rightarrow 1)$: $\{x \in X \Big| f(x) > a\} = X - \{x \in X \Big| f(x) \leqslant a\}$.

□

Теорема 4.2.25.

▷ Если f — измерима на X, то $|f|$ также измерим.

▷ **Доказательство**.

$$\{x \in X \big| \, |f(x)| < a\} = \{x \in X \big| \, f(x) < a\} \cap \{x \in X \big| \, f(x) > a\}.$$

□

Теорема 4.2.26.

▷ Пусть

f_n – последовательность измеримых функций на X. Положим $g(x) = \sup_n f_n(x)$, $h(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$.

▷ Тогда

$g(x), h(x)$ — измеримы.

▷ **Доказательство**.

Очевидно.

□

Следствие 4.2.27 (Следствие 1).

▷ Пусть

$f(x), g(x)$ — измеримы на X.

▷ Тогда

$h(x) = \max(f(x), g(x))$.

▷ **Доказательство**.

$h(x)$ — измерима на X. $h(x) = \min(f(x), g(x))$, $h(x)$ — измерима на X. В частности, если f — измерима, то:

$$f^+(x) = \max(f(x), 0)$$
$$f^-(x) = -\min(f(x), 0)$$
$$f^+, f^- \quad \text{— измеримы}, \quad f = f^+ - f^-.$$

□

Следствие 4.2.28 (Следствие 2).

Пусть $\forall x \in X\colon f_n(x) \to f(x)$ — поточечно. Тогда если $f_n(x)$ — измеримы $\forall n$, то $f(x)$ — измеримы.

Следствие 4.2.29 (Следствие 3).

Если f, g — измеримы, что $(f + g)$ и $(f\cdot)g$ — измеримы.

4.3 Простые(ступенчатые функции)

21.12.2006

ОПР 4.3.1 (Простой функции)**.**
Функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$*, где* X *— измеримое пространство, называется* простой *если* $f(X) \subset \overline{\mathbb{R}}$ *— конечное множество.*

ОПР 4.3.2 (Характеристической функции)**.**
Пусть X *— измеримое множество,* $E \subset X$. Характеристическая функция $E\colon K_E(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin E \end{cases}$

Пусть $\phi\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — простая функция. Тогда существуют n констант $c_1,\, c_2, \ldots,\, c_n \in \overline{\mathbb{R}}$, $\{c_1,\, c_2, \ldots,\, c_n\} = \phi(x)$, $E_i = \{x \in X \big| \; \phi(x) = c_i\}$. Очевидно, что $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}(x)$.

Вывод: простая функция ϕ измерима тогда и только тогда, когда $\forall i\colon E_i \subset X$ измеримы.

4.3.3 Интегрирование простых измеримых функций

ОПР 4.3.3.1 (Интеграла Лебега от простой функции)**.**
Пусть $S(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}(x)$ *— простая функция. Имеют место факты:*

1. $E_i \cap E_j = \varnothing$ *если* $i \neq j$
2. $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = X$;

Будем считать, что $S(x) \geqslant 0$ *(положительная). Пусть* $E \subset X$, E *— измеримо.*

Тогда определим:

$$I_E(S) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i)$$

$I_E(S)$ *— называется интегралом Лебега от простой функции по множеству* E*.*

Теорема 4.3.3.2 (Свойства интеграла Лебега)**.**

$\triangleright$

1. Интеграл не зависит от представления простой функции (интеграл определён корректно).
2. Если S_1, S_2 — простые, то $(S_1 + S_2)$ — простая и $I_E(S_1 + S_2) = I_E(S_1) + I_E(S_2)$.
3. Если S — простая и $\lambda \in \mathbb{R}$, то $(\lambda S$ — простая и $I_E(\lambda S) = \lambda I_E(S)$.
4. Если $\forall x \in E\colon 0 \leqslant S_1(x) \leqslant S_2(x)$, то $I_E(S_1) \leqslant I_E((S_2)$.
5. Пусть $E = G \cup F$, причём $G \cap F = \varnothing$, тогда $I_E(S) = I_F(S) + I_G(S)$.

4.3.4 Интегрирование измеримых функций

ОПР 4.3.4.1 (Интеграла Лебега по множеству).

Пусть $\forall x \in X\colon f(x) \geqslant 0$, *пусть* f *— измерима и* $E \subset X$ *— измеримо.*

Тогда определим интеграл Лебега как

$$\int_E f d\mu = \sup\{I_E(S)\}, \tag{4.3.1}$$

где sup *берётся по всевозможным простым функциям* $S\Big| 0 \leqslant S \leqslant f$.

В этом случае (4.3.1) называется интегралом Лебега по множеству E по мере μ от положительной функции f.

Замечание 4.3.4.2.

$\int_E f d\mu = \infty$ — допускается.

Следствие 4.3.4.3.

Если S — простая функция, то $\int_E S d\mu = I_E(S)$.

ОПР 4.3.4.4.

Пусть $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *— произвольная измеримая функция,тогда* f *можно представить в виде* $f = f^+ - f-$, *где* f^+, f^- *— положительные.*

Если хотя бы один из интегралов Лебега от положительны функций $\int_E f^+ d\mu, \int_E f^- d\mu$ *не равен* ∞, *то определим:*

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

ОПР 4.3.4.5 (Интегрируемой по Лебегу функции).

Пусть f *— измеримая функция и оба интеграла* $\int_E f^+ d\mu$ *и* $\int_E f^- d\mu$ *не равны* ∞. *В этом случае* f *называют* интегрируемой по Лебегу на E.

Множество функций, интегрируемых по Лебегу обозначается $\mathfrak{L}(\mu)$.

Теорема 4.3.4.6 (Свойства интегрируемых по Лебегу функций).

$\triangleright$

1. Пусть f измерима и ограничена и $\mu(E) < \infty$. Тогда $f \in \mathfrak{L}(\mu)$.
2. Пусть f измеримо и $a \leqslant f(x) \leqslant b\ \forall x \in E, \mu(E) < \infty$. Тогда $a\mu(E) \leqslant \leqslant \int_E f d\mu \leqslant b\mu(E)$.
3. Пусть f, g — измеримы и $f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in E,\ f, g \in \mathfrak{L}(\mu)$. Тогда $\int_E f d\mu \leqslant \int_E g d\mu$.
4. Если $f \in \mathfrak{L}(\mu)$, то $\forall c \in \mathbb{R}\colon cf \in \mathfrak{L}(\mu)$, причём $\int_E cf d\mu = c\int_E f d\mu$.

5. Если $f, g \in \mathfrak{L}(\mu)$, то $f + g \in \mathfrak{L}(\mu)$ и $\int_E (f+g)d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$.
6. Если $f \subset \mathfrak{L}(\mu)$ на множестве E и $A \subset E$ (A — измеримо), то $f \in \mathfrak{L}(\mu)$ на A.
7. Если f — измеримо на множестве E и $\mu(E) = 0$, то $\int_E f d\mu = 0$.
8. Пусть A, B — два измеримых подмножества X. Причём $A \cap B = \varnothing$. Тогда: $\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$.
9. Счётная аддитивность. Пусть $f \in \mathfrak{L}(\mu)$ на множестве E. Пусть $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \big| \ A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Тогда $\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu$. В частности, если $\forall A$ определить $\phi(A) = \int_A f_E d\mu$, то $\phi(A)$ — функция множества.

ОПР 4.3.4.7 (Совпадения с точности до множества меры 0)**.**
Пусть даны 2 функции f, g на множестве X. Рассмотрим множество $E = \{x \in X \big| \ f(x)g(x)\}$. Предположим, что множество E — измеримо. Будем говорить, что $f \sim g$ если $\mu(E) = 0$. Будем говорить, что функции совпадают с точностью до множества меры 0.

Теорема 4.3.4.8 (Об абсолютной интегрируемости)**.**

▷

Пусть $F \in \mathfrak{L}(\mu)$ на E. Тогда $|f| \subset \mathfrak{L}(\mu)$. Обратное вообще говоря неверно.

Теорема 4.3.4.9 (О мажоранте)**.**

▷

Пусть f — измерима, $E \in \mathfrak{M}$. Если $\forall x \in E\colon |f(x)| \leqslant g(x)$ (где $g(x) \in \mathfrak{L}(\mu)$) на E, то $f(x) \in \mathfrak{L}(\mu)$ на E.

Теорема 4.3.4.10 (Беппо-Леви о монотонной сходимости)**.**

▷

Пусть $E \subset \mathfrak{M}, \{f_n(x)\}$ — последовательность измеримых функций на E. Причём:

1. $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots$ ($\forall x$ последовательность монотонная и положительна).
2. $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ (поточечная сходимость).

Тогда интеграл $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$.

Теорема 4.3.5 (Беппо-Леви о ряде)**.**

▷ Пусть

$E \subset \mathfrak{M}, f_n$ — последовательность измеримых положительных функций. Предположим, что $\exists f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ (ряд поточечно сходится).

▷ Тогда

$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_E f_i d\mu$.

▷ **Доказательство**.

Очевидно, что последовательность частичных сумм ряда монотонно возрастает и сходится. Последовательности частичных сумм удовлетворяют теореме Беппо-Леви.

□

Теорема 4.3.5.1 (Лемма Фату).

▷

Пусть $E \subset \mathfrak{M}, f_n(x)$ — последовательность измеримых положительных функций. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \forall x \in E$. Тогда $\int_E f d\mu \leqslant \underline{\lim} \int_E f_n d\mu$.

Теорема 4.3.5.2 (Лебега об ограниченной сходимости).

▷

Пусть $E \subset \mathfrak{M}, \{f_n(x)\}$ — последовательность измеримых функций таких, что $\forall x\colon f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$. Если существует функция $g(x) \big| |f_n(x)| \leqslant \leqslant g(x)\ \forall x \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Причём $g(x) \in \mathfrak{L}(\mu)$ на E. Тогда:

1. $f_n(x), f(x) \in \mathfrak{L}(\mu)$ на E
2. $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$.

Следствие 4.3.5.3.

Пусть $E \big| \ \mu(E) < \infty, |f_n(x)| \leqslant M\ \ \forall x \in E,\ \ \forall n$. Пусть $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Тогда $f \in \mathfrak{L}(\mu)$ на E.

Теорема 4.3.5.4 (Связь интегралов Лебега и Римана).

▷

Пусть f — интегрируема по Риману на $[a,\, b]$. Тогда f — интегрируема по Лебегу на $[a,\, b]$ и интегралы Римана и Лебега совпадают.

Литература

[1] Кренделев Сергей Федорович